MATHEMATISCHE ANNALEN

130. BAND

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH

FELIX KLEIN — DAVID HILBERT

OTTO BLUMENTHAL — ERICH HECKE

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN VON

HEINRICH BEHNKE, MÜNSTER (WESTF.) — RICHARD COURANT, NEW YORK

HEINZ HOPF, ZÜRICH — KURT REIDEMEISTER, GÖTTINGEN

FRANZ RELLICH †, GÖTTINGEN — BARTEL L. VAN DER WAERDEN, ZÜRICH

130. BAND

SPRINGER-VERLAG

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

1955/56

Unveränderter Nachdruck 1971
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg
Printed in Germany

Inhalt des 130. Bandes

(In alphabetischer Ordnung)

JAEGER, A.
Math. Annalen, Bd. 130, S. 1—6 (1955).

A Representation of Multidifferential Polynomials in Fields of Prime Characteristic.

By

ARNO JAEGER in Cincinnati, Ohio.

1. Introduction.

At first a special notation[1]) will be introduced to faciliate calculations involving polynomials in several indeterminates. Then a set of partial derivations[2]), called a multiderivation, of a separably and finitely generated algebraic function field F of characteristic $p > 0$ is used to prove the following basis theorem: If $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ is a separating transcendence basis for F over its ground field the p^n power products

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \qquad (0 \leq \alpha_i \leq p-1)$$

form a basis for F over the subfield C of differential constants. Next the ring Ω of multidifferential polynomials will be defined, and the multidifferential polynomial ideal X which admits every n-tuple of elements of F as a zero will be determined. Finally Ω/X is shown to be C-isomorphic with the full endomorphism ring of the division algebra F over C.

2. Notation.

The letter n will stand for a fixed positive integer throughout the paper. Apart from the KRONECKER delta

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = k \\ 0 & \text{if } i \neq k \end{cases}$$

small Greek letters $\alpha, \beta, \ldots, \sigma, \tau, \ldots$ will generally denote ordered n-tuples

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),\ \beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n), \ldots,$$
$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n),\ \tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n), \ldots$$

of non-negative integers $\alpha_i, \beta_i, \ldots, \sigma_i, \tau_i, \ldots$. The symbol ε_k will be used for the ordered n-tuple

$$\varepsilon_k = (\delta_{1k}, \delta_{2k}, \ldots, \delta_{nk})$$

having a 1 in the k-th place and zeros otherwise. The sum of two n-tuples α and β will be defined by

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n).$$

[1]) Cf. [3] p. l.

[2]) Note that in [3], [4] and [5] a different concept of a derivation was used; only [6] and [7] take the same viewpoint as this paper.

If $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ is an ordered n-tupel of indeterminates, commuting in pairs, over a field F we shall abbreviate

$$\sum_{\alpha} a_\alpha Y^\alpha = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} a_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} \prod_{j=1}^{n} Y_j^{\alpha_j} \qquad (a_\alpha \in F)$$

and in particular

$$\sum_{\alpha=0}^{t} a_\alpha Y^\alpha = \sum_{\alpha_1=0}^{t} \sum_{\alpha_2=0}^{t} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{t} a_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} \prod_{j=1}^{n} Y_j^{\alpha_j} \qquad (a_\alpha \in F).$$

In the same manner $\sum\limits_{\alpha} a_\alpha x^\alpha$ and $\sum\limits_{\alpha=0}^{t} a_\alpha x^\alpha$ are defined if $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ is an ordered n-tupel of elements x_i of the field F.

More general, if t denotes an integer we shall also take this letter t as an abbreviation for the n-tupel $(t, t, \ldots, t)$, provided that no misunderstanding is possible. Thus we shall use the notations

$$D^t = (D_1^t, D_2^t, \ldots, D_n^t),$$

$$x^p = (x_1^p, x_2^p, \ldots, x_n^p).$$

Finally we shall abbreviate:

$$\alpha! = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i!)$$

$$\binom{\beta}{\alpha} = \prod_{i=1}^{n} \binom{\beta_i}{\alpha_i}.$$

3. Multiderivations of a Field.

Let $F = f(x; y)$ be a separably generated algebraic function field of characteristic $p > 0$ in n independent indeterminates $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ over the ground field f. There exist n partial derivations $D_i = \partial/\partial x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ of F over f uniquely defined[3]) by the equations

$$D_i(x_j) = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Since all p-th powers of elements of F are constants with respect to any derivation of F the $D_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ are even partial derivations over $C = f(x^p; y^p)$, and every element c of F for which $D_i(c) = 0$ holds, for every $i = 1, 2, \ldots, n$, lies in C. The formal n-tupel $D = (D_1, D_2, \ldots, D_n)$ will be called a *multiderivation of F over C*.

4. A Basis Theorem.

Theorem I. *F is a division algebra of dimensionality p^n over C. Every element of F can be uniquely expressed in the form*

(1) $$\sum_{\alpha=0}^{p-1} c_\alpha x^\alpha$$

with $c_\alpha \in C$[4]).

[3]) Cf. [1] p. 140.
[4]) Cf. [5], p. 271.

Proof. 1. Existence. It is shown in [7] that we have

$$D_i^p(z) = 0 \tag{2}$$

for every $z \in F$ and all derivations $D_i (i = 1, 2, \ldots, n)$. Hence $D_i^{p-1}(z) \in C^*$ where C^* is the field of all D_i-constants.

Suppose now it has been shown that the $(p-k)$-th derivative of every $z \in F$ can be written in the form

$$D_i^{p-k}(z) = D_i(D_i^{p-k-1}(z)) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j^* x_i^j \quad (0 < k < p,\ c_j^* \in C^*).$$

Then, as in the classical case, the general solution u in F of the differential equation

$$D_i(Y) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j^* x_i^j$$

is given by

$$u = \sum_{j=1}^{k} \frac{c_{j-1}^*}{j} x_i^j + c$$

where c is an arbitrary element of C^*. Hence $u = D_i^{p-k-1}(z)$ can be written in the form

$$D_i^{p-k-1}(z) = \sum_{j=0}^{k} c_j^{**} x_i^j \qquad (0 < k < p,\ c_j^{**} \in C^*).$$

Therefore every $z \in F$ can be expressed as

$$z = \sum_{j=0}^{p-1} c_j x_i^j \tag{3}$$

with $c_j \in C^*$.

In the case $n = 1$ take $i = 1$, then $C^* = C$ follows, and the existence part of the theorem is proved. If $n > 1$ put $C^* = C_1$, and construct recursively a descending chain

$$C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_n$$

of subfields of C_1 by defining $C_i (i = 2, 3, \ldots, n)$ to be the subfield of C_{i-1} consisting of all D_i-constants of C_{i-1}. Then it is obvious that D_i is a *derivation of* C_{i-1} (i. e. $D_i(C_{i-1}) \subseteq C_{i-1}$). By applying the previous argument to the case of an element $c \in C_{i-1} (i = 2, 3, \ldots, n)$ this c is shown to be expressible in the form (3), where, this time, the c_j's are elements of C_i.

Combining these results we see that the original z can be written in the form (1) with $c_\alpha \in C_n$. If $C_i^* \ (i = 1, 2, \ldots, n)$ denotes the subfield of F consisting of all D_i-constants of F then $C_i^* \supseteq C_i$, $C = \bigcap_{i=1}^{n} C_i^*$, and hence $C \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} C_i = C_n$. Since obviously $C_n \supseteq C$ holds we have $C_n = C$, and the existence of a representation (1) with $c_\alpha \in C$ is shown.

2. Uniqueness. We have to prove that

$$\sum_{\alpha=0}^{p-1} c_\alpha x^\alpha = 0$$

holds only if all c_α vanish. This is certainly true if the sum consists of one term c_0 only. Hence let us assume that in the representation (1) there exist n-tupels $\alpha \neq 0$ such that $c_\alpha \neq 0$. Now let β be a fixed one of them satisfying $c_\beta \neq 0$ such that $\sum_{i=1}^{n} \beta_i \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ for all α's with $c_\alpha \neq 0$. Then a simple calculation shows that

$$D^\beta \left(\sum_{\alpha=0}^{p-1} c_\alpha x^\alpha \right) = \beta!\, c_\beta \neq 0,$$

and therefore we have

$$\sum_{\alpha=0}^{p-1} c_\alpha x^\alpha \neq 0.$$

5. Multidifferential Polynomials.

We shall now consider finite formal sums $A = \sum_\alpha a_\alpha Y^\alpha$ with $a_\alpha \in F$ and $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ being an n-tupel of independent indeterminates over F. The empty sum, i. e. the sum where each coefficient is equal to zero, will be denoted by 0. When an *addition* and a *multiplication* of two such expressions $A = \sum_\alpha a_\alpha Y^\alpha$ and $B = \sum_\beta b_\beta Y^\beta$ are respectively defined by[5])

$$A + B = \sum_\alpha (a_\alpha + b_\alpha) Y^\alpha, \tag{4}$$

$$A\, B = \sum_{\alpha,\beta} \sum_{\gamma=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} a_\alpha D^{\alpha-\gamma}(b_\beta)\, Y^{\beta+\gamma} \tag{5}$$

[where (5) still can be re-written in the form $AB = \sum_\gamma c_\gamma Y^\gamma$ by application of (4)] they are called *multidifferential polynomials in F relative to D* and form a ring $\Omega(F, D)$, the *ring of multidifferential polynomials in F relative to D.*

If $A = \sum_\alpha a_\alpha Y^\alpha$ is a multidifferential polynomial in F we shall use the abbreviation

$$A(z) = \sum_\alpha a_\alpha D^\alpha(z).$$

Then the mapping $z \to A(z)$ is an endomorphism of the additive group of F. Now (4) and (5) are chosen in such a way that the correspondence between A and the endomorphism $z \to A(z)$ is a representation of the ring $\Omega(F, D)$ in the endomorphism ring of the additive group of F.

6. A Maximal Ideal.

Lemma: *The two-sided ideal X generated by $D^p = (D_1^p, D_2^p, \ldots, D_n^p)$ is equal to the left-ideal generated by D^p. As a two-sided ideal X is maximal.*

Proof: 1. By using (5) and (2) and applying $\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod{p}$ for $0 < k < p$ we obtain

$$D_i^p\, a_\alpha D^\alpha = a_\alpha D^\alpha D_i^p \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

[5]) This is a straightforward generalization of the ring of differential polynomials in [2], p. 30.

2. Consider the residue class ring Ω/X and take the elements $R = \sum_{\alpha=0}^{p-1} r_\alpha Y^\alpha$ as representatives of its residue classes. Let

$$t(R) = \begin{cases} -\infty & \text{for } R = 0 \\ \underset{\alpha \text{ with } r_\alpha \neq 0}{\text{maximum}} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) & \text{for } R \neq 0 \end{cases}$$

be called the *total order of R*. If I is an ideal of Ω/X let

$$t(I) = \underset{R(\neq 0) \in I}{\text{minimum}}\, t(R)$$

be called the *total order* of I. Then the zero ideal and the unit ideal of Ω/X are characterized by total orders $-\infty$ and 0 respectively.

Now let I be a two-sided ideal of Ω/X with $t(I) > 0$. Then there exists a class of Ω/X in I whose representative has the form

$$S = \sum_{\alpha=0}^{t(I)} s_\alpha Y^\alpha$$

where $s_\tau \neq 0$ for a τ with $\sum_{i=1}^{n} \tau_i = t(I)$. Since $t(I) > 0$ this τ must have a component $\tau_k \neq 0$. Put

$$B = S\, x_k - x_k S = \sum_\beta b_\beta Y^\beta \tag{6}$$

then obviously

$$t(B) < t(S). \tag{7}$$

Using the abbreviation

$$\sigma = \tau - \varepsilon_k$$

and applying (5) we get for the coefficient b_σ of (6):

$$b_\sigma = \sum_{i=1}^{n} s_{\sigma+\varepsilon_i} D_i(x_k) = s_\tau \neq 0.$$

Because of (7) and

$$t(b_\sigma Y^\sigma) = t(S) - 1$$

we obtain

$$t(B) = t(I) - 1 \qquad \text{for } B \in I$$

which contradicts the definition of $t(I)$. Therefore Ω/X is a simple ring.

Corollary: *X is the kernel of the representation which associates each $A \in \Omega$ with the endomorphism $y \to A(y)$ of F.*

Proof: The kernel K of the above representation must contain X in view of (2). Since obviously $K \neq \Omega$ and X is maximal we have $K = X$.

7. The Representation Theorem.

From now on we shall identify the classes of multidifferential polynomials of the form $a_0 Y^0$ with the elements $a_0 \in F$; then F becomes a subfield of the ring $\Psi = \Omega/X$, and C obviously becomes the center of Ψ. Now it follows

from theorem I that Ψ is a central algebra of dimensionality p^{2n} over C with basis elements

$$x^{\alpha} Y^{\beta} \qquad (0 \leq \alpha,\ \beta \leq p).$$

The faithful representation

$$A \bmod X \to (y \to A(y))$$

is a C-isomorphism of Ψ with a subring of the endomorphism ring $E(F, C)$ of F, regarded as a division algebra of dimensionality p^n over C. Since $E(F, C)$ has also dimensionality p^{2n} we obtain at once the final result:

Theorem II. *The ring of multidifferential polynomials in F relative to D reduced modulo the ideal generated by Y^p is C-isomorphic with the full endomorphism ring of the division algebra F over C.*

Bibliography.

[1] N. Bourbaki: Algèbre chap. IV—V, Actualités Scientifiques et Industrielles, no. 1102. Paris 1950. — [2] N. Jacobson: The theory of rings. Mathematical Surveys no. II. New York 1943. — [3] A. Jaeger: Eine algebraische Theorie vertauschbarer Differentiationen für Körper beliebiger Charakteristik. J. reine angew. Math. **190**, 1—21 (1952). — [4] A. Jaeger: Gewöhnliche Differentialgleichungen in Körpern von Primzahlcharakteristik. Mh. Math. **56**, 181—219 (1952). — [5] A. Jaeger: Partielle Differentialgleichungen in Körpern von Primzahlcharakteristik. Mh. Math. **56**, 265—287 (1952). [6] A. Jaeger: Lineare Differentialgleichungen in algebraischen Funktionenkörpern mehrerer Unbestimmter bei Primzahlcharakteristik. Proc. Int. Math. Congr., Amsterdam II, pp. 27—28 (1954). — [7] A. Jaeger: On partial differential equations in a field of prime characteristic. Canad. J. Math. **7** (1955) (in print).

(Eingegangen am 13. März 1955.)

Jaeger, A.
Math. Annalen, Bd. 130, S. 7—10 (1955).

A Relation Between Adjoint Multidifferential Polynomials and Transposed Matrices for Fields of Prime Characteristic.

By

Arno Jaeger in Cincinnati, Ohio.

1. Introduction.

In [3] it was proved that the multidifferential polynomials $\sum_{\alpha=0}^{p-1} a_\alpha Y^\alpha$ of a separably and finitely generated algebraic function field of prime characteristic correspond one-to-one to matrices over the field of differential constants. In this paper it will be shown that these matrices can be chosen in such a way that this correspondence associates the adjoint multidifferential polynomials $\sum_{\alpha=0}^{p-1} (-1)^\alpha Y^\alpha a_\alpha$[1]) with the *transposed matrices of the second kind* which are obtained by reflection about the matrix diagonal from the *upper right* to the *lower left*.

Initially the suffices for the elements of these matrices are only partially ordered, but obviously the results are independent of the way in which the partial order is refined to a simple order. To avoid the construction of any such refinement some of the matrix operations are generalized to *virtual matrices* whose elements have suffices belonging to any finite set.

2. Virtual Matrices.

The notations and conventions stated in [3] will be used throughout this paper, too. Moreover we shall introduce the following abbreviations:

(1) $$q = p - 1$$

for the vector $p - 1$ as well as for the scalar $p - 1$,

(2) $$\alpha' = q - \alpha$$

for n-tuples α, and finally

(3) $$\alpha \subset \beta \quad \text{if} \quad \alpha_i \leq \beta_i \qquad \text{for all } i = 1, 2, \ldots, n.$$

The set L of all n-tuples α satisfying $0 \subset \alpha \subset q$ becomes a lattice if a partial order is defined in it by (3). L was frequently used as an index set in [3].

A family $(a_\alpha)_{\alpha \in M}$ of elements a_α of a ring F with a finite index set M becomes an ordered n-tuple if a simple order is introduced in M in any way. Similarly a family $(a_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta) \in M \times N}$ of elements $a_{\alpha\beta}$ of the ring F whose index set is the product of two finite sets M and N can be considered as a matrix over F if simple orders are introduced in M and N. We shall be interested

[1]) $(-1)^\alpha = \Pi(-1)^{\alpha_i}$, cf. [3].

here in the case $M = N$ only although many of the statements made in this section can easily be generalized to the case where $M \neq N$. After a simple ordering of M has been chosen the calculus of matrices may be applied in the appropriate fashion. If the results so obtained are stated componentwise they are independent of the choice of the simple ordering. Hence it will be convenient to define some of the usual matrix operations for those families without reference to a superficially imposed simple ordering.

A family $(a_\alpha)_{\alpha \in M}$ with a finite index set M is called a *virtual vector (with respect to M)*. A family $(a_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta) \in M \times N}$ with index set $M \times N$ where M and N are finite sets is called a *virtual matrix (with respect to $M \times N$)*, and, in particular, *quadratic* if $M = N$. We shall omit the adjective "virtual" at times when no misunderstanding is possible.

Vectors will be considered as matrices of one column. Equality, addition and scalar multiplication are defined for virtual matrices as usual; multiplication of two virtual matrices $(a_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta) \in P \times Q}$ and $(b_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta) \in Q \times R}$ by

$$(a_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta) \in P \times Q} \cdot (b_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta) \in Q \times R} = (c_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta) \in P \times R}$$

with

$$c_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda \in Q} a_{\alpha\lambda} b_{\lambda\beta}.$$

From now on we shall assume that all matrices are quadratic. Then the subset $(a_{\alpha\alpha})_{\alpha \in M}$ is called the *principal diagonal* and the virtual matrix $(a^{+}_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta \in M}$ with $a^{+}_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ the *transpose of* $(a_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta \in M}$. Suppose now that there is given a fixed permutation π of M of order 2:

$$\alpha \to \pi(\alpha), \quad \pi(\pi(\alpha)) = \alpha, \quad \alpha \in M.$$

Then the subset

$$(a_{\alpha,\pi(\alpha)})_{\alpha \in M} = (a_{\pi(\alpha),\alpha})_{\alpha \in M}$$

is called the *π-diagonal of* $(a_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta \in M}$. Furthermore with each virtual matrix $(a_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta \in M}$ the virtual matrix

$$(a^{+}_{\alpha\beta}) \quad \text{with} \quad a^{+}_{\alpha\beta} = a_{\pi(\beta),\pi(\alpha)} \tag{4}$$

can be associated. We shall call (4) the *π-transpose of* $(a_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta \in M}$ and also denote it by $(a_{\alpha\beta})^{+}$. Now an easy calculation, similar to that for an ordinary transpose, shows that for each permutation π of M of order 2 the mapping

$$(a_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta \in M} \to (a_{\alpha\beta})^{+}_{\alpha,\beta \in M}$$

is an anti-automorphism of the full ring of virtual matrices with respect to $M \times M$.

In the following sections we shall take $M = L$, and we shall use as the permution π the mapping $\alpha \to \alpha'$. The matrix obtained by π-transposition will then be called the *transpose of the second kind*.

3. The Correspondence Between Polynomials and Matrices.

As in [3] let $F = f(x; y)$ be a separably generated algebraic function field of characteristic $p > 0$ in n independent indeterminates x over the ground field f, and let D be the multiderivation of F over the differential constant

field C satisfying $D_i(x_j) = \delta_{ij}$[2] $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. It was shown in [3] that there is a C-isomorphism of the ring of all linear transformations

$$y \to A(y),$$

where A is any multidifferential polynomial $\sum_{\alpha=0}^{q} a_\alpha Y^\alpha$ in F relative to D, with the set of all virtual matrices with respect to L over the differential constant field C relative to the basis $x^\alpha (0 \subset \alpha \subset q)$.

In order to calculate the virtual matrices $\mu(A) = (a_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in L}$ corresponding to the transformations induced by the multidifferential polynomials A we shall assume from now on that the elements $a_\alpha, b_\alpha, \ldots, y_\alpha$ are the coefficients of x^α in the basis representation

$$a = \sum_{\alpha=0}^{q} a_\alpha x^\alpha,\ b = \sum_{\alpha=0}^{q} b_\alpha x^\alpha, \ldots, y = \sum_{\alpha=0}^{q} y_\alpha x^\alpha \tag{5}$$

of the elements $a, b, \ldots, y$ as introduced in [3]. Then $(a_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in L}$ is determined by the equation

$$A(y) = \sum_{\alpha,\beta=0}^{q} a_{\alpha\beta} y_\beta x^\alpha.$$

For the partial derivative we obtain

$$D_i\left(\sum_{\gamma=0}^{q} b_\gamma x^\gamma\right) = \sum_{\alpha=0}^{q-\varepsilon_i} (\alpha_i + 1)\, b_{\alpha+\varepsilon_i} x^\alpha = \sum_{\alpha=0}^{q} (\alpha_i + 1)\, b_{\alpha+\varepsilon_i} x^\alpha$$

because of $\alpha_i + 1 \equiv 0 \pmod p$ for $\alpha = q$, and hence

$$\mu(Y_i) = (y_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in L} \quad \text{with} \quad y_{\alpha\beta} = (\alpha_i + 1)\, \delta_{\alpha+\varepsilon_i,\beta}. \tag{6}$$

Next we take the product

$$a\, b = \sum_{\varkappa=0}^{q} a_\varkappa x^\varkappa \cdot \sum_{\lambda=0}^{q} b_\lambda x^\lambda = \sum_{\delta=0}^{2q} \left(\sum_{\substack{\varkappa+\lambda=\delta \\ 0\subset\varkappa,\lambda\subset q}} a_\varkappa b_\lambda \right) x^\delta.$$

For each n-tuple δ we define an n-tuple $\eta = \eta\{\delta\}$ uniquely determined by the condition

$$0 \subset \delta - p \cdot \eta\,\{\delta\} \subset q.$$

Then it follows that

$$a\, b = \sum_{\alpha=0}^{q} \left(\sum_{\eta} \sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha+p\eta \\ 0\subset\beta,\gamma\subset q}} a_\gamma b_\beta x^{p\eta} \right) x^\alpha, \qquad \eta = \eta\,\{\beta + \gamma\},$$

and by elimination of γ we obtain

$$ab = \sum_{\alpha=0}^{q} \sum_{\beta=0}^{q} a_{\alpha-\beta+p\eta} b_\beta x^{p\eta} x^\alpha$$

with the condition

$$0 \subset \alpha - \beta + p\,\eta \subset q$$

which can also be written in the form

$$q \supset \beta - \alpha + q - p\,\eta \supset 0 \quad \text{or} \quad \eta = \eta\,\{\beta - \alpha + q\},$$

---

[2]) The Kronecker delta.

therefore

(7) $\mu(a) = \mu(a\,Y^0) = (a_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in L}$ with $a_{\alpha\beta} = x^{p\eta}\, a_{\alpha-\beta+p\eta}$, $\eta = \eta\,\{\beta - \alpha + q\}$.

(6) and (7) determine $\mu(A)$ for an arbitrary multidifferential polynomial A uniquely.

4. Adjoint Polynomials and Transposed Matrices.

The anti-automorphism $*$ which associates with a multidifferential polynomial $A = \sum_{\alpha=0}^{q} a_\alpha Y^\alpha$ its adjoint polynomial $A^* = \sum_{\alpha=0}^{q} (-1)^\alpha Y^\alpha a_\alpha$ is characterized by

$$Y_i^* = (-1)\,Y_i \qquad \text{for} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$
$$a^* = (a\,Y^0)^* = Y^0 a = a \qquad \text{for} \quad a \in F.$$

From (6) we have

$$-\,y_{\alpha\beta} = (p-1-\alpha_i)\,\delta_{q-\alpha-\varepsilon_i, q-\beta} = \alpha_i'\,\delta_{\beta'+\varepsilon_i,\alpha'} = (\beta_i' + 1)\,\delta_{\beta'+\varepsilon_i,\alpha'} = y_{\beta'\alpha'},$$

hence it follows that

(8) $$\mu(Y_i^*) = \mu(Y_i)^+$$

holds. From (7) we see immediately that $(a_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in L}$ coincides with its transpose of the second kind, hence we have also

(9) $$\mu(a^*) = \mu(a)^+.$$

By using the fact that μ is a homomorphism, that $*$ and $^+$ are anti-automorphisms, and applying (8) and (9) we obtain finally for an arbitrary multidifferential polynomial A:

$$\mu(A^*) = \mu\left(\sum_{\alpha=0}^{q} (Y_\alpha)^* a_\alpha^*\right) = \sum_{\alpha=0}^{q} \mu((Y^\alpha)^*)\,\mu(a_\alpha^*) = \sum_{\alpha=0}^{q} \mu(Y^\alpha)^+\,\mu(a_\alpha)^+$$
$$= \sum_{\alpha=0}^{q} (\mu(a_\alpha)\,\mu(Y^\alpha))^+ = \mu(A)^+$$

which can be stated in the form:

Theorem: *Let the linear transformations $y \to A(y)$ induced by the multidifferential polynomials $A = \sum_{\alpha=0}^{q} a_\alpha Y^\alpha$ in F be represented by matrices with respect to the basis $x^\alpha\,(0 \subset \alpha \subset q)$. Then the anti-automorphism $A \to A^*$ of the ring of multidifferential polynomials in F modulo the ideal generated by Y^p corresponds to the anti-automorphism of the full matrix ring over the field of all differential constants which associates with a matrix its transpose of the second kind.*

Bibliography.

[1] N. JACOBSON: The theory of rings. Mathematical Surveys no. II, New York 1943. [2] A. JAEGER: Partielle Differentialgleichungen in Körpern von Primzahlcharakteristik. Mh. f. Math. 56, 265—287 (1952). — [3] A. JAEGER: A representation of multidifferential polynomials in fields of prime characteristic. Math. Ann. 129, 1 (1955).

(Eingegangen am 16. April 1955.)

Engel, W.
Math. Annalen, Bd. 130, S. 11—19 (1955).

Ein Satz über ganze Cremona-Transformationen der Ebene.

Von
Wolfgang Engel in Halle (Saale).

Gegeben sei der Körper $R = K_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ der rationalen Funktionen in n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ über dem Körper der komplexen Zahlen K_0. R sei der Quotientenkörper des Polynomringes $R_0 = K_0[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Ein Automorphismus von R, der den Körper K_0 festläßt, heißt Cremona-Transformation. Betrachten wir zunächst einen Isomorphismus zwischen dem Körper $R = K_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und dem Körper $R' = K_0(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$. Jeder Größe aus R ist eine Größe aus R' zugeordnet und umgekehrt. Also muß auch gelten $x_\nu \leftrightarrow g'_\nu h'^{-1}_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n)$ mit $g'_\nu \in R'_0$, $h'_\nu \in R'_0$ und $x'_\nu \leftrightarrow g_\nu h_\nu^{-1} (\nu = 1, 2, \ldots, n)$ mit $g_\nu \in R_0$, $h_\nu \in R_0$. Dabei sei $R'_0 = K_0[x'_1, x'_2, \ldots, x'_n]$. Wir identifizieren R mit R', lassen aber die Striche bestehen, um die unterschiedliche Punktbezeichnung in R und R' zu kennzeichnen. Den Übergang von R zu R' führen wir aus, indem wir setzen

$$x_\nu = \frac{g'_\nu}{h'_\nu}, \quad x'_\nu = \frac{g_\nu}{h_\nu}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Dabei sind die Funktionaldeterminanten

$$\frac{\partial(x)}{\partial(x')} = \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)} \not\equiv 0, \quad \frac{\partial(x')}{\partial(x)} = \frac{\partial(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \not\equiv 0.$$

Wir wollen hier Cremona-Transformationen betrachten, für die gilt

$$x_\nu = g'_\nu, \; x'_\nu = g_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \quad g'_\nu \in R'_0, \; g_\nu \in R_0.$$

Derartige Cremona-Transformationen heißen nach dem Vorgang von Herrn O.-H. Keller [4] ganze Cremona-Transformationen. Die Funktionaldeterminanten $\frac{\partial(x)}{\partial(x')}$ und $\frac{\partial(x')}{\partial(x)}$ sind dann beide Polynome, und aus $\frac{\partial(x)}{\partial(x')} \cdot \frac{\partial(x')}{\partial(x)} = 1$ folgt, daß sowohl $\frac{\partial(x)}{\partial(x')}$ wie auch $\frac{\partial(x')}{\partial(x)}$ konstant ist.

Es entsteht die Frage, ob aus den Voraussetzungen: 1. die $x'_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n)$ sind Polynome in $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und 2. die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(x')}{\partial(x)}$ ist konstant schon folgt, daß auch die $x_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n)$ Polynome in $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ sind. Herr Keller [4] beantwortet diese Frage bei Hinzunahme einer weiteren Voraussetzung: 3. die $x_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n)$ sind rationale Funktionen von $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ oder 3'. die $x_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n)$ sind ganze Funktionen von $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$. Bei diesen drei Voraussetzungen ergibt sich, daß die $x_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n)$ Polynome in $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ sind. Wir wollen im folgenden für den Fall $n = 2$ zeigen, daß die Voraussetzungen 1. und 2. hinreichen, damit x_1 und x_2 Polynome in x_1, x_2 werden. Wegen der verwendeten Methode sei der Leser auf die Arbeiten von H. W. E. Jung verwiesen, insbesondere auf sein

Buch „Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen zweier Veränderlicher" [3].

§ 1. Wir wollen zeigen:

$g(x, y)$ und $h(x, y)$ seien zwei Polynome mit den Gradzahlen $[g] = (k, l)$ und $[h] = (m, n)$. Ferner sei die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x} \equiv c = \text{const} \neq 0. \tag{1.1}$$

Setzt man

$$x' = g(x, y), \quad y' = h(x, y), \tag{1.2}$$

so ergeben sich umgekehrt x und y als Polynome in x' und y'

$$x = g'(x', y'), \quad y = h'(x', y'). \tag{1.3}$$

Die Polynome $g(x, y)$ und $h(x, y)$ seien gegeben durch

$$g(x, y) = \sum_{\varkappa=0}^{k}\sum_{\lambda=0}^{l} g_{\varkappa\lambda}\, x^{\varkappa} y^{\lambda}, \quad h(x, y) = \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} h_{\mu\nu}\, x^{\mu} y^{\nu}. \tag{1.4}$$

Vermöge einer linearen Transformation

$$\begin{aligned} x &= a_{11}\,\tilde{x} + a_{12}\,\tilde{y} \\ y &= a_{21}\,\tilde{x} + a_{22}\,\tilde{y} \end{aligned}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1.5}$$

werden $g(x, y)$ und $h(x, y)$ übergeführt in

$$g(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{\varkappa=0}^{\tilde{k}}\sum_{\lambda=0}^{\tilde{k}} \tilde{g}_{\varkappa\lambda}\, \tilde{x}^{\varkappa} \tilde{y}^{\lambda}, \quad \tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{\mu=0}^{\tilde{m}}\sum_{\nu=0}^{\tilde{m}} \tilde{h}_{\mu\nu}\, \tilde{x}^{\mu} \tilde{y}^{\nu}. \tag{1.6}$$

Dabei ist $\tilde{k} = \operatorname{Max}\{\varkappa + \lambda\}$ bei $g_{\varkappa\lambda} \neq 0$ und $\tilde{m} = \operatorname{Max}\{\mu + \nu\}$ mit $h_{\mu\nu} \neq 0$. Ferner ist $\tilde{g}_{\varkappa\lambda} = 0$ für $\varkappa + \lambda > \tilde{k}$, $\tilde{g}_{\tilde{k}0} \neq 0$, $\tilde{g}_{0\tilde{k}} \neq 0$, $\tilde{h}_{\mu\nu} = 0$ für $\mu + \nu > \tilde{m}$, $\tilde{h}_{0\tilde{m}} \neq 0$, $h_{\tilde{m}0} \neq 0$. Durch geeignete Wahl von a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} läßt sich weiter erreichen, daß $\tilde{g}_{10} \neq 0$, $\tilde{g}_{01} \neq 0$, $\tilde{h}_{10} \neq 0$, $\tilde{h}_{01} \neq 0$ ist, da wegen (1.1) g_{10} und g_{01} wie auch h_{10} und h_{01} nicht gleichzeitig verschwinden können. Wir wollen noch $\tilde{g}_{00} = \tilde{h}_{00} = 0$ annehmen, was keine Einschränkung der Allgemeinheit ist. Im folgenden denken wir uns die Polynome $g(x, y)$ und $h(x, y)$ schon auf die Form (1.6) gebracht und lassen das Zeichen $\sim$ wieder weg.

Es sei

$$g(x, y) = \frac{\mathfrak{G}_0}{\mathfrak{L}^k\,\mathfrak{M}^k}, \quad h(x, y) = \frac{\mathfrak{H}_0}{\mathfrak{L}^m\,\mathfrak{M}^m}, \tag{1.7}$$

wo $\mathfrak{L}$ Nenner von x und $\mathfrak{M}$ Nenner von y ist. Wir betrachten die Divisorenscharen

$$\langle\mathfrak{G}\rangle : \mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 - x'\,\mathfrak{L}^k\,\mathfrak{M}^k, \quad \langle\mathfrak{H}\rangle : \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 - y'\,\mathfrak{L}^m\,\mathfrak{M}^m. \tag{1.8}$$

An einer Stelle $S(a, b)$ $(a \in K_0,\ b \in K_0)$ von R setzen wir

$$x - a = u, \quad y - b = v, \tag{1.9}$$

$$\mathfrak{G}(u, v) = g(a + u,\ b + v) - x', \quad \mathfrak{H}(u, v) = h(a + u,\ b + v) - y'.$$

Dabei sind $\mathfrak{G}(u, v)$ und $\mathfrak{H}(u, v)$ die den Divisoren $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{H}$ an der Stelle $S(a, b)$ zugeordneten Funktionen. An einer Stelle $S(\infty, b)$ ($b \in K_0$) von $\mathfrak{L}$ setzen wir

$$
(1.10)\quad \begin{gathered} x = u^{-1}, \quad y - b = v, \\ \mathfrak{G}(u, v) = u^k g(u^{-1}, b + v) - x' u^k, \quad \mathfrak{H}(u, v) = u^m h(u^{-1}, b + v) - y' u^m. \end{gathered}
$$

Ist $S(a, \infty)$ ($a \in K_0$) eine Stelle von $\mathfrak{M}$, so setzen wir

$$
(1.11)\quad \begin{gathered} x - a = u, \quad y = v^{-1} \\ \mathfrak{G}(u, v) = v^k g(a + u, v^{-1}) - x' v^k, \quad \mathfrak{H}(u, v) = v^m h(a + u, v^{-1}) - y' v^m. \end{gathered}
$$

Bei $S(\infty, \infty)$ setzen wir

$$
(1.12)\quad \begin{gathered} x = u^{-1}, \quad y = v^{-1}, \\ \mathfrak{G}(u, v) = u^k v^k g(u^{-1}, v^{-1}) - x' u^k v^k, \quad \mathfrak{H}(u, v) = u^m v^m h(u^{-1}, v^{-1}) - y' u^m v^m. \end{gathered}
$$

An einer Stelle $S(a, b)$ ($a \in K_0$, $b \in K_0$) können $\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial u}$ und $\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial v}$ wegen (1.1) nicht gleichzeitig verschwinden. Entsprechendes gilt für $\mathfrak{H}$, so daß

$$
(1.13)\quad \left(\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial u}, \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial v}\right)_{S(a,b)} = 0, \quad \left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial u}, \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial v}\right)_{S(a,b)} = 0.
$$

Da $g_{0k} \neq 0$, aber $g_{\varkappa k} = 0$, für $\varkappa > 0$ ist, so kann keine Stelle $S(a, \infty)$ feste Stelle von $\langle\mathfrak{G}\rangle$ sein. Wegen $g_{k0} \neq 0$, $g_{k\lambda} = 0$ für $\lambda > 0$ ist ebenso keine Stelle $S(\infty, b)$ für $\langle\mathfrak{G}\rangle$ fest. Weil auch unter den Stellen $S(a, b)$ keine festen Stellen sein können, bleibt nur $S(\infty, \infty)$ als feste Stelle von $\langle\mathfrak{G}\rangle$. Entsprechendes gilt von $\langle\mathfrak{H}\rangle$. An der Stelle $S(\infty, \infty)$ wird nach (1.12)

$$
(1.14)\quad \begin{aligned} \mathfrak{G}(u, v) &= \sum_{\lambda=0}^{k} \sum_{\varkappa=0}^{k-\lambda} g_{\varkappa\lambda} u^{k-\varkappa} v^{k-\lambda} - x' u^k v^k \\ &= g_{0k} u^k + (g_{1(k-1)} u^{k-1} + g_{0(k-1)} u^k) v + \cdots + (g_{k0} + \cdots - x' u^k) v^k. \end{aligned}
$$

Aus der Identität (1.1) wird für $x = u^{-1}$, $y = v^{-1}$, also an der Stelle $S(\infty, \infty)$

$$
(1.15)\quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathfrak{G}}{u^k v^k}\right) \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mathfrak{H}}{u^m v^m}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mathfrak{G}}{u^k v^k}\right) \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathfrak{H}}{u^m v^m}\right) = c\, u^{-2} v^{-2}.
$$

§ 2. Zur Untersuchung der festen Stelle $S(\infty, \infty)$ betrachten wir die Zeuthen-Segresche Invariante Z des Büschels $\langle\mathfrak{G}\rangle$. Diese Zahl Z ist für alle Divisorenbüschel $\langle\mathfrak{G}\rangle$ in einem algebraischen Funktionenkörper von zwei Veränderlichen x, y dieselbe. Im einfachsten Fall ist sie

$$
(2.1)\quad Z = \delta - 4q - N,
$$

wo δ die Anzahl der Divisoren mit Doppelpunkten, q das Geschlecht des allgemeinen Divisors und N die Anzahl der festen Stellen des Büschels ist. H. W. E. Jung zeigte [1], [3], wie δ und N zu definieren sind, wenn die Divisoren beliebige Singularitäten besitzen. Diese Definition sei hier wiederholt.

Enthalten die Divisoren

$$
(2.2)\quad \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_s
$$

aus $\langle\mathfrak{G}\rangle$ Primdivisoren mehrfach, so setzen wir

$$
(2.3)\quad \mathfrak{G}_\nu = \mathfrak{C}_\nu \mathfrak{G}'_\nu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, s,
$$

wo $\mathfrak{S}'_\nu$ jeden Primdivisor enthält, den $\mathfrak{S}_\nu$ enthält, aber nur einfach. Es sei dann

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 \ldots \mathfrak{S}_s. \tag{2.4}$$

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}$ den kanonischen Divisor von K in bezug auf x, y und mit $\mathfrak{G}_a$ den allgemeinen Divisor von $\langle\mathfrak{G}\rangle$, so wird gesetzt

$$\tau = \sum_{\nu=1}^{s} \{2(\mathfrak{G}_a, \mathfrak{S}_\nu) + (\mathfrak{S}_\nu, \mathfrak{K}) - (\mathfrak{S}_\nu, \mathfrak{S}_\nu)\}. \tag{2.5}$$

Ist S keine feste Stelle von $\langle\mathfrak{G}\rangle$, so sei

$$\delta_S = \left(\frac{\partial \mathfrak{G}'}{\partial u}, \frac{\partial \mathfrak{G}'}{\partial v}\right)_S, \tag{2.6}$$

wo $\mathfrak{G}'$ dieselben Primdivisoren wie $\mathfrak{G}$ enthält, aber jeden genau in erster Potenz. Da ein lineares Divisorenbüschel keine beweglichen mehrfachen Stellen enthalten kann, ist $\delta_S = 0$ für fast alle Stellen.

Ist S eine feste Stelle von $\langle\mathfrak{G}\rangle$, so setzen wir

$$\begin{aligned} \delta_S &= \sum_{\mathfrak{G}} \left\{\left(\frac{\partial \mathfrak{G}'}{\partial u}, \frac{\partial \mathfrak{G}'}{\partial v}\right)_S - \left(\frac{\partial \mathfrak{G}_a}{\partial u}, \frac{\partial \mathfrak{G}_a}{\partial v}\right)_S\right\} \\ &= \sum_{\mathfrak{G}} \{2\sigma_S(\mathfrak{G}') - \nu_S(\mathfrak{G}') - 2\sigma_S(\mathfrak{G}_a) + \nu_S(\mathfrak{G}_a)\}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

wo die Summation über alle Divisoren $\mathfrak{G}$ aus $\langle\mathfrak{G}\rangle$ zu erstrecken ist, die durch S gehen. Dabei bezeichnet $2\,\sigma_S(\mathfrak{G})$ den Beitrag der Stelle S zur Ordnung des Divisors der mehrfachen Stellen von $\mathfrak{G}$ und $\nu_S(\mathfrak{G})$ die Zahl der Zweige von $\mathfrak{G}$, die durch S gehen.

Die Zahl δ in der Definition der Zeuthen-Segreschen Invarianten ist dann

$$\delta = \tau + \sum_S \delta_S, \tag{2.8}$$

wo über alle Stellen von K zu summieren ist. Die Zahl N ist zu ersetzen durch

$$N = 2\sum_S \nu_S(\mathfrak{G}_a) - f = 2\,\nu(\mathfrak{G}_a) - f, \tag{2.9}$$

wo die Summe über alle festen Stellen von $\langle\mathfrak{G}\rangle$ zu erstrecken ist und f die Anzahl der festen Stellen bedeutet.

Wir wenden diese Definition auf das Divisorenbüschel $\langle\mathfrak{G}\rangle$ im Körper R an. Da wegen (1.13) keine Stelle $S(a, b)$ mehrfache Stelle eines Divisors sein kann, zerfallen nur solche Divisoren, die durch keine Stelle $S(a, b)$ gehen. Es ist das aber nur der dem Wert $x' = \infty$ entsprechende Divisor

$$\mathfrak{G}_\infty = \mathfrak{L}^k \mathfrak{M}^k. \tag{2.10}$$

Somit ist

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{L}^{k-1}\mathfrak{M}^{k-1}. \tag{2.11}$$

Der kanonische Divisor von R in bezug auf x, y ist bekanntlich

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{L}^{-2}\mathfrak{M}^{-2}, \tag{2.12}$$

und für den allgemeinen Divisor $\mathfrak{G}_a$ von $\langle\mathfrak{G}\rangle$ gilt

$$\mathfrak{G}_a \sim \mathfrak{G} \sim \mathfrak{L}^k \mathfrak{M}^k. \tag{2.13}$$

Damit wird die Zahl τ nach (2.5)

$$\tau = 2\,(\mathfrak{L}^k\,\mathfrak{M}^k, \mathfrak{L}^{k-1}\,\mathfrak{M}^{k-1}) + (\mathfrak{L}^{k-1}\mathfrak{M}^{k-1}, \mathfrak{L}^{-2}\mathfrak{M}^{-2}) - (\mathfrak{L}^{k-1}\mathfrak{M}^{k-1}, \mathfrak{L}^{k-1}\mathfrak{M}^{k-1})$$

$$(2.14)\qquad = 4\,k(k-1) - 4(k-1) - 2(k-1)^2$$
$$= 2(k-1)^2,$$

da für den Körper R bei der gewählten Stellendefinition $(\mathfrak{L}, \mathfrak{L}) = (\mathfrak{M}, \mathfrak{M}) = 0$ und $(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}) = 1$ ist.

Bezeichnen wir mit q das Geschlecht des allgemeinen Primdivisors $\mathfrak{G}_a$ von $\langle\mathfrak{G}\rangle$ und mit $2\,\sigma(\mathfrak{G}_a)$ die Ordnung des Divisors der mehrfachen Stellen von $\mathfrak{G}_a$, so gilt nach Jung

$$2\,q - 2 = (\mathfrak{G}_a, \mathfrak{G}_a\,\mathfrak{K}) - 2\,\sigma(\mathfrak{G}_a),$$
$$(2.15)\qquad 2\,q - 2 = 2\,k(k-2) - 2\,\sigma(\mathfrak{G}_a),$$
$$q = (k-1)^2 - \sigma(\mathfrak{G}_a).$$

Damit wird

$$(2.16)\qquad \tau = 2\,q + 2\,\sigma(\mathfrak{G}_a).$$

Da keine Stelle $S(a, b)$ in $\langle\mathfrak{G}\rangle$ fest ist, so gilt für einen durch $S(a, b)$ gehenden Divisor $\mathfrak{G}$, daß der Beitrag von S zu δ_S nach (2.6) und (1.13) gleich ist

$$(2.17)\qquad \delta_S = \left(\frac{\partial\mathfrak{G}'}{\partial u}, \frac{\partial\mathfrak{G}'}{\partial v}\right)_S = \left(\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial u}, \frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial v}\right)_S = 0.$$

Ein Divisor $\mathfrak{G}\,(x'$ endlich) geht durch keine Stelle $S(a, \infty)$, $S(\infty, b)$, so daß wir an diesen Stellen nur $\mathfrak{G}_\infty$ zu betrachten haben. An $S(a, \infty)$ ist aber

$$(2.18)\qquad \mathfrak{G}_\infty(u, v) = v^k, \quad \mathfrak{G}'_\infty(u, v) = v, \quad \left(\frac{\partial\mathfrak{G}'}{\partial u}, \frac{\partial\mathfrak{G}'}{\partial v}\right)_S = 0,$$

so daß für alle diese Stellen und entsprechend für die Stellen $S(\infty, b)$

$$(2.19)\qquad \delta_S = 0$$

ist. Für die feste Stelle $S(\infty, \infty)$ von $\langle\mathfrak{G}\rangle$ ist der Beitrag von S zu δ gleich

$$(2.20)\qquad \begin{aligned} \delta_S &= \sum_{\mathfrak{G}} \left\{\left(\frac{\partial\mathfrak{G}'}{\partial u}, \frac{\partial\mathfrak{G}'}{\partial v}\right)_S - \left(\frac{\partial\mathfrak{G}_a}{\partial u}, \frac{\partial\mathfrak{G}_a}{\partial v}\right)_S\right\} \\ &= \sum_{\mathfrak{G}} \{2\,(\sigma_S(\mathfrak{G}') - \sigma_S(\mathfrak{G}_a)) - (\nu_S(\mathfrak{G}') - \nu_S(\mathfrak{G}_a))\}, \end{aligned}$$

wobei die Summe über alle Divisoren zu erstrecken ist, die durch S gehen. Da $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}$ für alle Divisoren mit endlichem x' gilt, können nur die Divisoren $\mathfrak{G}$ einen Beitrag zu δ_S liefern, die in S eine Besonderheit haben. Wir zeigen im folgenden, daß nur der Divisor $\mathfrak{G}_\infty = \mathfrak{L}^k\mathfrak{M}^k$ eine Ausnahme macht. Dazu müssen wir nachweisen, daß

$$(2.21)\qquad 2\,\sigma_S(\mathfrak{G}) = 2\,\sigma_S(\mathfrak{G}_a), \quad \nu_S(\mathfrak{G}) = \nu_S(\mathfrak{G}_a)$$

für alle Divisoren mit endlichem x' gilt.

Aus $\mathfrak{G}\,(u, v) = 0$ (1.14) berechnen wir die Anfangsglieder der k Reihenentwicklungen $v = v_i(u)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ durch einen Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten und Exponenten

$$v_i(u) = e_{i1}\,u^{\varepsilon_{i1}} + e_{i2}\,u^{\varepsilon_{i2}} + \cdots, \quad \varepsilon_{i1} < \varepsilon_{i2} < \cdots, \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Dann ist

$$(2.22)\qquad \mathfrak{G}\,(u, v_i) = g_{0k}\,u^k + g_{1(k-1)}\,e_{i1}\,u^{k-1+\varepsilon_{i1}} + \cdots + g_{k0}\,e_{i1}^k\,u^{k\varepsilon_{i1}} + \cdots,$$

und es folgt

$$e_{i1}=1,\quad g_{0k}+g_{1(k-1)}e_{i1}+\cdots+g_{k0}e_{i1}^{k}=0.$$

e_{i1} hängt also nicht von x' ab.

Es sei

$$v_1(u)=e_{11}u^{\frac{\alpha}{\alpha}}+\cdots \tag{2.23}$$

eine dieser Entwicklungen, die nach Potenzen von $u^{\frac{1}{\alpha}}$ fortschreite. Mit den adjungierten Entwicklungen zusammen definiert (2.23) einen durch $S(\infty,\infty)$ gehenden Zweig (einen Primdivisor der Dimension 0) des allgemeinen Divisors von $\langle\mathfrak{G}\rangle$. Für spezielle Werte von x' können aus diesem Zweig nicht mehrere Zweige hervorgehen, da sonst der zugehörige Divisor zerfallen würde, was nur für $x'=\infty$ eintritt. Also ist $\nu_S(\mathfrak{G})=\nu_S(\mathfrak{G}_a)$.

Aus der Identität (1.15) wird für $v=v_1(u)$

$$\frac{\partial\mathfrak{G}(u,v_1)}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mathfrak{H}(u,v_1)}{u^m v_1^m}\right)-\frac{\partial\mathfrak{G}(u,v_1)}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathfrak{H}(u,v_1)}{u^m v_1^m}\right)\equiv c\,u^{k-2}\,v_1^{k-2}. \tag{2.24}$$

Ferner ist für $\mathfrak{G}(u,v)=0$

$$\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial u}du+\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial v}dv=0,$$

also

$$\frac{\partial\mathfrak{G}(u,v_1)}{\partial v}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mathfrak{H}(u,v_1)}{u^m v_1^m}\right)dv+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathfrak{H}(u,v_1)}{u^m v_1^m}\right)du\right]\equiv -c\,u^{k-2}\,v_1^{k-2}\,du$$

oder

$$\frac{\partial\mathfrak{G}(u,v_1)}{\partial v}\frac{d}{du}\left(\frac{\mathfrak{H}(u,v_1)}{u^m v_1^m}\right)\equiv -c\,u^{k-2}\,v_1^{k-2}. \tag{2.25}$$

Es sei

$$\frac{\partial\mathfrak{G}(u,v_1)}{\partial v}=\chi(x')\,u^{\frac{\eta}{\alpha}}+\cdots,\quad \frac{d}{du}\left(\frac{\mathfrak{H}(u,v_1)}{u^m v_1^m}\right)=-c\frac{e_{11}^{k-2}}{\chi(x')}\,u^{\frac{2k\alpha-\eta-4\alpha}{\alpha}}+\cdots \tag{2.26}$$

und damit

$$\mathfrak{H}(u,v_1)=-\frac{c\,e_{11}^{k+m-2}}{\chi(x')\,(2k\alpha-\eta-3\alpha)}\,u^{\frac{2\alpha(k+m)-\eta-3\alpha}{\alpha}}+\cdots. \tag{2.27}$$

$\eta-\alpha+1$ gibt den Beitrag des zu $v=v_1(u)$ gehörenden Primdivisors zur Ordnung des Divisors der mehrfachen Stellen von $\mathfrak{G}$ an. Diese kann für spezielle Werte von x' nur größer werden, so daß $\chi(x')$ nur für endlich viele Werte von x' verschwinden kann. Angenommen, es gäbe solche Werte x'_ν, daß $\chi(x'_\nu)=0$. Für einen solchen Wert müßte die Schnittmultiplizität von $\mathfrak{H}$ mit dem zu $v=v_1(u)$ gehörenden Zweig auch größer werden, was im Widerspruch zum Unendlichwerden des ersten Gliedes von $\mathfrak{H}(u,v_1)$ steht. Also ist $\chi(x')$ eine Konstante. Damit ist die Ordnung $2\,\sigma(\mathfrak{G})$ des Divisors der mehrfachen Stellen von $\mathfrak{G}$ für alle Divisoren gleich und (2.21) ist erfüllt für alle Divisoren $\mathfrak{G}$ mit endlichem x'.

Für $\mathfrak{G}_\infty$ wird an der Stelle $S(\infty,\infty)$

$$\begin{aligned}&\mathfrak{G}_\infty(u,v)=u^k v^k,\quad \mathfrak{G}'_\infty(u,v)=u\,v,\quad \left(\frac{\partial\mathfrak{G}'}{\partial u},\frac{\partial\mathfrak{G}'}{\partial v}\right)_S=1,\\ &\delta_S=1-2\,\sigma_S(\mathfrak{G}_a)+\nu_S(\mathfrak{G}_a)-1=-2\,\sigma_S(\mathfrak{G}_a)+\nu_S(\mathfrak{G}_a).\end{aligned} \tag{2.28}$$

Nun ist nach (2.8)

$$\delta = \tau + \sum_S \delta_S = 2\,q + 2\,\sigma(\mathfrak{G}_a) - 2\,\sigma(\mathfrak{G}_a) + \nu(\mathfrak{G}_a) \tag{2.29}$$

und mit $N = 2\,\nu(\mathfrak{G}_a) - f = 2\,\nu(\mathfrak{G}_a) - 1$

$$Z = \delta - 4\,q - N = -2\,q - 2\,\nu(\mathfrak{G}_a) + 1. \tag{2.30}$$

Für den Körper R ist bei der gewählten Stellendefinition bekanntlich $Z = 0$, also gilt

$$2\,q + \nu(\mathfrak{G}_a) = 1. \tag{2.31}$$

Wegen der Bedeutung der ganzen Zahlen q und $\nu(\mathfrak{G}_a)$ folgt

$$q = 0, \quad \nu(\mathfrak{G}_a) = 1. \tag{2.32}$$

Für die Divisoren $\mathfrak{H}$ von $\langle\mathfrak{H}\rangle$ gilt das gleiche. Die Divisorenbüschel $\langle\mathfrak{G}\rangle$ und $\langle\mathfrak{H}\rangle$ bestehen daher aus Primdivisoren des Geschlechts 0 und haben nur die feste Stelle $S(\infty, \infty)$. Die Gleichungen $\mathfrak{G}(u, v) = 0$ und $\mathfrak{H}(u, v) = 0$ ergeben bei $S(\infty, \infty)$ nur einen Zweig. Für die Divisoren der mehrfachen Stellen von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ bestehen die Gleichungen

$$2\,\sigma(\mathfrak{G}) = 2(k-1)^2, \quad 2\,\sigma(\mathfrak{H}) = 2(m-1)^2. \tag{2.33}$$

§ 3. Da sich aus $\mathfrak{G}(u, v) = 0$ bei $S(\infty, \infty)$ nur ein Zweig ergeben soll, ist nach (2.23)

$$v = v_1(u, x') = e_{11}\,u^{\frac{k}{k}} + e_{12}\,u^{\frac{k+1}{k}} + \cdots + e_{1\gamma}(x')\,u^{\frac{k+\gamma-1}{k}} + \cdots, \tag{3.1}$$

in der $e_{1\gamma}(x')$ der erste von x' abhängende Koeffizient sei (der charakteristische Koeffizient). Setzen wir

$$v = v^{(1)}(u, t) = e_{11}\,u^{\frac{k}{k}} + e_{12}\,u^{\frac{k+1}{k}} + \cdots + t\,u^{\frac{k+\gamma-1}{k}} \tag{3.2}$$

in $\mathfrak{G}(u, v)$ ein, so muß der Koeffizient der niedrigsten Potenz von u sowohl von t wie auch von x' abhängen. Da der Faktor von x' in $\mathfrak{G}(u, v)$ gleich $u^k v^k$ ist, so folgt

$$\mathfrak{G}(u, v^{(1)}(u, t)) = (\varphi_0(t) - x')\,u^{2k} + \cdots. \tag{3.3}$$

Wegen des identischen Verschwindens von $\mathfrak{G}(u, v_1)$ ist

$$\varphi_0(e_{1\gamma}(x')) - x' \equiv 0. \tag{3.4}$$

Ferner ergibt sich aus (3.3)

$$\mathfrak{G}(u, v_1(u, x'')) = \left(\varphi_0(e_{1\gamma}(x'')) - x'\right) u^{2k} + \cdots \tag{3.5}$$

und (3.1)

$$v_1(u, x'') - v_1(u, x') = (e_{1\gamma}(x'') - e_{1\gamma}(x'))\,u^{\frac{k+\gamma-1}{k}} + \cdots, \tag{3.6}$$

wo x'' so gewählt sei, daß $e_{1\gamma}(x'') - e_{1\gamma}(x') \neq 0$. Nun wird

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v}\,\mathfrak{G}(u, v_1(u, x')) &= \lim_{x'' \to x'} \frac{\mathfrak{G}(u, v_1(u, x'')) - \mathfrak{G}(u, v_1(u, x'))}{v_1(u, x'') - v_1(u, x')} \\ &= u^{2k - \frac{k+\gamma-1}{k}} \lim_{x'' \to x'} \frac{\varphi_0(e_{1\gamma}(x'')) - x'}{e_{1\gamma}(x'') - e_{1\gamma}(x')} + \cdots. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Wegen (3.4) ist

$$(3.8)\qquad \lim_{x''\to x'} \frac{\varphi_0(e_{1\gamma}(x''))-x'}{e_{1\gamma}(x'')-e_{1\gamma}(x')} = \lim_{x''\to x'} \frac{\varphi_0(e_{1\gamma}(x''))-\varphi_0(e_{1\gamma}(x'))}{e_{1\gamma}(x'')-e_{1\gamma}(x')} = \frac{\partial\varphi_0}{\partial t}(e_{1\gamma}(x')).$$

Nun kann $\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}(e_{1\gamma}(x'))$ nicht identisch Null sein, denn sonst wäre $t=e_{1\gamma}(x')$ Doppelwurzel von $\varphi_0(t)-x'=0$ und $\mathfrak{G}(u,v)=0$ hätte zwei Lösungen der Form (3.1), die in den ersten Gliedern einschließlich des ersten mit einem von x' abhängigen Koeffizienten übereinstimmen. Wie JUNG gezeigt hat [3], ist das aber nicht möglich. Da wir andererseits wissen, daß $\frac{\partial}{\partial v}\mathfrak{G}(u,v_1)$ mit einem von x' unabhängigen Glied beginnt, ist $\frac{\partial}{\partial t}\varphi_0(e_{1\gamma}(x'))=\text{const}$.

Weil $\mathfrak{G}$ nur bei $S(\infty,\infty)$ einen singulären Punkt hat und dort nur ein Primdivisor $\mathfrak{p}$ vorhanden ist, folgt, daß $\frac{\partial}{\partial v}\mathfrak{G}(u,v_1)$ durch die $(2k^2-k-\gamma+1)^{\text{te}}$ Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbar ist. Diese Funktion ist andererseits genau durch die $(2\sigma(\mathfrak{G})+k-1)^{\text{te}}$ Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbar. Also ist bei Berücksichtigung von (2.33)

$$2k^2-k-\gamma+1=2\sigma(\mathfrak{G})+k-1=2(k-1)^2+k-1,$$

$$(3.9)\qquad \gamma=2k.$$

$\frac{\partial}{\partial v}\mathfrak{G}(u,v_1)$ ist somit genau durch die $(2k^2-3k+1)^{\text{te}}$ Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbar. Damit wird in (2.26)

$$\eta=2k^2-3k+1$$

und in (2.27)

$$(3.10)\qquad \mathfrak{H}(u,v_1)=u^{\frac{1}{k}(2km-1)}\,\mathfrak{E}(u),\quad \mathfrak{E}(0)\neq 0.$$

Die Zahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}$ in $S(\infty,\infty)$ ist daher

$$(3.11)\qquad (\mathfrak{G},\mathfrak{H})_S=2km-1.$$

Da die Gesamtzahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{G}\sim\mathfrak{L}^k\mathfrak{M}^k$, $\mathfrak{H}\sim\mathfrak{L}^m\mathfrak{M}^m$ gleich $2km$ ist, haben die Divisoren der Divisorenbüschel $\langle\mathfrak{G}\rangle$ und $\langle\mathfrak{G}\rangle$ einen beweglichen Schnittpunkt. *Aus den Gleichungen* (1.2) *ergeben sich also x und y als rationale Funktionen von x' und y'.*

Es sei etwa

$$(3.12)\qquad x=\frac{g_0'(x',y')}{g_\infty'(x',y')},\qquad y=\frac{h_0'(x',y')}{h_\infty'(x',y')},$$

oder, wenn wir x und y in Primdivisoren von R' zerlegen,

$$(3.13)\qquad x=\frac{\mathfrak{G}_0'}{\mathfrak{G}_\infty'},\qquad y=\frac{\mathfrak{H}_0'}{\mathfrak{H}_\infty'}.$$

Die ausgezeichneten Primdivisoren 2. Art von R können nur an der festen Stelle $S(\infty,\infty)$ von $\langle\mathfrak{G}\rangle$ bzw. $\langle\mathfrak{H}\rangle$ liegen. Für $\langle\mathfrak{G}\rangle$ ergibt sich nur ein ausgezeichneter Primdivisor $\mathfrak{a}_1$, der durch $v=v^{(1)}(u,t)$ und $u\to 0$ (3.2) definiert wird. Er geht in den Primdivisor $\mathfrak{M}'$ von R' über, da für $\mathfrak{a}_1=0$ $x'=x'(t)$ und $y'=\infty$ wird. Analog findet man einen ausgezeichneten Primdivisor $\mathfrak{a}_2$ bei $\langle\mathfrak{H}\rangle$, der in $\mathfrak{L}'$ übergeht.

Bezeichnen wir allgemein mit $s(\mathfrak{A}')$ den Divisor der in $\mathfrak{A}'$ enthaltenen ausgezeichneten Primdivisoren 2. Art von R', so ist also

$$\mathfrak{a}_1 = \frac{\mathfrak{M}'}{s(\mathfrak{M}')}, \quad \mathfrak{a}_2 = \frac{\mathfrak{L}'}{s(\mathfrak{L}')} \tag{3.14}$$

und wegen (3.13)

$$\mathfrak{L} = \frac{\mathfrak{G}'_\infty}{s(\mathfrak{G}')}, \quad \mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{H}'_\infty}{s(\mathfrak{H}')}, \tag{3.15}$$

wo $\mathfrak{G}'$ bzw. $\mathfrak{H}'$ die allgemeinen Divisoren der Büschel $\mathfrak{G}'_0 - x\mathfrak{G}'_\infty$, $\mathfrak{H}'_0 - y\,\mathfrak{H}'_\infty$ sind. Wie aus der allgemeinen Theorie [3] folgt, ist der kanonische Divisor der $\mathfrak{a}_\nu$

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1^{4k-2}\,\mathfrak{a}_2^{4k-2}. \tag{3.16}$$

Nennen wir den kanonischen Divisor der ausgezeichneten Primdivisoren von R' noch $\mathfrak{a}'$, so gilt für eine Cremona-Transformation

$$\frac{\partial(x)}{\partial(x')} = \frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{L}'^2\,\mathfrak{M}'^2}{\mathfrak{a}'\,\mathfrak{L}^2\,\mathfrak{M}^2}. \tag{3.17}$$

Da $\frac{\partial(x)}{\partial(x')}$ eine Größe aus R' ist, können wir sie durch Primdivisoren 1. Art von R' darstellen. Mit (3.14), (3.15), (3.16) folgt dann

$$\frac{\partial(x)}{\partial(x')} = \frac{\mathfrak{L}'^{4k}\,\mathfrak{M}'^{4k}}{\mathfrak{G}'^2_\infty\,\mathfrak{H}'^2_\infty}. \tag{3.18}$$

Wegen der konstanten Funktionaldeterminante ergibt sich daraus, daß $\mathfrak{G}'_\infty$ und $\mathfrak{H}'_\infty$ nur durch $\mathfrak{L}'$ bzw. $\mathfrak{M}'$ teilbar sind, d. h. daß auch x und y Polynome in x' und y' werden.

Literatur.

[1] H. W. E. Jung: Über die Zeuthen-Segresche Invariante. Rend. circ. mat. Palermo 34, 225—277 (1912). — [2] H. W. E. Jung: Über ganze birationale Transformationen der Ebene. J. reine angew. Math. 184, 161—174 (1942). — [3] H. W. E. Jung: Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen zweier Veränderlicher. Berlin: Akademie-Verlag 1951. — [4] O.-H. Keller: Ganze Cremona-Transformationen. Mh. Math. Phys. 47, 299—306 (1939).

(Eingegangen am 28. März 1955.)

Nöbeling, G. und H. Bauer
Math. Annalen, Bd. 130, S. 20—45 (1955).

Über die Erweiterungen topologischer Räume.

Von

Georg Nöbeling und Heinz Bauer in Erlangen.

Die Vielfalt und Verschiedenartigkeit der Erweiterungen eines topologischen Raumes E legt den Wunsch nach einem systematischen Überblick nahe. In der vorliegenden Arbeit geben wir einen solchen Überblick durch eine Einteilung der Erweiterungen in Klassen $\mathfrak{C}E$ (dabei legen wir einen allgemeineren Erweiterungsbegriff zugrunde als üblich). Die Haupteigenschaften dieser Klassen $\mathfrak{C}E$ sind die folgenden: 1. sind $\varepsilon_1 E$ und $\varepsilon_2 E$ zwei Erweiterungen von E aus derselben Klasse $\mathfrak{C}E$, so kann jede beschränkte, stetige, reelle Funktion $f \mid E$, die auf $\varepsilon_1 E$ stetig fortsetzbar ist, auch auf $\varepsilon_2 E$ stetig fortgesetzt werden; 2. in jeder Klasse $\mathfrak{C}E$ existiert genau eine Standarderweiterung $\beta_{\mathfrak{C}} E$ von E, welche bikompakt und vollständig regulär ist und in welcher die Punkte von $\beta_{\mathfrak{C}} E - E$ abgeschlossen sind; 3. jede Erweiterung aus $\mathfrak{C}E$ läßt sich stetig in $\beta_{\mathfrak{C}} E$ abbilden (derart, daß jeder Punkt von E auf sich abgebildet wird); 4. die Standarderweiterung $\beta_{\mathfrak{C}_0} E$ aus der Hauptklasse $\mathfrak{C}_0 E$ (d. h. der Erweiterungsklasse, in welcher E selbst liegt), ist die Čechsche Erweiterung $\beta\, E$ im üblichen Sinne, wenn E ein vollständig regulärer T_1-Raum ist. Die Standarderweiterungen $\beta_{\mathfrak{C}} E$ können daher als verallgemeinerte Čechsche Erweiterungen betrachtet werden.

Unsere Klasseneinteilung ist eine Fortführung der von I. Gelfand und G. Šilov [7] angegebenen Kennzeichnung der bikompakten, normalen T_1-Erweiterungen eines vollständig regulären T_1-Raumes E durch gewisse Funktionenringe auf E.

§ 1. F-Algebren und ihre Darstellungen.

Unter einer *F-Algebra* $\mathfrak{A}$ verstehen wir im folgenden stets eine Algebra $\mathfrak{A}$ (= hyperkomplexes System) über dem Körper R der reellen Zahlen λ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\mathfrak{A}$ besitzt eine Einheit e[1]);

(2) für die Elemente a von $\mathfrak{A}$ ist eine (reelle) Norm $\|a\|$ erklärt, bezüglich welcher $\mathfrak{A}$ eine Banach-Algebra ist, d. h. es gilt

(2a) $\|a\| \geqq 0$; (2b) $\|a\| = 0 \leftrightarrow a = 0$;

(2c) $\|a + b\| \leqq \|a\| + \|b\|$; (2d) $\|\lambda\, a\| = |\lambda| \cdot \|a\|$;

(2e) $\mathfrak{A}$ ist vollständig bezüglich der Metrik $\delta(a, b) = \|a - b\|$;

(2f) $\|a \cdot b\| \leqq \|a\| \cdot \|b\|$;

(3) $\|a^2\| = \|a\|^2$.

[1]) Im Trivialfall $e = 0$ besteht $\mathfrak{A}$ nur aus dem Nullelement 0. Wir setzen daher stets $e \neq 0$ voraus.

Beispiele. Die Norm einer beschränkten, reellen Funktion $f \mid E$ sei hier und im folgenden stets definiert als die Zahl

(4) $$\|f\| = \sup(|fp|;\ p \in E)$$ [2].

1. Es sei E eine nichtleere Menge. $\mathfrak{A}$ sei eine Menge von beschränkten, reellen Funktionen $f \mid E$ mit folgenden Eigenschaften:

(5) jede konstante, reelle Funktion λ auf E ist in $\mathfrak{A}$ enthalten;

(6) $\mathfrak{A}$ ist ein Ring[3]);

(7) ist die reelle Funktion $f \mid E$ der Limes einer gleichmäßig konvergenten Folge von Funktionen aus $\mathfrak{A}$, so liegt f in $\mathfrak{A}$.

Aus (5) bis (7) ergeben sich folgende weitere Eigenschaften von $\mathfrak{A}$:

(8) ist f eine Funktion aus $\mathfrak{A}$ und $x_0 \leqq fp \leqq x_1$ für alle $p \in E$, ist weiter g eine stetige, reelle Funktion mit dem Definitionsbereich $x_0 \leqq x \leqq x_1$, so ist $gf \mid E$ eine Funktion aus $\mathfrak{A}$.

Denn ist ein $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben, so existiert nach Weierstrass ein Polynom P mit $|Px - gx| < \varepsilon$ für jedes x mit $x_0 \leqq x \leqq x_1$; für jedes $p \in E$ gilt dann $|Pfp - gfp| < \varepsilon$. Nun ist Pf eine Funktion aus $\mathfrak{A}$ wegen (5) und (6). Also ist auch gf eine Funktion aus $\mathfrak{A}$ wegen (7).

Aus (8) folgt insbesondere:

(9a) ist f eine Funktion aus $\mathfrak{A}$, so auch $|f|$.

Hieraus und aus den Gleichungen $\max(f_1, f_2) = \frac{1}{2}(f_1 + f_2 + |f_1 - f_2|)$ und $\min(f_1, f_2) = -\max(-f_1, -f_2)$ folgt:

(9b) sind $f_1, \ldots, f_n$ endlich viele Funktionen aus $\mathfrak{A}$, so sind auch $\max(f_1, \ldots, f_n)$ und $\min(f_1, \ldots, f_n)$ Funktionen aus $\mathfrak{A}$.

2. Es sei E ein topologischer Raum und $\mathfrak{A}$ die Menge $\mathfrak{C}\,E$ aller *beschränkten*, stetigen, reellen Funktionen $f \mid E$. — **3.** Es sei E ein uniformer Raum und $\mathfrak{A}$ die Menge $\mathfrak{C}_g E$ aller beschränkten, gleichmäßig stetigen, reellen Funktionen $f \mid E$. — **4.** Es sei E die Zahlengerade und $\mathfrak{A}$ die Menge aller periodischen, stetigen, reellen Funktionen $f \mid E$ mit derselben Periode. — **5.** Es sei E die Zahlengerade und $\mathfrak{A}$ die Menge aller fastperiodischen, stetigen, reellen Funktionen $f \mid E$.

Wir nennen einen Isomorphismus[4]) Φ einer F-Algebra $\mathfrak{A}$ auf eine F-Algebra $\mathfrak{A}'$ *isometrisch*, wenn

$$\|a\| = \|\Phi a\| \qquad (a \in \mathfrak{A}) \tag{10}$$

ist.

Es gilt folgender Satz von I. Gelfand [6][5]), der für uns von grundlegender Bedeutung ist:

---

[2]) Statt $f(p)$ schreiben wir fp (weiter unten statt $\mathfrak{C}(E)$, $E_e(\mathfrak{A})$, ... analog $\mathfrak{C}\,E$, $E_e\mathfrak{A}$, ...).

[3]) Die Summe $f + g$ und das Produkt $f \cdot g$ zweier Funktionen f und g seien stets wie üblich definiert. (Im Gegensatz zum Produkt $f \cdot g$ bezeichnen wir mit fg die durch $(fg)\,p = f(gp)$ definierte zusammengesetzte Funktion.)

[4]) Eine Abbildung Φ einer F-Algebra $\mathfrak{A}$ in eine F-Algebra $\mathfrak{A}'$ (oder allgemeiner einer beliebigen Algebra $\mathfrak{A}$ in eine zweite $\mathfrak{A}'$) heißt ein *Homomorphismus*, wenn gilt: α) $\Phi(a + b) = \Phi a + \Phi b$; β) $\Phi(a \cdot b) = (\Phi a) \cdot (\Phi b)$; γ) $\Phi(\lambda a) = \lambda(\Phi a)$ für alle $a, b \in \mathfrak{A}$, $\lambda \in R$. Ist Φ eineindeutig, so heißt Φ ein Isomorphismus. Sind wenigstens α) und β) erfüllt, so sprechen wir von einem *Ring*-Homomorphismus bzw. einem Ring-Isomorphismus.

[5]) Vgl. [9], S. 54ff.

Satz 1. *Zu jeder F-Algebra $\mathfrak{A}$ existiert ein bikompakter* Hausdorff-*Raum $E_0 = E_0\mathfrak{A}$ derart, daß $\mathfrak{A}$ isometrisch-isomorph ist zur F-Algebra $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{C}E_0$ aller stetigen, reellen Funktionen $f_0|E_0$*[6]).

Wir behaupten, daß wir in diesem Satz ohne Änderung seines Gehalts die Worte „isometrisch-isomorph" durch das Wort „isomorph" ersetzen können, oder allgemeiner, daß jeder Isomorphismus einer F-Algebra $\mathfrak{A}$ auf eine F-Algebra $\mathfrak{A}'$ isometrisch ist. Noch allgemeiner behaupten wir:

Lemma 1a. *Jeder Ring-Homomorphismus bzw. Ring-Isomorphismus einer F-Algebra $\mathfrak{A}$ auf eine F-Algebra $\mathfrak{A}'$ ist ein die Norm vermindernder Homomorphismus bzw. isometrischer Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}'$*[7]).

Nach dem Satz 1 genügt es zum Beweis dieses Lemmas, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ vorauszusetzen als F-Algebren, bestehend aus beschränkten, reellen Funktionen auf Mengen E und E' mit den Eigenschaften (5) bis (7). Also ist das Lemma 1a bewiesen mit der folgenden allgemeineren Behauptung:

Lemma 1b. *Es sei $\mathfrak{A}$ eine F-Algebra von beschränkten, reellen Funktionen auf einer Menge E, einschließlich der konstanten Funktion* 1. *Weiter sei $\mathfrak{A}'$ ein Ring von reellen Funktionen auf einer Menge E', einschließlich der konstanten Funktion* 1. *Schließlich sei Φ ein Ring-Homomorphismus bzw. ein Ring-Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}'$. Dann ist $\mathfrak{A}'$ eine Algebra von beschränkten Funktionen und Φ ein Homomorphismus bzw. ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}'$; insbesondere gilt*

$$\Phi\lambda = \lambda \tag{11}$$

für jede konstante Funktion λ auf E bzw. E'. Für jedes $f \in \mathfrak{A}$ gilt

$$|\Phi f| = \Phi|f| \tag{12}$$

---

[6]) Als *Topologie* einer Menge E bezeichnen wir eine Abbildung h, die jeder Menge $A \subseteq E$ eine Menge $hA \subseteq E$ als abgeschlossene Hülle derart zuordnet, daß gilt: $A \subseteq hA$; $hhA = hA$; $h(A_1 \cup A_2) = hA_1 \cup hA_2$; $h\Theta = \Theta$ (Θ die leere Menge). Die abgeschlossene Hülle einer nur aus einem einzigen Punkt p bestehenden Menge bezeichnen wir mit hp und nennen sie die abgeschlossene Hülle von p. Eine Menge E mit einer Topologie h heißt ein topologischer Raum oder kurz ein Raum. Sind in E zwei Topologien h und h' definiert mit $h'A \subseteq hA$ für jede Menge $A \subseteq E$, so heißt h gröber als h', in Zeichen $h' \leqq h$. — *Trennungsaxiome:* T_1. Zu je zwei verschiedenen Punkten p und q existiert eine offene Menge U mit $p \in U$ und $q \notin U$. — T_2. Zu je zwei verschiedenen Punkten p und q existieren zwei offene Menge U und V mit $p \in U$, $q \in V$ und $U \cap V = \Theta$. — T_3. Zu jedem Punkt p und jeder abgeschlossenen Menge B mit $p \notin B$ existieren zwei offene Mengen U und V mit $p \in U$, $B \subseteq V$ und $U \cap V = \Theta$. — T_{3a}. Zu jedem Punkt q und jeder abgeschlossenen Menge A mit $q \notin A$ existiert eine stetige, reelle Funktion $f \mid E$ mit $fq = 1$ und $fA = 0$ (d. h. $fp = 0$ für jedes $p \in A$). — T_4. Zu je zwei abgeschlossenen Mengen A und B mit $A \cap B = \Theta$ existieren zwei offene Mengen U und V mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ und $U \cap V = \Theta$. — Wir nennen einen Raum E einen T_1-Raum, Hausdorffsch, regulär, vollständig regulär, normal, wenn seine Topologie bzw. dem Axiom $T_1, \ldots, T_4$ genügt; entsprechend nennen wir die Topologie eine T_1-Topologie, Hausdorffsch, ..., normal. — Jeder bikompakte Hausdorff-Raum ist normal.

[7]) Nach dem Lemma 1a sind für F-Algebren die drei Begriffe Ring-Homomorphismus, Homomorphismus und Norm-vermindernder Homomorphismus äquivalent und ebenso die drei Begriffe Ring-Isomorphismus, Isomorphismus und isometrischer Isomorphismus.— Aus dem Lemma 1a folgt u. a., daß man in einer Algebra mit Einselement auf höchstens eine Weise eine Norm mit den Eigenschaften (2) und (3) einführen kann.

und

$$(13) \qquad \|\Phi f\| \leqq \|f\|.$$

Ist Φ ein Isomorphismus, so ist mit $\mathfrak{A}$ auch $\mathfrak{A}'$ eine F-Algebra und Φ isometrisch[8]).

Beweis. 1. Es sei $f \in \Phi^{-1} 1$. Aus $1 \cdot f = f$ folgt dann $\Phi 1 = 1$.

2. Ist p' ein beliebiger Punkt von E', so ist $\lambda \to (\Phi\lambda)\, p'$ eine Abbildung $F = F_{p'}$ der reellen Zahlen in sich mit folgenden Eigenschaften: $F(\lambda + \mu) = F\lambda + F\mu$, $F(\lambda \cdot \mu) = (F\lambda) \cdot (F\mu)$, aus $\lambda \neq 0$ folgt $F\lambda \neq 0$. Letztere Eigenschaft folgt aus $1 = \Phi 1 = \Phi\left(\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}\right) = (\Phi\lambda) \cdot \left(\Phi \frac{1}{\lambda}\right)$. Da es im Körper der reellen Zahlen nur den trivialen Automorphismus gibt, folgt $F\lambda = \lambda$ für jedes λ. Somit ist $(\Phi\lambda)\, p' = \lambda$ für jede konstante Funktion $\lambda \in \mathfrak{A}$ und jeden Punkt $p' \in E'$. Also gilt (11) und $\mathfrak{A}'$ enthält die konstanten Funktionen. Folglich ist $\mathfrak{A}'$ eine Algebra und Φ ein Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}'$.

3. Ist $f \geqq 0$ eine Funktion aus $\mathfrak{A}$, so auch $g = |\sqrt{f}|$ nach (8). Wegen $f = g^2$ folgt dann $\Phi f = (\Phi g)^2 \geqq 0$.

4. Für jedes $f \in \mathfrak{A}$ gilt $|f| \in \mathfrak{A}$ nach (9a) und $|f|^2 = f^2$. Somit erhalten wir $(\Phi\,|f|)^2 = (\Phi f)^2$ und hieraus (12), da $\Phi\,|f| \geqq 0$ ist nach 3.

5. Aus $-\|f\| \leqq f \leqq \|f\|$ folgt $-\|f\| \leqq \Phi f \leqq \|f\|$ nach 2. und 3. Daher sind die Funktionen aus $\mathfrak{A}'$ sämtlich beschränkt und es gilt (13).

6. Nunmehr werde Φ als Ring-Isomorphismus vorausgesetzt. In Ergänzung zu 3. können wir dann zeigen, daß aus $\Phi f \geqq 0$ folgt $f \geqq 0$. Nach (12) ist nämlich $\Phi f = \Phi\,|f|$; hieraus folgt $f = |f| \geqq 0$ wegen der Eineindeutigkeit von Φ. Aus $-\|\Phi f\| \leqq \Phi f \leqq \|\Phi f\|$ folgt jetzt auch umgekehrt $-\|\Phi f\| \leqq f \leqq \|\Phi f\|$. Also ist $\|\Phi f\| = \|f\|$ und deswegen $\mathfrak{A}'$ abgeschlossen bezüglich gleichmäßiger Konvergenz. Somit ist auch $\mathfrak{A}'$ eine F-Algebra.

Eine (F-)Algebra $\mathfrak{A}'$, deren Elemente beschränkte, reelle Funktionen f auf einer festen Menge E sind (und in welcher Summe und Produkt die übliche Bedeutung haben und die Norm durch (4) definiert ist), nennen wir eine (F-)Algebra *auf* E. Ist E speziell ein topologischer Raum und sind die Funktionen $f \in \mathfrak{A}'$ stetig, so nennen wir $\mathfrak{A}'$ eine *stetige* (F-)Algebra auf E.

Ist $\mathfrak{A}$ eine beliebige F-Algebra und X ein Homomorphismus bzw. ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf eine Algebra $\mathfrak{A}'$ auf einer Menge E, so nennen wir $\mathfrak{A}' = X\mathfrak{A}$ eine *Darstellung* bzw. *isomorphe* Darstellung von $\mathfrak{A}$ auf E. Ist dabei speziell E ein topologischer Raum und $\mathfrak{A}'$ stetig, so nennen wir $\mathfrak{A}' = X\mathfrak{A}$ eine *stetige* Darstellung bzw. eine stetige, isomorphe Darstellung von $\mathfrak{A}$ auf dem Raum E.

Nach dem Satz 1 existiert zu jeder F-Algebra $\mathfrak{A}$ eine stetige, isomorphe Darstellung auf einem topologischen Raum. Wir stellen uns die Aufgabe, *alle* Darstellungen von $\mathfrak{A}$ auf Mengen E zu finden.

Ist $X\mathfrak{A}$ eine Darstellung von $\mathfrak{A}$ auf einer Menge E, so ist die Funktion Xe in jedem Punkt p von E gleich 1 oder 0. Es sei E' die Menge aller $p \in E$, in denen Xe gleich 1, und E'' die Menge aller $p \in E$, in denen Xe gleich 0 ist.

[8]) Einen isometrischen Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}'$ mit der Eigenschaft (12) nennt M. H. Stone [11], S. 456 einen analytischen Isomorphismus. Lemma 1b besagt also, daß jeder Ring-Isomorphismus bereits ein analytischer Isomorphismus ist.

Dann ist $X\,a$ auf E'' identisch 0 für jedes $a \in \mathfrak{A}$. Nach Weglassen der Menge E'', auf der die Darstellung trivial ist, verbleibt, sofern $E'' \neq E$ ist, eine Darstellung $X'\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{A}$ mit der Eigenschaft $X'e = 1$ (d. h. $X'e$ ist die konstante Funktion 1) und es genügt daher, alle Darstellungen von $\mathfrak{A}$ mit dieser Eigenschaft zu bestimmen.

Es genügt weiter, nur nach stetigen Darstellungen $\mathfrak{A}' = X\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{A}$ mit $Xe = 1$ zu fragen. Ist nämlich $\mathfrak{A}'$ eine Algebra auf E, welche die konstanten Funktionen auf E enthält, so bedeutet es keine Beschränkung der Allgemeinheit anzunehmen, daß E ein topologischer Raum ist und alle Funktionen aus $\mathfrak{A}'$ stetig sind; z. B. kann E mit der diskreten Topologie versehen werden. Ist $\mathfrak{A}'$ speziell eine F-Algebra auf E, so behaupten wir genauer folgendes

Lemma 2. *Es sei E eine nichtleere Menge und $\mathfrak{A}$ eine F-Algebra auf E, einschließlich der konstanten Funktion* 1. *Dann existiert eine Topologie $h = h_{\mathfrak{A}}$ von E mit folgenden Eigenschaften*:

(14) *h ist die gröbste Topologie von E, bezüglich welcher jede Funktion f aus $\mathfrak{A}$ stetig ist*;

(15) *h ist vollständig regulär, und zwar existiert speziell in $\mathfrak{A}$ für jede (bezüglich h) abgeschlossene Menge $A \subseteq E$ und jeden Punkt q von E mit $q \notin A$ eine Funktion f mit $fA = 0$ und $fq = 1$*;

(16) *für jeden Punkt $p \in E$ ist hp die Menge $[p]$ aller Punkte q von E mit $fq = fp$ für alle Funktionen f aus $\mathfrak{A}$.*

Beweis. Für jede Menge $A \subseteq E$ definieren wir hA als die Menge aller $q \in E$ mit $f^*q = 0$ für alle $f^* \in \mathfrak{A}$ mit $f^*A = 0$. Man zeigt mühelos, daß hiermit in E eine Topologie definiert ist, die die Eigenschaften (15) und (16) hat. Wir behaupten, daß jede Funktion $f \in \mathfrak{A}$ bezüglich der Topologie h stetig ist. Es sei also f eine beliebige Funktion aus $\mathfrak{A}$, A eine Teilmenge von E und q ein Punkt von E. Zu zeigen ist, daß aus $fq \notin \overline{fA}$ (wobei f als Abbildung in die Zahlengerade Z aufgefaßt ist und der Querstrich die abgeschlossene Hülle in Z bedeutet) folgt $q \notin hA$. Da Z vollständig regulär und $fq \notin \overline{fA}$ ist, existiert eine stetige, reelle Funktion $g|Z$ mit $gx = 0$ für jedes $x \in fA$ und $gx = 1$ für $x = fq$. Die Funktion $f^* = gf$ liegt nach (8) in $\mathfrak{A}$ und es ist $f^*p = 0$ für jeden Punkt $p \in A$ und $f^*q = 1$. Also gilt $q \notin hA$ gemäß der Definition von h. Folglich ist jede Funktion $f \in \mathfrak{A}$ stetig bezüglich der Topologie h. Daß $h' \leqq h$ gilt für jede Topologie h' von E, bezüglich welcher alle Funktionen $f \in \mathfrak{A}$ stetig sind, folgt unmittelbar aus der Definition von h. Es gilt also auch (14).

Nun existiert nach dem Satz 1 wenigstens eine stetige, isomorphe Darstellung $X_0\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{A}$ auf einem bikompakten Hausdorff-Raum $E_0 = E_0\mathfrak{A}$. Daher werden alle übrigen stetigen Darstellungen von $\mathfrak{A}$ auf topologischen Räumen durch folgenden Satz 2 geliefert. Denn aus diesem Satz folgt, daß sich jede stetige Darstellung $\mathfrak{A}' = X\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{A}$ auf einem topologischen Raum E mit $Xe = 1$ in der Form $\mathfrak{A}' = \Phi X_0\mathfrak{A}$ darstellen läßt, wobei Φ der durch eine stetige Abbildung φ von E in E_0 mittels (17) definierte Homomorphismus ist.

Satz 2. *Es sei E ein topologischer Raum und E_0 ein bikompakter* Hausdorff-*Raum. Dann existiert zu jedem Homomorphismus Φ von $\mathfrak{C}E_0$ in $\mathfrak{C}E$ mit $\Phi 1 = 1$*

genau eine stetige Abbildung φ *von* E *in* E_0 *mit*

$$(17)\qquad f_0(\varphi p) = (\Phi f_0)p \qquad (p \in E,\ f_0 \in \mathfrak{C} E_0)^{9)}$$

und umgekehrt zu jeder stetigen Abbildung φ *von* E *in* E_0 *genau ein Homomorphismus* Φ *von* $\mathfrak{C}E_0$ *in* $\mathfrak{C} E$ *mit* $\Phi\,1 = 1$ *derart, daß* (17) *gilt. Ist* Φ *ein Isomorphismus von* $\mathfrak{C}E_0$ *in* $\mathfrak{C}E$ *mit* $\Phi\,1 = 1$, *so ist* $\varphi\,E$ *dicht in* E_0 *und umgekehrt.*

Zusatz. *Ist* E_0 *nur bikompakt und vollständig regulär, so bleibt der Satz richtig mit folgender Einschränkung: die zu* Φ *existierende Abbildung* φ *ist im allgemeinen nicht mehr eindeutig bestimmt. Vielmehr gewinnt man aus einer Abbildung* φ, *für welche* (17) *gilt, jede weitere* φ' *mit der gleichen Eigenschaft, indem man* $\varphi' p$ *beliebig in der Hülle des Punktes* $\varphi\,p$ *in* E_0 *wählt. Ist* Φ *ein Isomorphismus, so ist* $\varphi' E$ *dicht in* E_0 *auch für jede derartige Abbildung* φ'.

Beweis. Um den Zusatz gleich mitbeweisen zu können, werde E_0 nur als bikompakt und vollständig regulär vorausgesetzt.

Es sei $\Phi\,\mathfrak{C}\,E_0 = \mathfrak{A}$ gesetzt. Für jeden Punkt $p \in E$ ist die Menge $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_p$ aller $f \in \mathfrak{A}$ mit $fp = 0$ ein Ideal in $\mathfrak{A}$; es ist maximal: denn ist g eine nicht in $\mathfrak{M}$ liegende Funktion aus $\mathfrak{A}$, so ist $gp = \lambda \neq 0$, die Funktion $f = 1 - \frac{1}{\lambda} g$ also ein Element von $\mathfrak{M}$; das durch $\mathfrak{M}$ und g in $\mathfrak{A}$ erzeugte Ideal enthält also die konstante Funktion 1 und ist folglich gleich $\mathfrak{A}$. Die Menge $\mathfrak{N}_0 = \Phi^{-1}\mathfrak{M}$ ist ein maximales Ideal in $\mathfrak{C}\,E_0$. Wir behaupten, daß die Menge $A = A_p$ aller Punkte $p_0 \in E_0$, für welche $\mathfrak{N}_0$ die Menge aller $f_0 \in \mathfrak{C}\,E_0$ mit $f_0 p_0 = 0$ ist, nicht leer ist. Erstens gibt es nämlich mindestens einen Punkt $p_0 \in E_0$ mit $f_0 p_0 = 0$ für jedes $f_0 \in \mathfrak{N}_0$. Andernfalls gäbe es nämlich zu jedem $p_0 \in E_0$ eine Umgebung U_{p_0}, ein $\varepsilon_{p_0} > 0$ und eine Funktion $f_0^{p_0} \in \mathfrak{N}_0$ mit $|f_0^{p_0} q_0| \geqq \varepsilon_{p_0}$ für jeden Punkt $q_0 \in U_{p_0}$. Da E_0 bikompakt ist, genügen zur Überdeckung von E_0 endlich viele der Umgebungen U_{p_0}, etwa $U_{p_1}, \ldots, U_{p_n}$. Die Quadratensumme f_0 der $f_0^{p_\nu}$ liegt in $\mathfrak{N}_0$; außerdem hat f_0 eine positive untere Schranke. Folglich liegt $\frac{1}{f_0}$ in $\mathfrak{C}E_0$, also die konstante Funktion $1 = f_0 \cdot \frac{1}{f_0}$ in $\mathfrak{N}_0$, was falsch ist. Zweitens enthält das Ideal $\mathfrak{N}_0$ alle $f_0 \in \mathfrak{C}E_0$ mit $f_0 p_0 = 0$, da es maximal ist. Damit ist die Existenz mindestens eines Punktes $p_0 \in A$ bewiesen.

Wenn zu $p \in E$ überhaupt ein Punkt $p_0 = \varphi\,p$ existiert derart, daß (17) gilt, so muß p_0 ein Punkt von A sein. Die Menge A ist aber gleich der Hülle $h\,p_0$ eines jeden ihrer Punkte. Aus $q_0 \in h\,p_0$ folgt nämlich $f_0 q_0 = f_0 p_0$ für jedes $f_0 \in \mathfrak{C}E_0$. Aus $q_0 \notin h\,p_0$ folgt dagegen wegen der vollständigen Regularität von E_0 die Existenz einer Funktion $f_0 \in \mathfrak{C}E_0$ mit $f_0 q_0 = 1$ und $f_0(h\,p_0) = 0$; es ist also $f_0 \in \mathfrak{N}_0$, aber $f_0 q_0 \neq 0$.

Wir wählen nun einen beliebigen Punkt $p_0 \in A_p$ aus und ordnen ihn dem Punkt $p \in E$ als Bild $\varphi\,p$ zu. Dann gilt (17); denn es sei $(\Phi f_0)p = \lambda$, also $\Phi f_0 - \lambda \in \mathfrak{M}$. Nach (11) ist nun $\Phi\,\lambda = \lambda$, also $\Phi f_0 - \lambda = \Phi(f_0 - \lambda)$; folglich ist $f_0 - \lambda \in \mathfrak{N}_0$ und daher $f_0 p_0 = \lambda$. Schließlich ist φ stetig. Denn es sei p ein Punkt von E, $p_0 = \varphi\,p$ sein Bild in E_0 und U_0 eine Umgebung von p_0; da E_0 vollständig regulär ist, existiert ein $f_0 \in \mathfrak{C}E_0$ mit $f_0 p_0 = 0$ und $f_0(E_0 - U_0) = 1$.

[9]) M. a. W.: Entsprechende Funktionen f und f_0 aus $\mathfrak{C}\,E$ und $\mathfrak{C}\,E_0$ nehmen in entsprechenden Punkten aus E und E_0 denselben Wert an.

Für $f = \Phi f_0$ ist $fp = 0$ nach (17); wegen der Stetigkeit von f existiert eine Umgebung U von p mit $fq \neq 1$ für alle $q \in U$; wegen (17) ist dann $f_0 q_0 \neq 1$ für alle $q_0 \in \varphi\, U$, also ist $\varphi\, U \subseteq U_0$.

(Ist E_0 bikompakt und HAUSDORFFsch, so ist jeder Punkt von E_0 abgeschlossen, also A_p für jedes $p \in E$ einpunktig. Folglich ist die Abbildung φ dann eindeutig bestimmt.)

Umgekehrt sei φ eine stetige Abbildung von E in E_0. Ordnen wir jeder Funktion $f_0 \in \mathfrak{C} E_0$ die Funktion $f_0 \varphi \mid E$ zu, so ist diese Zuordnung Φ ein Homomorphismus von $\mathfrak{C} E_0$ in $\mathfrak{C} E$ mit $\Phi 1 = 1$ und (17). Dieser Homomorphismus ist offenbar der einzige, welcher der Bedingung (17) genügt.

Nun sei Φ speziell ein Isomorphismus von $\mathfrak{C} E_0$ in $\mathfrak{C} E$ mit $\Phi 1 = 1$ und φ eine stetige Abbildung von E in E_0 derart, daß (17) gilt. Wäre φE nicht dicht in E_0, so gäbe es wegen der vollständigen Regularität von E_0 eine nicht identisch verschwindende Funktion $f_0 \in \mathfrak{C} E_0$, welche auf φE identisch verschwindet. Wegen (17) wäre dann Φf_0 identisch Null. Folglich wäre auch f_0 identisch Null, im Widerspruch zur Wahl von f_0.

Umgekehrt sei φ eine stetige Abbildung von E in E_0 und φE dicht in E_0; Φ sei der Homomorphismus von $\mathfrak{C} E_0$ in $\mathfrak{C} E$ mit $\Phi 1 = 1$ und (17). Sind nun f_0 und f_0' zwei verschiedene Funktionen aus $\mathfrak{C} E_0$, so existiert in E_0 ein Punkt p_0 mit $f_0 p_0 \neq f_0' p_0$. Da φE in E_0 dicht ist, folgt die Existenz eines Punktes $\varphi p (p \in E)$ mit $f_0 \varphi p \neq f_0' \varphi p$. Wegen (17) ist dann auch $(\Phi f_0) p \neq (\Phi f_0') p$, also Φf_0 verschieden von $\Phi f_0'$. Mithin ist Φ eineindeutig, also ein Isomorphismus.

Damit ist der Satz 2 bewiesen.

Eine Lösung der oben gestellten Aufgabe, alle stetigen Darstellungen einer F-Algebra $\mathfrak{A}$ zu finden, liefert auch der folgende Satz 3 (unter der Voraussetzung, daß man alle stetigen, isomorphen Darstellungen von $\mathfrak{A}$ bereits kennt). Zu seiner Formulierung benötigen wir die folgende Definition.

Es sei E ein topologischer Raum mit der Topologie h. Einen topologischen Raum E' mit der Topologie h' nennen wir eine *Erweiterung* εE von E, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

(18) $$E \subseteq E';$$

(19) $$hA \subseteq h'A \qquad \text{für jede Menge } A \subseteq E.$$

Gilt anstelle von (19) sogar $hA = E \cap h'A$ für jedes $A \subseteq E$, so nennt man E' einen *Oberraum* von E; ist außerdem E dicht in E', so nennen wir E' eine *Erweiterung* von E *im üblichen Sinne*.

Satz 3. *Es sei E ein topologischer Raum und $X\mathfrak{A}$ eine stetige Darstellung auf E mit $Xe = 1$ einer F-Algebra $\mathfrak{A}$. Dann existiert eine Erweiterung $E' = \varepsilon E$ von E derart, daß $\mathfrak{C} E'$ eine (stetige) isomorphe Darstellung $X'\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{A}$ auf E' mit $Xa = X'a \mid E$ für jedes $a \in \mathfrak{A}$ ist*[10]).

Kurz gesagt, bedeutet dieser Satz, daß jede stetige Darstellung $X\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{A}$ mit $Xe = 1$ ein Ausschnitt aus einer stetigen, isomorphen Darstellung $\mathfrak{C} E'$ von $\mathfrak{A}$ ist.

[10]) M. a. W.: Betrachten wir für ein beliebiges $a \in \mathfrak{A}$ die Funktion $f' = X'a$ nur auf E, so erhalten wir die Funktion $f = Xa$.

Beweis. Nach dem Satz 1 existiert ein bikompakter HAUSDORFF-Raum E_0 mit einem Isomorphismus X_0 von $\mathfrak{C}E_0$ auf $\mathfrak{A}$. Dann ist $\Phi = XX_0$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{C}E_0$ in $\mathfrak{C}E$ mit $\Phi 1 = 1$. Nach dem Satz 2 existiert weiter eine stetige Abbildung φ von E auf einen Unterraum E_0^* von E_0 mit der Eigenschaft (17).

Für jeden Punkt $p_0^* \in E_0^*$ wählen wir in der Urbildmenge $\varphi^{-1}p_0^*$ einen Punkt p^* aus. Die Menge der ausgewählten Punkte p^* heiße E^*. Die Abbildung φ bildet E^* eineindeutig auf E_0^* ab. Wir identifizieren nun jeden Punkt $p^* \in E^*$ mit seinem Bildpunkt $p_0^* = \varphi p^* \in E_0^*$. Im übrigen nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$E^* = E \cap E_0 = E_0^* \tag{20}$$

an und setzen

$$E \cup E_0 = E'. \tag{21}$$

Für jede Funktion $f_0 \in \mathfrak{C}E_0$ definieren wir eine Funktion $f' | E' = \mathsf{P} f_0$ folgendermaßen:

$$f'p = f_0 \varphi p \qquad \text{für } p \in E, \tag{22}$$

$$f'p = f_0 p \qquad \text{für } p \in E_0. \tag{23}$$

Für jeden Punkt $p \in E \cap E_0$ ist $\varphi p = p$; also ist f' eindeutig. Für jede Funktion $f_0 \in \mathfrak{C}E_0$ und die zugehörigen Funktionen $f = \Phi f_0$ und $f' = \mathsf{P} f_0$ gilt wegen (17) und (23)

$$f' | E = f, \tag{24}$$

$$f' | E_0 = f_0. \tag{25}$$

Es sei $\mathfrak{A}'$ die F-Algebra aller Funktionen f'. Wir führen in E' die Topologie $h' = h'_{\mathfrak{A}'}$ von Lemma 2 ein; h' ist die gröbste Topologie von E', bezüglich welcher alle Funktionen aus $\mathfrak{A}'$ stetig sind. Wegen (16) und (22) gilt

$$\varphi p \in h'p \qquad \text{für } p \in E. \tag{26}$$

Erstens behaupten wir nun, daß der Raum E' mit der Topologie h' eine Erweiterung des Raumes E mit seiner vorgegebenen Topologie h ist. Wegen (24) ist die durch h' in E induzierte Topologie die gröbste Topologie von E, bezüglich welcher die Funktionen $f = \Phi f_0$, $f_0 \in \mathfrak{C}E_0$, stetig sind. Da diese Funktionen aus $\mathfrak{C}E$ bezüglich h stetig sind, ist die Topologie h mindestens so fein wie die durch h' in E induzierte. Es gilt also (19).

Zweitens behaupten wir, daß der Raum E' mit der Topologie h' ein Oberraum des Raumes E_0 mit der Topologie h_0 ist. Dies folgt aus (25) und der vollständigen Regularität von E_0.

Drittens behaupten wir die Gleichung $\mathfrak{A}' = \mathfrak{C}E'$. Da jede Funktion $f' \in \mathfrak{A}'$ stetig ist und außerdem beschränkt wegen (22) und (23), gilt $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{C}E'$. Umgekehrt sei g' eine Funktion aus $\mathfrak{C}E'$. Da g' beschränkt und stetig ist bezüglich der Topologie h' und da E_0 mit der Topologie h_0 ein Unterraum des Raumes E' mit der Topologie h' ist, so ist $g' | E_0$ eine Funktion $f_0 \in \mathfrak{C}E_0$. Es sei $f' = \mathsf{P} f_0$;

dann ist $g'|E_0 = f'|E_0$ nach (25). Weiter sei p ein Punkt von E. Da g' bezüglich h' stetig ist, ist $g'p = g'\varphi p$ wegen (26). Also ist $g'p = f'p$ wegen $\varphi p \in E_0$ und $g'|E_0 = f'|E_0$. Da dies für jeden Punkt $p \in E$ gilt, ist $g'|E = f'|E$. Aus $g'|E_0 = f'|E_0$ und $g'|E = f'|E$ folgt aber $g'|E' = f'|E'$. Damit ist gezeigt, daß jede Funktion $g' \in \mathfrak{C}E'$ eine Funktion $f' \in \mathfrak{A}'$ ist. Folglich gilt $\mathfrak{C}E' \subseteq \mathfrak{A}'$.

Die Abbildung P von $\mathfrak{C}E_0$ auf $\mathfrak{A}' = \mathfrak{C}E'$ ist wegen (22) und (23) ein Isomorphismus von $\mathfrak{C}E_0$ auf $\mathfrak{C}E'$. Da X_0 ein Isomorphismus von $\mathfrak{C}E_0$ auf $\mathfrak{A}$ ist, so ist $P X_0^{-1}$ ein Isomorphismus X' von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{C}E'$. Also ist $\mathfrak{C}E'$ eine isomorphe Darstellung von $\mathfrak{A}$.

Schließlich sei a ein beliebiges Element von $\mathfrak{A}$. Für $f_0 = X_0^{-1}a$ und die zugehörigen Funktionen $f = \Phi f_0$ und $f' = P f_0$ ist dann $f = \Phi f_0 = X X_0^{-1} f_0 = Xa$ und $f' = P f_0 = X' X_0 f_0 = X'a$. Nach (24) ist also $Xa = X'a|E$.

Damit ist der Satz 3 bewiesen.

Abschließend behaupten wir, daß der bikompakte HAUSDORFF-Raum E_0 des Satzes 1 durch die F-Algebra $\mathfrak{A}$ bis auf Homöomorphien eindeutig bestimmt ist. Es gilt nämlich folgender

Satz 4. *Zwei bikompakte* HAUSDORFF-*Räume E_0 und E_1 sind dann und nur dann homöomorph, wenn die zugehörigen F-Algebren $\mathfrak{C}E_0$ und $\mathfrak{C}E_1$ isomorph sind*[11]).

Beweis. Sind E_0 und E_1 homöomorph, so sind $\mathfrak{C}E_0$ und $\mathfrak{C}E_1$ isomorph. Umgekehrt existiere ein Isomorphismus Φ von $\mathfrak{C}E_0$ auf $\mathfrak{C}E_1$. Nach dem Satz 2 existiert zu Φ eine stetige Abbildung φ von E_1 auf einen dichten Unterraum E_0' von E_0 derart, daß $f_1 p_1 = f_0 p_0$ ist für jedes $p_1 \in E_1$, $p_0 = \varphi p_1$, jedes $f_0 \in \mathfrak{C}E_0$ und $f_1 = \Phi f_0$. Analog existiert zu $\Psi = \Phi^{-1}$ eine stetige Abbildung ψ von E_0 auf einen dichten Unterraum E_1' von E_1 derart, daß $f_0 p_0 = f_1 p_1'$ ist für jedes $p_0 \in E_0$, $p_1' = \psi p_0$. Da das stetige Bild eines bikompakten Raumes wieder bikompakt ist, so ist E_0' in E_0 und E_1' in E_1 abgeschlossen; also ist $E_0' = E_0$ und $E_1' = E_1$. Weiter ist $f_1 p_1 = f_1 p_1'$ für jedes $p_1 \in E_1$, $p_1' = \psi\varphi p_1$ und jedes $f_1 \in \mathfrak{C}E_1$. Da je zwei verschiedene Punkte von E_1 durch eine Funktion $f_1 \in \mathfrak{C}E_1$ getrennt werden können, so folgt $p_1 = p_1'$ für jeden Punkt $p_1 \in E_1$. Also ist $\psi = \varphi^{-1}$ und daher φ eine Homöomorphie von E_1 auf E_0.

Wir können also von jetzt an von *dem* Raum $E_0 = E_0\mathfrak{A}$ sprechen.

§ 2. Erweiterungsklassen.

Es liege vor ein topologischer Raum E; seine Topologie heiße h.

Wir klassifizieren die Erweiterungen des Raumes E folgendermaßen: Wir nehmen zwei Erweiterungen E' und E'' von E dann und nur dann in dieselbe Klasse auf, wenn ein Isomorphismus Φ von $\mathfrak{C}E'$ auf $\mathfrak{C}E''$ existiert mit

$$(27)\qquad f'|E = f''|E \text{ für jedes } f' \in \mathfrak{C}E' \text{ und } f'' = \Phi f'.$$

Jede solche Klasse nennen wir eine *Erweiterungsklasse* $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}E$. Ist allgemeiner Φ ein Homomorphismus von $\mathfrak{C}E'$ in $\mathfrak{C}E''$ und gilt (27), so nennen wir Φ

[11]) Von M. H. STONE [11], S. 475 wurde dieser Satz für analytische Isomorphismen (vgl. Fußnote 8) bewiesen. Nach dem Lemma 1b ist Satz 4 mit dem STONEschen Satz äquivalent.

einen *E-identischen Homomorphismus*. Zwei Erweiterungen E' und E'' von E liegen also genau dann in derselben Erweiterungsklasse von E, wenn ein E-identischer Isomorphismus von $\mathfrak{C}E'$ auf $\mathfrak{C}E''$ existiert.

Wir behaupten, daß in jeder Erweiterungsklasse $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}E$ eine *Standarderweiterung* $\beta_{\mathfrak{C}}E$ von E mit besonderen Eigenschaften liegt:

Satz 5. *In jeder Erweiterungsklasse $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}E$ existiert eine Erweiterung $\beta_{\mathfrak{C}}E$ von E mit folgenden zwei Eigenschaften:*

(28) *$\beta_{\mathfrak{C}}E$ ist vollständig regulär; jeder Punkt von $\beta_{\mathfrak{C}}E - E$ ist abgeschlossen;*

(29) *$\beta_{\mathfrak{C}}E$ ist bikompakt*[12]).

Beweis. Es sei E'' eine Erweiterung von E aus der Klasse $\mathfrak{C}$. Weiter sei $\mathfrak{C}E'' = \mathfrak{A}$ gesetzt und X der Homomorphismus $f''|E'' \to f''|E$ von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{C}E$. Der zu $\mathfrak{A}, X$ und E nach Satz 3 existierende Raum E' ist dann eine Erweiterung von E, die ebenfalls in der Klasse $\mathfrak{C}$ liegt. Wir behaupten, daß E' (auf Grund seiner Konstruktion) die Eigenschaften (28) und (29) hat.

E' ist vollständig regulär nach der Definition der Topologie h'. — Weiter sei q ein Punkt von $E' - E$. Wegen (21) ist $q \in E_0$. Es sei p ein von q verschiedener Punkt von E'. Gilt $p \in E_0$, so existiert, weil E_0 ein normaler T_1-Raum ist, eine Funktion $f_0 \in \mathfrak{C}E_0$ mit $f_0 q = 0$ und $f_0 p = 1$; für die Funktion $f' = \mathsf{P} f_0$ ist dann $f'q = 0$ und $f'p = 1$ nach (25); also ist $p \notin h'q$ nach der Definition der Topologie h'. Gilt nicht $p \in E_0$, so ist $p \in E$ nach (21); dann liegt $p_0 = \varphi p$ in $E \cap E_0$ und ist daher $\neq q$. Wie soeben existiert eine Funktion $f' \in \mathfrak{C}E'$ mit $f'q = 0$ und $f'p_0 = 1$; nach (22) ist $f'p_0 = f'p$, also $f'p = 1$; daher ist wieder $p \notin h'q$. Also liegt kein Punkt $p \neq q$ aus E' in $h'q$. Es ist also $h'q = q$, d. h. q ist abgeschlossen.

$\mathfrak{U}$ sei eine offene Überdeckung von E'. Da der Unterraum E_0 von E' bikompakt ist, genügen zur Überdeckung von E_0 endlich viele Mengen $U_1, \ldots, U_n$ aus $\mathfrak{U}$. Angenommen, ein Punkt $p \in E$ läge in keinem U_ν, so wäre $h'p$ fremd zu jedem U_ν; nach (26) wäre dann auch φp in keinem U_ν enthalten, im Widerspruch zu $\varphi p \in E_0 \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n$. Also ist E' bikompakt.

Über die Beziehungen der beliebigen Erweiterungen εE des Raumes E zu den Standarderweiterungen $\beta_{\mathfrak{C}}E$ von E beweisen wir den folgenden Satz, welcher insbesondere besagt, daß *jede Erweiterung εE in die Standarderweiterung $\beta_{\mathfrak{C}}E$ der Klasse $\mathfrak{C}$, welche εE enthält, E-identisch und stetig abgebildet werden kann* und daß das Bild von εE in $\beta_{\mathfrak{C}}E$ dicht ist. Dabei bezeichnen wir eine Abbildung φ einer Erweiterung E'' von E in eine Erweiterung E' von E als *E-identisch*, wenn $\varphi p = p$ ist für jeden Punkt $p \in E$.

Satz 6. *Es sei εE eine beliebige Erweiterung und $\beta_{\mathfrak{C}}E$ eine Standarderweiterung des Raumes E. Damit eine E-identische, stetige Abbildung φ von εE in $\beta_{\mathfrak{C}}E$ existiert, ist notwendig und hinreichend, daß ein E-identischer*

[12]) Aus (28) und (29) folgt, daß $\beta_{\mathfrak{C}}E$ auch normal ist. Die Aussage „$\beta_{\mathfrak{C}}E$ ist bikompakt und vollständig regulär" ist schärfer als die Aussage „$\beta_{\mathfrak{C}}E$ ist bikompakt und normal", da ein bikompakter, normaler Raum, welcher dem Axiom T_1 nicht genügt, im allgemeinen nicht vollständig regulär ist. Gilt der zweite Teil von (28) in der schärferen Fassung: „jeder Punkt von $\beta_{\mathfrak{C}}E$ ist abgeschlossen", so sind die Eigenschaften (28) und (29) äquivalent mit der Aussage: „$\beta_{\mathfrak{C}}E$ ist ein bikompakter HAUSDORFF-Raum".

Homomorphismus Φ von $\mathfrak{C}(\beta_{\mathfrak{C}}E)$ in $\mathfrak{C}(\varepsilon E)$ mit $\Phi 1 = 1$ existiert. $\varphi(\varepsilon E)$ ist dann und nur dann dicht in $\beta_{\mathfrak{C}}E$, wenn Φ ein Isomorphismus ist.

Beweis. Wir setzen $\varepsilon E = E''$ und $\beta_{\mathfrak{C}}E = E'$.

Es sei φ eine E-identische, stetige Abbildung von E'' in E'. Nach dem Satz 2 und seinem Zusatz existiert zu φ ein Homomorphismus Φ von $\mathfrak{C}E'$ in $\mathfrak{C}E''$ mit $\Phi 1 = 1$ und $f'(\varphi p'') = (\Phi f')\, p''$ für jeden Punkt $p'' \in E''$ und jede Funktion $f' \in \mathfrak{C}E'$. Mit φ ist auch Φ E-identisch.

Umgekehrt sei Φ ein E-identischer Homomorphismus von $\mathfrak{C}E'$ in $\mathfrak{C}E''$ mit $\Phi 1 = 1$. Nach dem Satz 2 und seinem Zusatz existiert eine stetige Abbildung φ^* von E'' in E' mit $f'(\varphi^* p'') = (\Phi f')\, p''$ für jeden Punkt $p'' \in E''$ und jede Funktion $f' \in \mathfrak{C}E'$. Für $p \in E$ gilt also, da Φ E-identisch ist, $f'(\varphi^* p) = f' p$ für jedes $f' \in \mathfrak{C}E'$. Da E' vollständig regulär ist, liegt folglich p in der abgeschlossenen Hülle von $\varphi^* p$. Setzen wir nun $p = \varphi\, p$ für jeden Punkt $p \in E$ und $\varphi^* p'' = \varphi p''$ für jeden Punkt $p'' \in E'' - E$, so ist die hiermit definierte, E-identische Abbildung φ nach dem Zusatz zum Satz 2 eine stetige Abbildung von E'' in E' (mit $f'(\varphi\, p'') = (\Phi f')\, p''$ für $p'' \in E''$ und $f' \in \mathfrak{C}E'$).

Die letzte Behauptung folgt unmittelbar aus dem Satz 2 und seinem Zusatz.

Korollar. *Ist εE bikompakt, φ eine E-identische, stetige Abbildung von εE in $\beta_{\mathfrak{C}}E$ und $\varphi(\varepsilon E)$ dicht in $\beta_{\mathfrak{C}}E$, so ist $\varphi(\varepsilon E) = \beta_{\mathfrak{C}}E$.*

Beweis. Wir setzen wieder $\varepsilon E = E''$ und $\beta_{\mathfrak{C}}E = E'$. Es sei p' ein beliebiger Punkt von E'. Wir haben die Existenz eines Punktes p'' von E'' mit $\varphi\, p'' = p'$ zu beweisen. Ist $p' \in E$, so leistet $p'' = p'$ das Verlangte, da φ E-identisch ist. Es sei also $p' \in E' - E$. Jede Umgebung U' von p' hat mit $\varphi E''$ einen nicht leeren Durchschnitt, da $\varphi E''$ in E' dicht liegt. Das System $\mathfrak{R}''$ aller Urbilder $\varphi^{-1} U'$ von Umgebungen U' des Punktes p' ist daher ein Raster in E''. Diesem ist zufolge der Bikompaktheit von E'' ein Punkt $p'' \in E''$ adhärent. Aus der Stetigkeit der Abbildung φ folgt, daß dann auch $\varphi\, p''$ dem Bildraster $\varphi \mathfrak{R}''$ adhärent ist; es liegt also $\varphi\, p''$ im Durchschnitt der abgeschlossenen Hüllen der Umgebungen von p'. Aus der Eigenschaft (28) von E' folgt aber, daß dieser Durchschnitt die einpunktige Menge (p') ist. Folglich gilt $\varphi\, p'' = p'$.

Satz 7. *Für jede Erweiterungsklasse $\mathfrak{C}$ des Raumes E ist die Standarderweiterung $\beta_{\mathfrak{C}}E$ durch die Eigenschaften* (28) *und* (29) *bis auf E-identische Homöomorphien eindeutig bestimmt in $\mathfrak{C}$.*

In diesem Sinne können wir für jede Erweiterungsklasse $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}E$ von *der* Standarderweiterung $\beta_{\mathfrak{C}}E$ sprechen.

Beweis. Es seien E' und E'' zwei Erweiterungen von E aus der Klasse $\mathfrak{C}$ mit den Eigenschaften (28) und (29). Nach der Definition der Erweiterungsklassen existiert ein E-identischer Isomorphismus Φ von $\mathfrak{C}E'$ auf $\mathfrak{C}E''$. Nach Satz 6 (und seinem Beweis) existiert zu Φ eine E-identische, stetige Abbildung φ von E'' auf einen dichten Unterraum von E' mit $f'(\varphi\, p'') = (\Phi f')\, p''$ für alle $p'' \in E''$ und $f' \in \mathfrak{C}E'$. Nach dem Korollar zu Satz 6 ist φ eine Abbildung auf E'. Analog existiert eine E-identische, stetige Abbildung ψ von E' auf E'' mit $f''(\psi\, p') = (\Phi^{-1} f'')\, p'$ für alle $p' \in E'$ und $f'' \in \mathfrak{C}E''$. Es ist also $\chi = \psi\, \varphi$ eine E-identische, stetige Abbildung von E' auf sich mit $f' p' = f' \chi\, p'$

für alle $p' \in E'$ und $f' \in \mathfrak{C}E'$. Wegen (28) folgt hieraus $p' = \chi p'$ für alle $p' \in E'$. Also ist χ die identische Abbildung von E' auf sich und daher φ eine E-identische Homöomorphie von E'' auf E'.

Korollar. *Es sei $\mathfrak{A}' = \mathfrak{C}E'$ die F-Algebra aller (beschränkten) stetigen, reellen Funktionen f' auf $E' = \beta_{\mathfrak{C}}E$ und $\mathfrak{A}$ die Algebra aller Funktionen $f = f'|E$ mit $f' \in \mathfrak{A}'$. Dann ist die Topologie h' von E' die gröbste Topologie, bezüglich welcher alle Funktionen $f' \in \mathfrak{A}'$ stetig sind. h' induziert in E die gröbste Topologie, bezüglich welcher alle Funktionen $f \in \mathfrak{A}$ stetig sind.*

Beweis. Es sei h^* die gröbste Topologie von E', bezüglich welcher alle $f' \in \mathfrak{A}'$ stetig sind. Dann ist $h' \leq h^*$ und mit der Topologie h^* ist E' ebenfalls eine Erweiterung von E aus der Erweiterungsklasse $\mathfrak{C}$. Nach Lemma 2 ist h^* vollständig regulär. Wegen (28) existiert zu jedem Punkt $p \in E' - E$ und jedem Punkt $q \neq p$, $q \in E'$, ein $f' \in \mathfrak{A}'$ mit $f'p = 0$ und $f'q = 1$. Also liegt q nicht in h^*p. Da dies für jeden Punkt $q \neq p$ aus E' gilt, ist $h^*p = p$, also p bezüglich h^* abgeschlossen. Wegen (29) und $h' \leq h^*$ ist E' auch bezüglich der Topologie h^* bikompakt. Also sind die Bedingungen (28) und (29) auch für die Topologie h^* erfüllt. Nach dem Satz 7 ist also $h' = h^*$. — Es sei $\tilde{h}$ die durch h' in E induzierte Topologie und $\tilde{\tilde{h}}$ die gröbste Topologie von E, bezüglich welcher alle $f \in \mathfrak{A}$ stetig sind. Dann ist einerseits $\tilde{h} \leq \tilde{\tilde{h}}$. Nach (28) ist $\tilde{h}$ vollständig regulär. Ist also A eine beliebige Teilmenge von E und q ein Punkt aus $E - \tilde{h}A$, so existiert ein $f' \in \mathfrak{A}'$, mit $f'A = 0$ und $f'q = 1$. Für die Funktion $f = f'|E$ aus $\mathfrak{A}$ gilt also $fA = 0$ und $fq = 1$. Also ist $q \in E - \tilde{\tilde{h}}A$. Dies gilt für jeden Punkt $q \in E - \tilde{h}A$. Also ist $\tilde{\tilde{h}}A \subseteq \tilde{h}A$ für jede Menge $A \subseteq E$, also andererseits $\tilde{\tilde{h}} \leq \tilde{h}$.

Die Standarderweiterungen $\beta_{\mathfrak{C}}E$ des Raumes E sind im allgemeinen keine Oberräume von E, da die in E durch die Topologie von $\beta_{\mathfrak{C}}E$ induzierte Topologie im allgemeinen gröber ist als die gegebene Topologie von E. Wir wollen nun aber beweisen, daß es in jeder Erweiterungsklasse $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}E$ auch Oberräume von E gibt.

Satz 8. *In jeder Erweiterungsklasse $\mathfrak{C}$ des Raumes E existiert ein Oberraum E' von E mit folgenden Eigenschaften:*

(30) *$E' - E$ ist abgeschlossen und ein normaler T_1-Raum*[13]);

(31) *E' ist bikompakt.*

Beweis. Die Topologie von E heiße h. Es sei E'' eine Erweiterung von E aus der Erweiterungsklasse $\mathfrak{C}$. Nach Satz 1 existiert ein bikompakter Hausdorff-Raum E_0, seine Topologie heiße h_0, und ein Isomorphismus Φ von $\mathfrak{C}E_0$ auf $\mathfrak{C}E''$. Nach dem Satz 2 existiert weiter eine stetige Abbildung φ von E'' in E_0 mit der Eigenschaft (17). Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$E \cap E_0 = 0 \tag{32}$$

[13]) Aus der Konstruktion von E', insbesondere aus (34) folgt, daß E' selbst dann kein T_1-Raum ist, wenn E ein T_1-Raum ist.

an und setzen

(33) $$E \cup E_0 = E'.$$

In der Menge E' führen wir folgende Topologie h' ein:

(34) $$h'A = hA \cup h_0 \varphi A \qquad \text{für } A \subseteq E,$$

(35) $$h'B = h_0 B \qquad \text{für } B \subseteq E_0,$$

(36) $$h'(A \cup B) = h'A \cup h'B \qquad \text{für } A \subseteq E,\ B \subseteq E_0.$$

Wegen (33) ist $E \subseteq E'$; wegen (32), (34) und $h_0 \varphi A \subseteq E_0$ ist $E \cap h'A = hA$ für $A \subseteq E$; also ist E' ein Oberraum von E.

Wir behaupten, daß E' in der Erweiterungsklasse $\mathfrak{E}$ liegt.

Um dies zu beweisen, definieren wir für jede Funktion $f_0 \in \mathfrak{C}E_0$ eine Funktion $f' | E' = \mathrm{P} f_0$ folgendermaßen:

(37) $$f'p = f_0 \varphi p \qquad \text{für } p \in E,$$

(38) $$f'p = f_0 p \qquad \text{für } p \in E_0.$$

Wegen (32) ist f' eindeutig. Für jede Funktion $f_0 \in \mathfrak{C}E_0$ und die zugehörigen Funktionen $f = \Phi f_0$ und $f' = \mathrm{P} f_0$ gilt wegen (17)

(39) $$f' | E = f,$$

(40) $$f' | E_0 = f_0.$$

Es sei $\mathfrak{A}'$ die F-Algebra auf E' aller Funktionen $f' = \mathrm{P} f_0$ mit $f_0 \in \mathfrak{C}E_0$. Wir zeigen, daß $\mathfrak{A}' = \mathfrak{C}E'$ ist. Es sei f' eine Funktion aus $\mathfrak{A}'$. Nach (37) und (38) ist f' beschränkt. Wir behaupten die Stetigkeit von f' bezüglich der Topologie h'. Zum Beweis genügt es wegen (36) zu zeigen, daß $f'h'A \subseteq \overline{f'A}$ ist für $A \subseteq E$ und $f'h'B \subseteq \overline{f'B}$ für $B \subseteq E_0$ (wobei f' als Abbildung in die Zahlengerade Z aufgefaßt ist und der Querstrich die abgeschlossene Hülle in Z bedeutet). Letzteres ist trivial wegen (35), (38) und der Stetigkeit von f_0. Nun sei $A \subseteq E$. Nach (34) ist $f'h'A = f'hA \cup f'h_0 \varphi A$. Wegen (39) und der Stetigkeit von f ist $f'hA = fhA \subseteq \overline{fA} = \overline{f'A}$. Wegen (40) und der Stetigkeit von f_0 ist $f'h_0 \varphi A = f_0 h_0 \varphi A \subseteq \overline{f_0 \varphi A} = \overline{f'A}$. Also ist $f'h'A \subseteq \overline{f'A}$. Jede Funktion $f' \in \mathfrak{A}'$ ist also beschränkt und stetig; folglich ist $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{C}E'$. Umgekehrt sei g' eine Funktion aus $\mathfrak{C}E'$. Wir behaupten $g' \in \mathfrak{A}'$. Nach (35) ist E_0 mit der Topologie h_0 ein Unterraum von E'. Also ist $g' | E_0$ eine Funktion f_0 aus $\mathfrak{C}E_0$. Es sei f' die zugehörige Funktion $\mathrm{P} f_0$. Nach (40) ist dann $g' | E_0 = f' | E_0$. Für jeden Punkt $p \in E$ ist $\varphi p \in h'p$ nach (34). Wegen der Stetigkeit von g' bezüglich der Topologie h' folgt hieraus $g'p = g' \varphi p$, also $g'p = f' \varphi p$ wegen $\varphi p \in E_0$ und $g' | E_0 = f' | E_0$. Wegen (39) ist also $g'p = f'p$. Dies gilt für jeden Punkt $p \in E$; also ist auch $g' | E = f' | E$. Wegen (33) folgt nun $g' | E' = f' | E'$, also $g' \in \mathfrak{A}'$. Da dies für jede Funktion $g' \in \mathfrak{C}E'$ gilt, ist $\mathfrak{C}E' \subseteq \mathfrak{A}'$ und damit die Gleichung $\mathfrak{A}' = \mathfrak{C}E'$ bewiesen.

P ist wegen (40) ein Isomorphismus von $\mathfrak{C}E_0$ auf $\mathfrak{A}' = \mathfrak{C}E'$, also $\Phi\, \mathrm{P}^{-1}$ ein Isomorphismus Ψ von $\mathfrak{C}E'$ auf $\mathfrak{C}E''$. Da φ der Bedingung (17) genügt und (37) gilt, ist $f'p = f_0 \varphi p = (\Phi f_0)p = f''p$ für jeden Punkt $p \in E$, wobei $f'' = \Phi f_0 = \Phi\, \mathrm{P}^{-1} f' = \Psi f'$ und $f' \in \mathfrak{C}E'$ ist. Also liegen E' und E'' in derselben Erweiterungsklasse von E, d. h. E' liegt in $\mathfrak{E}$, wie wir behauptet hatten.

Nach (32) und (33) ist $E' - E = E_0$ und nach (34) ist $h'E_0 = h_0 E_0 = E_0$; also ist $E' - E$ abgeschlossen. Nach (35) ist $E_0 = E' - E$ ein Unterraum von E'; da E_0 ein normaler T_1-Raum ist, so ist also $E' - E$, als Unterraum von E' betrachtet, ein normaler T_1-Raum. Es gilt also (30).

Schließlich sei $\mathfrak{U}$ eine offene Überdeckung von E'. Da E_0 bikompakt ist, genügen zur Überdeckung von E_0 endlich viele Mengen $U_1, \ldots, U_n$ aus $\mathfrak{U}$. Angenommen, ein Punkt $p \in E$ läge in keinem U_ν, so wäre $h'p$ fremd zu jedem U_ν; nach (34) wäre dann auch $\varphi\, p$ in keinem U_ν enthalten, im Widerspruch zu $\varphi\, p \in E_0 \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n$. Also überdecken $U_1, \ldots, U_n$ auch E und damit ganz E'. Also gilt (31).

Trivial ist endlich noch folgender Satz:

Satz 9. *Existiert für zwei Erweiterungen E' und E'' des Raumes E eine E-identische Homöomorphie von E' auf E'', so liegen E' und E'' in derselben Erweiterungsklasse $\mathfrak{E}E$.*

§ 3. Die Erweiterungsklassen eindeutiger Fortsetzbarkeit.

Es sei E ein topologischer Raum und $\mathfrak{E}$ eine Erweiterungsklasse von E. Ist E' eine Erweiterung von E aus $\mathfrak{E}$, so ist das System aller Funktionen $f = f'|E$ mit $f' \in \mathfrak{C}E'$ eine stetige Algebra $\mathfrak{A}$ auf E. Sie besteht aus allen denjenigen Funktionen $f \in \mathfrak{C}E$, die auf mindestens eine Weise auf E' stetig fortgesetzt werden können[14]). Wegen (27) hängt $\mathfrak{A}$ von E' nicht ab, d. h. ist E'' eine zweite Erweiterung von E aus $\mathfrak{E}$, so kann eine Funktion $f \in \mathfrak{C}E$ dann und nur dann auf mindestens eine Weise auf E'' stetig fortgesetzt werden, wenn f eine Funktion aus $\mathfrak{A}$ ist.

Kann nun jede Funktion f aus $\mathfrak{A}$ auf jede Erweiterung E' von E aus $\mathfrak{E}$ auf *genau* eine Weise stetig fortgesetzt werden, so nennen wir $\mathfrak{E}$ eine Erweiterungsklasse *eindeutiger Fortsetzbarkeit*. Die eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung f' auf E' von f ist dann beschränkt, also ein Element von $\mathfrak{C}E'$[14]). Aus Lemma 1b folgt, daß $\mathfrak{A}$ in diesem Fall sogar eine stetige F-Algebra auf E ist.

Satz 10. *$\mathfrak{E}$ ist dann und nur dann eine Erweiterungsklasse eindeutiger Fortsetzbarkeit, wenn eine Funktion $f \in \mathfrak{C}E$ und eine Erweiterung E' von E aus $\mathfrak{E}$ derart existieren, daß f auf genau eine Weise auf E' stetig fortgesetzt werden kann.*

Beweis. Es sei f eine Funktion aus $\mathfrak{C}E$ und E' eine Erweiterung von E aus $\mathfrak{E}$ derart, daß f auf genau eine Weise auf E' stetig fortgesetzt werden kann; die Fortsetzung heiße f'. Nun sei g eine beliebige Funktion aus $\mathfrak{C}E$ und es seien g_1' und g_2' stetige Fortsetzungen von g auf E'. Dann ist $f' + (g_1' - g_2')$ eine stetige Fortsetzung von f auf E'; also ist $f' + (g_1' - g_2') = f'$ und daher $g_1' = g_2'$. Also ist jede Funktion $g \in \mathfrak{C}E$ auf genau eine Weise auf E' stetig

[14]) Läßt sich eine Funktion $f \in \mathfrak{C}\, E$ auf mindestens eine Weise zu einer auf E' stetigen Funktion fortsetzen, so auch auf mindestens eine Weise zu einer auf E' beschränkten, stetigen Funktion. Ist nämlich f' eine Fortsetzung von f zu einer auf E' unbeschränkten, stetigen Funktion, so folgt aus der Beschränktheit von f die Existenz sogar unendlich vieler beschränkter, stetiger Fortsetzungen der Form $\max(\alpha, \min(f', \beta))$, wobei α und β reelle Zahlen sind mit $\alpha \leqq -\|f\|$ und $\|f\| \leqq \beta$.

fortsetzbar. Nun sei E'' eine zweite Erweiterung von E aus $\mathfrak{E}$. Es seien f_1'' und f_2'' stetige Fortsetzungen einer Funktion f aus $\mathfrak{C}E$ auf E''. Wir behaupten die Gleichheit von f_1'' und f_2''. Hierzu können ohne Beschränkung der Allgemeinheit[14]) f_1'' und f_2'' als Elemente von $\mathfrak{C}E''$ angenommen werden. Da E' und E'' in derselben Klasse $\mathfrak{E}$ liegen, existiert ein E-identischer Isomorphismus Φ von $\mathfrak{C}E''$ auf $\mathfrak{C}E'$. Da die stetige Fortsetzung f' von f auf E' eindeutig bestimmt ist, gilt $\Phi f_1'' = f' = \Phi f_2''$ und daher $f_1'' = f_2''$.

Satz 11. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *$\mathfrak{E}$ ist eine Erweiterungsklasse eindeutiger Fortsetzbarkeit;*
2. *E ist dicht in $\beta_{\mathfrak{E}}E$;*
3. *$\mathfrak{E}$ enthält eine Erweiterung von E, in welcher E dicht ist;*
4. *$\mathfrak{E}$ enthält eine Erweiterung von E im üblichen Sinne.*

Beweis. Es gelte 1. Angenommen 2. gälte nicht. Dann existiert in $E' = \beta_{\mathfrak{E}}E$ ein Punkt q der nicht in der abgeschlossenen Hülle $h'E$ von E in E' liegt. Nach (28) existiert dann eine Funktion $f' \in \mathfrak{C}E'$ mit $f'h'E = 0$ und $f'q = 1$. Diese Funktion ist eine stetige Fortsetzung auf E' der konstanten Funktion $f = 0$ auf E. Die letztere Funktion f wird aber auch durch die auf ganz E' identisch verschwindende Funktion stetig fortgesetzt. Die Funktion f hat also zwei verschiedene stetige Fortsetzungen auf E', im Widerspruch zu 1. Also gilt 2. — Es gelte 2. Dann gilt 3., weil $\beta_{\mathfrak{E}}E$ eine Erweiterung von E aus $\mathfrak{E}$ ist.— Es gelte 3. Es sei E'' eine Erweiterung von E aus $\mathfrak{E}$, in welcher E dicht ist. Nun sei E' der Oberraum von E des Satzes 8, der mit Hilfe der Erweiterung E'' konstruiert ist (siehe den Beweis des Satzes 8). $\varphi E''$ ist dicht in E_0 nach dem Satz 2. Da E in E'' dicht ist, so ist also auch φE dicht in E_0. Aus (34) folgt also $h'E = hE \cup h_0 \varphi E = E \cup E_0 = E'$. Daher ist E dicht im Oberraum E', d. h. E' ist eine Erweiterung von E im üblichen Sinne. Da E' nach dem Satz 8 in derselben Erweiterungsklasse wie E'', also in $\mathfrak{E}$ liegt, so gilt also 4. — Es gelte 4. Da eine Funktion aus $\mathfrak{C}E$ auf eine Erweiterung E' von E, in welcher E dicht ist, auf höchstens eine Weise stetig fortgesetzt werden kann, so gilt 1. wegen des Satzes 10.

Satz 12. *Zu jeder stetigen F-Algebra $\mathfrak{A}$ auf E existiert genau eine Erweiterungsklasse $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}E$ eindeutiger Fortsetzbarkeit derart, daß die Funktionen $f \in \mathfrak{A}$ genau diejenigen beschränkten, stetigen Funktionen $f|E$ sind, welche auf die Erweiterungen E' von E aus $\mathfrak{E}$ (auf genau eine Weise) stetig fortgesetzt werden können.*

Beweis. Es sei X die identische Abbildung von $\mathfrak{A}$ auf sich; dann ist X ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{C}E$ mit $X1 = 1$. Nach Satz 3 existiert zu X eine Erweiterung E' von E derart, daß die Zuordnung $f' \to f'|E, f' \in \mathfrak{C}E'$, ein Isomorphismus von $\mathfrak{C}E'$ auf $\mathfrak{A}$ ist. Folglich sind die Funktionen aus $\mathfrak{A}$ genau diejenigen Funktionen aus $\mathfrak{C}E$, welche auf E' stetig fortgesetzt werden können, und jede Funktion aus $\mathfrak{A}$ läßt sich nur auf genau eine Weise auf E' stetig fortsetzen.

Die Erweiterungsklasse $\mathfrak{E}$ von E, in welcher E' liegt, ist nach dem Satz 10 eine Erweiterungsklasse eindeutiger Fortsetzbarkeit. Auf jede Erweiterung $E'' \in \mathfrak{E}$ lassen sich die Funktionen aus $\mathfrak{A}$ und nur diese stetig fortsetzen. Um-

gekehrt sei E'' eine Erweiterung von E, auf welche alle $f \in \mathfrak{A}$ und nur diese stetig fortgesetzt werden können; die Fortsetzungen seien eindeutig bestimmt. Ordnen wir nun jeder Funktion $f' \in \mathfrak{C}E'$ diejenige Funktion $f'' \in \mathfrak{C}E''$ zu, die die Funktion $f = f'|E$ stetig auf E'' fortsetzt, so ist diese Zuordnung ein E-identischer Isomorphismus von $\mathfrak{C}E'$ auf $\mathfrak{C}E''$. Also liegt E'' in $\mathfrak{E}$.

Nach Satz 12 und den einleitenden Bemerkungen zu diesem Paragraphen entsprechen einander *eineindeutig* die Erweiterungsklassen $\mathfrak{E}E$ eindeutiger Fortsetzbarkeit und die stetigen F-Algebren $\mathfrak{A}$ auf E. Daher schreiben wir von nun an auch häufig $\beta_{\mathfrak{A}}E$ anstelle von $\beta_{\mathfrak{E}}E$, wenn $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}E$ eine Erweiterungsklasse eindeutiger Fortsetzbarkeit und $\mathfrak{A}$ die F-Algebra aller Funktionen $f \in \mathfrak{C}E$ ist, welche auf eine beliebige Erweiterung aus $\mathfrak{E}$ stetig fortgesetzt werden können[15]).

Als Korollar zu Satz 6 ergibt sich nun:

Satz 13. *Es seien $\mathfrak{E}'' = \mathfrak{E}''E$ und $\mathfrak{E}' = \mathfrak{E}'E$ zwei Erweiterungsklassen eindeutiger Fortsetzbarkeit von E; $\mathfrak{A}''$ und $\mathfrak{A}'$ seien die zugehörigen stetigen F-Algebren auf E. Es existiert dann und nur dann eine E-identische, stetige Abbildung einer Erweiterung E'' aus $\mathfrak{E}''$ in $\beta_{\mathfrak{E}'}E$, wenn $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}''$ ist.*

Beweis. Es sei φ eine E-identische, stetige Abbildung von E'' in $E' = \beta_{\mathfrak{E}'}E$. Da E in E' nach Satz 11 dicht liegt, wird E'' durch φ auf einen dichten Unterraum von E' abgebildet. Nach Satz 6 existiert daher ein E-identischer Isomorphismus Φ von $\mathfrak{C}E'$ in $\mathfrak{C}E''$. Ist f eine beliebige Funktion aus $\mathfrak{A}'$ und f' ihre Fortsetzung auf E', so gilt $f = \Phi f'|E$ und daher $f \in \mathfrak{A}''$. Also ist $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}''$.

Nun sei umgekehrt $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}''$. Da $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{E}''$ Erweiterungsklassen eindeutiger Fortsetzbarkeit sind, ist die folgende Zuordnung Φ ein E-identischer Isomorphismus von $\mathfrak{C}E'$ in $\mathfrak{C}E''$ mit $\Phi 1 = 1$: wir ordnen einer Funktion $f' \in \mathfrak{C}E'$ diejenige Funktion $\Phi f' = f'' \in \mathfrak{C}E''$ zu, welche die stetige Fortsetzung von $f = f'|E$ ist. Aus Satz 6 folgt dann die Existenz einer E-identischen, stetigen Abbildung von E'' in E'.

§ 4. Untersuchung spezieller Erweiterungen auf ihre Klassenzugehörigkeit.

Es sei E ein topologischer Raum. E kann als Erweiterung von sich selbst betrachtet werden und liegt demzufolge in einer Erweiterungsklasse von E, die wir als die *Hauptklasse* $\mathfrak{E}_0E$ bezeichnen.

Nach Satz 11, 3. ist die Hauptklasse $\mathfrak{E}_0E$ eine Erweiterungsklasse eindeutiger Fortsetzbarkeit. Nach Definition derselben liegt eine Erweiterung εE von E dann und nur dann in der Hauptklasse $\mathfrak{E}_0E$, wenn jede Funktion $f \in \mathfrak{C}E$ auf genau eine Weise auf εE stetig fortgesetzt werden kann. Darüber hinaus gilt:

Satz 14. *Eine Erweiterung εE von E liegt dann und nur dann in der Hauptklasse $\mathfrak{E}_0E$, wenn jede stetige Abbildung von E in einen bikompakten*

[15]) E sei ein vollständig regulärer T_1-Raum. Eine stetige F-Algebra A auf E heiße vollständig regulär, wenn speziell in $\mathfrak{A}$ zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subseteq E$ und jedem Punkt $q \notin A$ aus E eine Funktion f mit $fA = 0$ und $fq = 1$ existiert. Für solche $\mathfrak{A}$ wurde die Existenz und Eindeutigkeit (bis auf E-identische Homöomorphien) von $\beta_{\mathfrak{A}}E$ bereits von I. Gelfand und G. Šilov [7] bewiesen. $\beta_{\mathfrak{A}}E$ ist dann (und nur dann) eine bikompakte, Hausdorffsche Erweiterung von E im üblichen Sinne.

Hausdorff-*Raum* F *auf genau eine Weise zu einer stetigen Abbildung von* εE *in* F *fortgesetzt werden kann.*

Beweis. Die im Satz genannte Bedingung sei erfüllt. Dann liegt εE in $\mathfrak{C}_0 E$, da jede Funktion $f \in \mathfrak{C} E$ eine stetige Abbildung von E in ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall der Zahlengeraden, also in einen bikompakten Hausdorff-Raum ist.

Es sei umgekehrt εE eine Erweiterung von E aus der Hauptklasse $\mathfrak{C}_0 E$ und ψ eine stetige Abbildung von E in einen bikompakten Hausdorff-Raum F. Nach Tychonoff[16]) ist F ein abgeschlossener Unterraum eines Cartesischen Produktes P von abgeschlossenen, beschränkten Intervallen I_j, $j \in J$, der Zahlengeraden. Es bezeichne π_j für jedes $j \in J$ die Projektion von P auf I_j. Dann ist $f_j = \pi_j \psi$ eine stetige Abbildung von E in I_j, also eine Funktion aus $\mathfrak{C} E$. Diese läßt sich nach Voraussetzung auf genau eine Weise zu einer Funktion f_j' aus $\mathfrak{C}(\varepsilon E)$ fortsetzen. Sind $\alpha_j < \beta_j$ die Endpunkte des Intervalls I_j, so ist auch die Funktion $\max(\alpha_j, \min(f_j', \beta_j))$ eine Fortsetzung von f_j zu einer stetigen Funktion auf εE; es gilt also $f_j' = \max(\alpha_j, \min(f_j', \beta_j))$, da f_j nur auf genau eine Weise auf εE stetig fortgesetzt werden kann. Also ist $\alpha_j \leq f_j' \leq \beta_j$ und somit auch f_j' eine stetige Abbildung von εE in I_j. Ordnet man einem beliebigen Punkt $p \in \varepsilon E$ als Bild $\psi' p$ den Punkt p' von P mit den Projektionen $\pi_j p' = f_j' p$ zu, so ist ψ' eine Fortsetzung von ψ zu einer stetigen Abbildung von εE in P. Es ist ψ' eine stetige Abbildung von εE sogar in F. Wäre nämlich $p' = \psi' p$ für einen Punkt $p \in \varepsilon E$ nicht in F gelegen, so würde, da F in P abgeschlossen und P vollständig regulär ist, eine stetige, reelle Funktion $g|P$ existieren mit $gF = 0$ und $gp' = 1$; folglich wäre $f' = g\,\psi'$ eine nicht identisch verschwindende, stetige Fortsetzung der auf E konstanten Funktion $f = 0$. Dies kann nicht sein, da die auf E konstante Funktion $f = 0$ nur zu der auf εE identisch verschwindenden Funktion stetig fortgesetzt werden kann. Die Fortsetzung ψ' von ψ zu einer stetigen Abbildung von εE in F ist die einzig mögliche. Ist nämlich ψ^* eine zweite Fortsetzung von ψ zu einer stetigen Abbildung von εE in F, so sind $\pi_j \psi^* | \varepsilon E$ und $\pi_j \psi' | \varepsilon E$ zwei stetige Fortsetzungen der Funktion $\pi_j \psi | E$. Folglich gilt $\pi_j \psi^* = \pi_j \psi'$ für alle $j \in J$ und daher auch $\psi^* = \psi'$. Damit ist der Satz 14 bewiesen.

Nach dem Satz 5 existiert in der Hauptklasse $\mathfrak{C}_0 E$ eine Standarderweiterung $\beta_{\mathfrak{C}_0} E$ von E mit folgenden Eigenschaften: $\beta_{\mathfrak{C}_0} E$ ist vollständig regulär; jeder Punkt von $\beta_{\mathfrak{C}_0} E - E$ ist abgeschlossen; $\beta_{\mathfrak{C}_0} E$ ist bikompakt. Durch diese Eigenschaften ist $\beta_{\mathfrak{C}_0} E$ nach dem Satz 7 in $\mathfrak{C}_0 E$ bis auf E-identische Homöomorphien eindeutig bestimmt. Nach den Sätzen 12 und 13 sind die Erweiterungen εE von E aus der Hauptklasse dadurch charakterisiert, daß sie E-identisch und stetig in $\beta_{\mathfrak{C}_0} E$ abgebildet werden können (nach dem Korollar zu Satz 6 *auf* $\beta_{\mathfrak{C}_0} E$, wenn εE bikompakt ist). Nach Satz 11, 2. ist E dicht in $\beta_{\mathfrak{C}_0} E$. Wir bezeichnen von nun an die Erweiterung $\beta_{\mathfrak{C}_0} E$ mit βE und nennen βE die Čechsche *Erweiterung* von E. Ist E speziell ein vollständig regulärer T_1-Raum, so ist βE die Čechsche Erweiterung im üblichen Sinne[17]).

[16]) Vgl. G. Nöbeling [10], S. 162.
[17]) Vgl. E. Čech [4].

Bemerkung. Man kann die ČECHsche Erweiterung βE eines beliebigen topologischen Raumes E aus der ČECHschen Erweiterung βK im üblichen Sinne eines vollständig regulären T_1-Raumes K folgendermaßen gewinnen. Für jeden Punkt p von E sei $[p]$ die Klasse aller Punkte q von E mit $fp = fq$ für alle Funktionen $f \in \mathfrak{C}E$. Es sei K die Menge aller Klassen $k = [p]$. Für jede Funktion $f \in \mathfrak{C}E$ sei g die durch die Gleichung $gk = fp$ für $p \in k$ definierte Funktion $g|K$. Nun sei h die gröbste Topologie von K, bezüglich welcher alle Funktionen g stetig sind. Durch h wird K zu einem vollständig regulären T_1-Raum (vgl. das Lemma 2). Also existiert die ČECHsche Erweiterung βK im üblichen Sinne. Die „Punkte" von βK sind die Klassen k von E und die Punkte von $\beta K - K$. Nun sei $(\beta K - K) \cup E = E'$ gesetzt und eine Menge $F' \subseteq E'$ werde als abgeschlossen in E' definiert, wenn F' die Vereinigung einer Menge F von Klassen k und Punkten aus $\beta K - K$ und diese Menge F in βK abgeschlossen ist. Hierdurch wird E' zu einem topologischen Raum. Er ist die ČECHsche Erweiterung βE.

Im folgenden beweisen wir zunächst für einige bekannte Erweiterungen εE, daß sie ebenfalls in der Hauptklasse $\mathfrak{E}_0 E$ liegen. Da E in jeder dieser Erweiterungen dicht ist, genügt es hierfür zu zeigen, daß jede Funktion aus $\mathfrak{C}E$ auf mindestens eine Weise auf εE stetig fortgesetzt werden kann. Weiter beweisen wir, daß für jede dieser Erweiterungen εE eine E-identische, stetige Abbildung nicht nur *in* βE, sondern sogar *auf* βE existiert.

Satz 15. *Ist E ein T_1-Raum, so liegt die* WALLMAN*sche Erweiterung ωE*[18]) *in der Hauptklasse $\mathfrak{E}_0 E$ und kann E-identisch und stetig auf die* ČECH*sche Erweiterung βE abgebildet werden. Ist E ein vollständig regulärer T_1-Raum, so gehen bei dieser Abbildung Punkte von $\omega E - E$ in Punkte von $\beta E - E$ über.*

Beweis. Daß ωE in der Hauptklasse $\mathfrak{E}_0 E$ liegt, ist bekannt[19]). Nach dem Satz 6 und seinem Korollar existiert eine E-identische, stetige Abbildung φ von ωE auf βE. Ist E ein vollständig regulärer T_1-Raum, so ist βE eine Erweiterung im üblichen Sinne; die Topologie von ωE heiße h, die Topologie von βE heiße h'. Für einen Punkt $p \in \omega E$ sei $\mathfrak{F}$ das System aller in E abgeschlossenen Mengen $F \subseteq E$ mit $p \in hF$; dann gilt $(p) = \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} hF$. Hieraus folgt $\varphi p \in \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} \varphi hF \subseteq \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} h' \varphi F = \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} h'F$. Ist nun p ein Punkt aus $\omega E - E$, so ist $\bigcap_{F \in \mathfrak{F}} F = \Theta$ und daher $(\varphi p) \cap E \subseteq \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} E \cap h'F = \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} F = \Theta$. Also liegt φp in $\beta E - E$.

Satz 16. *Ist E ein* HAUSDORFF*scher Raum, so liegen die* KATĚTOV*schen Erweiterungen σE, $\sigma' E$, τE und $\tau' E$*[20]) *in der Hauptklasse $\mathfrak{E}_0 E$ und können E-identisch und stetig auf die* ČECH*sche Erweiterung βE abgebildet werden. Ist E ein vollständig regulärer T_1-Raum, so gehen bei diesen Abbildungen nicht in E gelegene Punkte in Punkte von $\beta E - E$ über.*

---

[18]) Vgl. H. WALLMAN [13].

[19]) Vgl. G. NÖBELING [10], S. 160.

[20]) Vgl. M. KATĚTOV [8].

Beweis. Es sei εE eine der vier Katětovschen Erweiterungen. εE ist eine Erweiterung von E im üblichen Sinne und E ist in εE parakombinatorisch[21]) eingebettet. Außerdem ist εE ein Hausdorff-Raum und abgeschlossen in jedem Hausdorffschen Oberraum.

Nun sei f eine Funktion aus $\mathfrak{C}E$; ferner seien α und β zwei reelle Zahlen mit $\alpha < \beta$. Wegen der Stetigkeit von f sind die Urbildmengen $G_1 = [f < \alpha]$ und $G_2 = [f > \beta]$ in E offen; es ist $G_1 \cap G_2 = \theta$. Da E in εE parakombinatorisch eingebettet ist, gilt also $hG_1 \cap hG_2 \subseteq E$, wenn h die Topologie von εE bezeichnet. Hieraus folgt $hG_1 \cap hG_2 = \theta$, da G_1 und G_2 in E sogar fremde Hüllen besitzen. Also[22]) ist f auf εE stetig fortsetzbar.

Weiter sei φ eine E-identische, stetige Abbildung von εE in βE. Dann ist $\varphi(\varepsilon E)$ in βE dicht, da E in βE dicht und φ E-identisch ist. Folglich ist das System $\mathfrak{R}$ aller Urbilder $\varphi^{-1}U'$ von Umgebungen U' eines beliebigen Punktes $p' \in \beta E - E$ ein aus nicht leeren, in εE offenen Mengen bestehender Raster; diesem ist ein Punkt p aus εE adhärent[23]). Zufolge der Stetigkeit von φ ist φp dem Raster aller Umgebungen U' von p' in βE adhärent. Also ist $\varphi p = p'$, da nach (28) p' abgeschlossen und βE vollständig regulär ist. Da p' in $\beta E - E$ beliebig gewählt war und φ E-identisch ist, gilt also $\varphi(\varepsilon E) = \beta E$.

Ist E ein vollständig regulärer T_1-Raum, so behaupten wir die Gleichung $\varphi(\varepsilon E - E) = \beta E - E$. Für einen Punkt $p \in \varepsilon E$ sei $\mathfrak{S}$ das System aller in E offenen Mengen $G \subsetneq E$ mit $p \in hG$; dann ist $(p) = \bigcap_{G \in \mathfrak{S}} hG$. Ist nämlich q ein von p verschiedener Punkt aus εE, so existiert, da εE Hausdorffsch ist, eine in εE offene Menge G' mit $p \in G'$ und $q \notin hG'$. Da εE eine Erweiterung von E im üblichen Sinne ist, so ist $G = E \cap G'$ in E offen und $hG = hG'$. Also gilt $G \in \mathfrak{S}$, aber nicht $q \in hG$. Die behauptete Gleichung ist bewiesen, wenn gezeigt werden kann, daß aus $p \in \varepsilon E - E$ folgt $\varphi p \in \beta E - E$. Der Beweis hierfür verläuft analog dem Beweis der entsprechenden Behauptung für ωE; man hat nur das dort auftretende System $\mathfrak{F}$ durch $\mathfrak{S}$ zu ersetzen[24]).

Satz 17. *Ist E ein regulärer T_1-Raum, so liegt die Alexandroffsche Erweiterung αE*[25]) *in der Hauptklasse $\mathfrak{C}_0 E$ und kann E-identisch und stetig auf die Čechsche Erweiterung βE abgebildet werden. Ist E ein vollständig regulärer T_1-Raum, so gehen bei dieser Abbildung Punkte von $\alpha E - E$ in Punkte von $\beta E - E$ über.*

---

[21]) Das heißt für je zwei in E offene Mengen G_1 und G_2 mit $G_1 \cap G_2 = \theta$ gilt $hG_1 \cap hG_2 \subseteq E$, wenn h die Topologie von εE bezeichnet.

[22]) Nach B. Z. Vulich [12] ist eine Funktion $f \in \mathfrak{C}E$ auf eine Erweiterung E' von E im üblichen Sinne dann und nur dann stetig fortsetzbar, wenn für je zwei reelle Zahlen α und β mit $\alpha < \beta$ die Urbildmengen $[f < \alpha]$ und $[f > \beta]$ fremde Hüllen in E' besitzen.

[23]) Ein Hausdorff-Raum E ist dann und nur dann in jedem Hausdorffschen Oberraum abgeschlossen, wenn jedem *Raster (Filterbasis)* bestehend aus nicht leeren, in E offenen Mengen mindestens ein Punkt von E adhärent ist.

[24]) Eine Analyse dieses Beweises zeigt, daß allgemein folgendes gilt: sind E' und E'' zwei Erweiterungen im üblichen Sinne eines Raumes E und ist E' Hausdorffsch, so gehen bei einer E-identischen, stetigen Abbildung von E' in E'' Punkte von $E' - E$ in Punkte von $E'' - E$ über.

[25]) Vgl. P. Alexandroff [1]. Dort wird übrigens auch gezeigt, daß αE für einen vollständig regulären T_1-Raum E E-identisch und stetig auf βE abgebildet werden kann.

Beweis. $\alpha^* E$ hat folgende Eigenschaften: 1. αE ist eine Erweiterung von E im üblichen Sinne; 2. αE ist ein HAUSDORFF-Raum; 3. jedem regulären Raster[26]) in E ist mindestens ein Punkt von αE adhärent; 4. für jeden Punkt p von αE ist die Spur in E des Rasters aller Umgebungen von p in αE ein maximaler, regulärer Raster in E[27]). Die Topologie von αE bezeichnen wir mit h.

Es sei f eine Funktion aus $\mathfrak{C}E$. Außerdem seien α und β zwei reelle Zahlen mit $\alpha < \beta$. Ist nun p ein beliebiger Punkt der Menge $h\,[f < \alpha]$, so gilt $p \in h\,[f < \alpha']$ für jedes α' mit $\alpha < \alpha'$. Die in E offenen Mengen $[f < \alpha']$ mit $\alpha < \alpha'$ bilden einen Raster $\mathfrak{R}$ in E. Dieser ist regulär (in E), da aus $\alpha < \alpha' < \alpha''$ folgt, daß die in E gebildete Hülle von $[f < \alpha']$ enthalten ist in $[f < \alpha'']$. Das System $\mathfrak{U}_p$ der Durchschnitte von E mit allen Umgebungen von p in αE ist zufolge 4. ein maximaler, regulärer Raster in E. Da p dem Raster $\mathfrak{R}$ in αE adhärent ist, hat jede Menge aus $\mathfrak{R}$ mit jeder Menge aus $\mathfrak{U}_p$ einen nichtleeren Durchschnitt. Hieraus und aus der Maximaleigenschaft von $\mathfrak{U}_p$ folgt $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{U}_p$; also ist jede Menge aus $\mathfrak{R}$ Spur in E einer Umgebung des Punktes $p \in \alpha E$. Es sei nun α' so gewählt, daß $\alpha < \alpha' < \beta$ gilt. Dann existiert eine Umgebung U von p in αE mit $U \cap E = [f < \alpha']$. Aus $[f < \alpha'] \cap [f > \beta] = \theta$ folgt daher $U \cap [f > \beta] = \theta$; es kann also p kein Punkt der Menge $h\,[f > \beta]$ sein. Da p in $h\,[f < \alpha]$ beliebig gewählt war, gilt somit $h\,[f < \alpha] \cap h\,[f > \beta] = \theta$. Also ist f auf αE stetig fortsetzbar.

Weiter sei φ eine E-identische, stetige Abbildung von αE in βE. Dann ist $E \subseteq \varphi(\alpha E) \subseteq \beta E$. Um $\varphi(\alpha E) = \beta E$ zu beweisen, genügt es also zu zeigen, daß $\beta E - E \subseteq \varphi(\alpha E)$ ist. Hierzu sei p' ein beliebiger Punkt von $\beta E - E$. Der Raum βE ist vollständig regulär, also regulär; folglich ist das System $\mathfrak{S}$ der Durchschnitte von E mit allen Umgebungen von p' in βE ein regulärer Raster im Raum E mit der durch die Topologie H von βE in E induzierten Topologie h'. Da p' abgeschlossen und βE vollständig regulär ist, ist p' Durchschnitt der Hüllen seiner Umgebungen in βE und folglich der einzige dem Raster $\mathfrak{S}$ in βE adhärente Punkt. Da βE eine Erweiterung von E ist, so ist ferner die induzierte Topologie h' gröber als die gegebene Topologie h von E. Also ist $\mathfrak{S}$ auch ein regulärer Raster bezüglich der Topologie h. Zufolge 3. ist dem Raster $\mathfrak{S}$ ein Punkt $p \in \alpha E$ adhärent. Der Bildpunkt $\varphi\, p$ ist dann dem Raster $\mathfrak{S}$ in βE adhärent; folglich ist $\varphi\, p = p'$.

Ist E ein vollständig regulärer T_1-Raum, so gilt $\varphi(\alpha E - E) = \beta E - E$. Da αE HAUSDORFFsch ist, beweist man dies wie die entsprechende Behauptung aus Satz 16.

Wir behandeln nun noch eine Erweiterung eines Raumes E, die im allgemeinen nicht in der Hauptklasse $\mathfrak{E}_0 E$ liegt.

---

[26]) Ein Raster $\mathfrak{R}$ in E heißt *regulär*, wenn er aus (nicht leeren) in E offenen Mengen besteht und wenn zu jeder Menge $U \in \mathfrak{R}$ eine Menge $U' \in \mathfrak{R}$ existiert, deren abgeschlossene Hülle in U enthalten ist. $\mathfrak{R}$ heißt maximal, wenn $\mathfrak{R}$ nicht echtes Teilsystem eines regulären Rasters $\mathfrak{R}^*$ in E ist.

[27]) Ferner besitzt αE die Eigenschaft: 5. E ist in αE regulär eingebettet, d. h. die abgeschlossenen Hüllen (bezüglich αE) der in E abgeschlossenen Mengen bilden eine abgeschlossene Basis von αE. Nach H. BAUER [2] ist αE durch die Eigenschaften 1. bis 5. bis auf E-identische Homöomorphien eindeutig bestimmt.

Satz 18. *Es sei E ein uniformer T_1-Raum, $\hat{E}$ seine Vervollständigung und $\mathfrak{S}$ die F-Algebra aller beschränkten, gleichmäßig stetigen, reellen Funktionen $f|E$. Dann existiert eine E-identische Homöomorphie von $\hat{E}$ auf einen dichten Unterraum von $\beta_{\mathfrak{S}} E$. Der Raum $\beta_{\mathfrak{S}} E$ ist eine bikompakte, Hausdorffsche Erweiterung von E im üblichen Sinne.*

Nach diesem Satz liegt also die Vervollständigung $\hat{E}$ von E in einer Erweiterungsklasse $\mathfrak{C}E$ eindeutiger Fortsetzbarkeit, welcher eine stetige F-Algebra $\mathfrak{A}$ auf E mit $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{A}$ entspricht.

Beweis. Zu jeder in $\hat{E}$ abgeschlossenen Menge $F \subseteq \hat{E}$ und zu jedem Punkt $q \in \hat{E} - F$ existiert eine Funktion $f \in \mathfrak{S}$ mit $fF = 0$ und $fq = 1$. Also ist $E' = \beta_{\mathfrak{S}} E$ eine Erweiterung im üblichen Sinne von E sowie bikompakt und Hausdorffsch. Jede Funktion $f \in \mathfrak{S}$ kann auf genau eine Weise zu einer auf $\hat{E}$ stetigen Funktion $\hat{f}$ fortgesetzt werden; die Menge $\hat{\mathfrak{S}}$ aller Fortsetzungen $\hat{f}$ von Funktionen $f \in \mathfrak{S}$ besteht dann genau aus den beschränkten, gleichmäßig stetigen, reellen Funktionen $\hat{g}|\hat{E}$. Also ist $E'' = \beta_{\hat{\mathfrak{S}}} \hat{E}$ eine bikompakte, Hausdorffsche Erweiterung von E im üblichen Sinne. Nach Konstruktion liegt E'' in derselben Erweiterungsklasse $\mathfrak{C}E$ wie E'. Nach Satz 7 existiert also eine E-identische Homöomorphie von E'' auf E'. Hieraus folgt die Behauptung.

Zur Freudenthalschen Erweiterung [5] siehe H. Bauer [3].

§ 5. Kriterien für Zugehörigkeit zweier Räume zur gleichen Erweiterungsklasse.

Es sei E ein topologischer Raum; h bzw. k bedeute Bildung der abgeschlossenen Hülle bzw. des offenen Kerns in E. Mit $\mathfrak{R}E$ bezeichnen wir fernerhin den Verein aller regulär offenen Mengen G von E und aller regulär abgeschlossenen Mengen F von E. Es besteht also $\mathfrak{R}E$ aus allen Mengen $R \subseteq E$, für welche entweder $khR = R$ oder $hkR = R$ ist. Mit $\mathfrak{G}E$ bezeichnen wir den Verein aller regulär offenen Mengen von E.

Sind E' und E'' zwei topologische Räume mit den Topologien h' und h'', so heißt ein Isomorphismus Φ[28]) von $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}E'$ auf $\mathfrak{G}'' = \mathfrak{G}E''$ *regulär*, wenn für je zwei Mengen $G_1', G_2' \in \mathfrak{G}'$ und ihre Bilder $G_1'' = \Phi G_1'$, $G_2'' = \Phi G_2' \in \mathfrak{G}''$

(41) aus $h' G_1' \subseteq G_2'$ folgt $h'' G_1'' \subseteq G_2''$ und umgekehrt.

Sind die Räume E' und E'' Erweiterungen des Raumes E, so heißt ein Isomorphismus Φ eines Vereins $\mathfrak{V}'$ von Teilmengen von E' auf einen Verein $\mathfrak{V}''$ von Teilmengen von E'' *E-identisch*, wenn für jede Menge $V' \in \mathfrak{V}'$ und ihr Bild $V'' = \Phi V' \in \mathfrak{V}''$

$$E \cap V' = E \cap V'' \tag{42}$$

ist.

Wir behaupten zunächst u. a., daß die Begriffe eines Isomorphismus von $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}E'$ auf $\mathfrak{R}'' = \mathfrak{R}E''$ und eines regulären Isomorphismus von $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}E'$ auf $\mathfrak{G}'' = \mathfrak{G}E''$ äquivalent sind.

---

[28]) Eine eineindeutige Abbildung Φ eines Vereins $\mathfrak{V}$ von Teilmengen einer Menge E auf einen Verein $\mathfrak{V}'$ von Teilmengen einer Menge E' heißt ein Isomorphismus, wenn aus $A \subseteq B$, A, $B \in \mathfrak{V}$, stets $\Phi A \subseteq \Phi B$ folgt und umgekehrt.

Lemma 3. *Es seien E' und E'' zwei topologische Räume. Ist Φ ein Isomorphismus von $\mathfrak{R}'$ auf $\mathfrak{R}''$, so gilt*

$$\Phi h' G' = h'' G'' \tag{43}$$

für jede Menge $G' \in \mathfrak{G}'$ und ihr Bild $G'' = \Phi G' \in \mathfrak{G}''$. Die Verengerung von Φ auf $\mathfrak{G}'$ ist ein regulärer Isomorphismus Ψ von $\mathfrak{G}'$ auf $\mathfrak{G}''$. — Ist umgekehrt Ψ ein regulärer Isomorphismus von $\mathfrak{G}'$ auf $\mathfrak{G}''$, so läßt sich Ψ auf genau eine Weise zu einem Isomorphismus Φ von $\mathfrak{R}'$ auf $\mathfrak{R}''$ fortsetzen.

Sind E' und E'' reguläre Räume und zugleich Erweiterungen eines Raumes E, so ist mit Φ auch Ψ E-identisch und umgekehrt.

Beweis. Es sei Φ ein Isomorphismus von $\mathfrak{R}'$ auf $\mathfrak{R}''$. Wir zeigen zunächst, daß $\mathfrak{G}'$ durch Φ in $\mathfrak{G}''$ abgebildet wird und (43) gilt: Es sei G' eine regulär offene Menge aus $\mathfrak{R}'$ und $F' = h'G'$ ihre abgeschlossene Hülle. Wir unterscheiden zwei Fälle: 1. Es sei $G' \subset F'$. Für $G'' = \Phi G'$ und $F'' = \Phi F'$ ist dann $G'' \subset F''$. Angenommen, es wäre nicht $F'' = h''G''$. Dann ist der offene Kern $H'' = k''(F'' - G'')$ von $F'' - G''$ nicht leer. Es sei K'' der offene Kern $k''h''H''$ der abgeschlossenen Hülle $h''H''$. Dann ist K'' eine nichtleere Menge aus $\mathfrak{R}''$, es gilt $K'' \subset F''$ und es existiert in $\mathfrak{R}''$ außer der leeren Menge keine gemeinsame Teilmenge von G'' und K''. Die Menge $\Phi^{-1}K'' = K'$ ist folglich eine nichtleere Menge aus $\mathfrak{R}'$, es gilt $K' \subset F'$ und es existiert außer der leeren Menge keine gemeinsame Teilmenge von G' und K'. Dies steht aber im Widerspruch zu $F' = h'G'$. Also ist $F'' = h''G''$, d. h. es gilt (43). Wegen $G'' \subset F''$ ist ferner G'' regulär offen. — 2. Es sei $G' = F'$. Angenommen, $G'' = \Phi G'$ wäre nicht regulär offen. Für $F'' = \Phi F'$ ist dann $k''F'' \subset F''$ wegen $F'' = G''$. Hieraus folgt $\Phi^{-1}k''F'' \subset F'$; nach dem Fall 1., angewandt auf Φ^{-1} statt Φ, ist $h'\Phi^{-1}k''F'' = F'$. Also ist F' nicht regulär offen, im Widerspruch zu $G' = F'$. Somit ist, wie behauptet, G'' regulär offen. G'' ist auch regulär abgeschlossen. Wäre nämlich $G'' \subset h''G''$, also $G' \subset \Phi^{-1}h''G''$, so wäre nach Fall 1., angewandt auf Φ^{-1} statt Φ, auch $G' \subset h'\Phi^{-1}G'' = h'G'$. Dies widerspricht der Voraussetzung, wonach $G' = h'G'$ ist. Folglich ist G'' zugleich regulär offen und regulär abgeschlossen, also $\Phi h'G' = \Phi G' = G'' = h''G''$, d. h. es gilt auch hier (43).

Durch Anwendung des bisher Bewiesenen auf den Isomorphismus Φ^{-1} von $\mathfrak{R}''$ auf $\mathfrak{R}'$ folgt, daß $\Phi^{-1}G'' \in \mathfrak{G}'$ für jede Menge $G'' \in \mathfrak{G}''$ ist. Also ist Φ, nur auf $\mathfrak{G}'$ betrachtet, ein Isomorphismus Ψ von $\mathfrak{G}'$ auf $\mathfrak{G}''$. Dieser ist regulär, da aus $h'G_1' \subseteq G_2'$ folgt $h''\Phi G_1' = \Phi h' G_1' \subseteq \Phi G_2'$, also $h''\Psi G_1' \subseteq \Psi G_2'$; die Anwendung dieses Ergebnisses auf Ψ^{-1} statt Ψ ergibt, daß aus $h''\Psi G_1' \subseteq \Psi G_2'$ auch umgekehrt $h'G_1' \subseteq G_2'$ folgt.

Nun sei umgekehrt ein regulärer Isomorphismus Ψ von $\mathfrak{G}'$ auf $\mathfrak{G}''$ gegeben. Wenn Ψ überhaupt zu einem Isomorphismus Φ von $\mathfrak{R}'$ auf $\mathfrak{R}''$ fortgesetzt werden kann, so gilt (43). Da jede regulär abgeschlossene Menge F' die Hülle ihres regulär offenen Kerns $G' = k'F'$ ist, muß also $\Phi F' = h''\Psi G'$ sein. Daher kann Ψ auf höchstens eine Weise zu einem Isomorphismus Φ von $\mathfrak{R}'$ auf $\mathfrak{R}''$ fortgesetzt werden. Setzen wir $\Phi F' = h''\Psi k'F'$ für jede regulär abgeschlossene Menge F' und $\Phi G' = \Psi G'$ für jede regulär offene Menge G', so wird hierdurch

auch wirklich ein Isomorphismus Φ von $\mathfrak{R}'$ auf $\mathfrak{R}''$ definiert. Dies folgt mühelos bei Beachtung von (41).

Nun seien E' und E'' zwei reguläre Räume und Erweiterungen eines Raumes E. Daß mit Φ auch Ψ E-identisch ist, ist trivial. Umgekehrt sei Ψ ein E-identischer, regulärer Isomorphismus von $\mathfrak{S}'$ auf $\mathfrak{S}''$. Wir behaupten, daß auch seine Fortsetzung zu einem Isomorphismus Φ von $\mathfrak{R}'$ auf $\mathfrak{R}''$ E-identisch ist. Es genügt zu zeigen, daß $E \cap F' = E \cap F''$ für jede regulär abgeschlossene Menge $F' \in \mathfrak{R}'$ und ihr Bild $F'' = \Phi F' \in \mathfrak{R}''$ gilt. Es sei p ein Punkt von E, welcher nicht in F'' liegt. Es ist $F'' = h'' \Psi G'$, wenn G' den offenen Kern $k'F'$ von F' in E' bezeichnet. Da F'' abgeschlossen und E'' ein regulärer Raum ist, existieren regulär offene Mengen U'' und V'' in E'' mit $p \in U''$, $F'' = h'' \Psi G' \subseteq V''$ und $U'' \cap V'' = 0$. Die Urbilder $U' = \Psi^{-1} U''$ und $V' = \Psi^{-1} V''$ sind regulär offen in E' und es gilt $F' = h' G' \subseteq V'$, $U' \cap V' = 0$, ferner $p \in U'$, da Ψ E-identisch ist. Also kann p kein Punkt von F' sein und es gilt $E \cap F' \subseteq E \cap F''$. Durch Anwendung dieses Ergebnisses auf Ψ^{-1} bzw. Φ^{-1} statt Ψ bzw. Φ folgt $E \cap F'' \subseteq E \cap F'$. Also ist Φ E-identisch.

Satz 19. *Zwei T_1-Räume E' und E'' seien Erweiterungen des Raumes E. Damit E' und E'' in derselben Erweiterungsklasse $\mathfrak{E}E$ von E liegen, ist notwendig, falls E' und E'' normal sind, und hinreichend, falls E' und E'' regulär sind, jede der beiden folgenden Bedingungen*:

a) *Es existiert ein E-identischer Isomorphismus von $\mathfrak{R}E'$ auf $\mathfrak{R}E''$.*

b) *Es existiert ein E-identischer, regulärer Isomorphismus von $\mathfrak{S}E'$ auf $\mathfrak{S}E''$.*

Beweis. Nach dem Lemma 3 genügt es, den die Bedingung b) betreffenden Teil der Behauptung zu beweisen.

Die Bedingung b) ist *notwendig*. E' und E'' seien normale T_1-Räume und in derselben Erweiterungsklasse von E gelegen. Nach § 4 liegt die ČECHsche Erweiterung $\beta E'$ in der Hauptklasse von E', folglich liegen E' und $\beta E'$ in derselben Erweiterungsklasse von E; entsprechendes gilt für E'' und $\beta E''$. Somit liegen $\beta E'$ und $\beta E''$ in derselben Erweiterungsklasse $\mathfrak{E} = \mathfrak{E} E$ von E. Da $\beta E'$ und $\beta E''$ Räume $\beta_{\mathfrak{E}} E$ sind, existiert nach Satz 7 eine E-identische Homöomorphie von $\beta E'$ auf $\beta E''$. Folglich existiert ein E-identischer, regulärer Isomorphismus von $\mathfrak{S}(\beta E')$ auf $\mathfrak{S}(\beta E'')$. Es genügt daher zu zeigen, daß zwischen $\mathfrak{S}E'$ und $\mathfrak{S}(\beta E')$ sowie zwischen $\mathfrak{S}E''$ und $\mathfrak{S}(\beta E'')$ ein E-identischer, regulärer Isomorphismus besteht. Wir zeigen dies etwa für $\mathfrak{S}E'$ und $\mathfrak{S}(\beta E')$; für $\mathfrak{S}E''$ und $\mathfrak{S}(\beta E'')$ verläuft der Beweis analog. h' bzw. h^* bezeichne die abgeschlossene Hülle in E' bzw. $\beta E'$, k' bzw. k^* den offenen Kern in E' bzw. $\beta E'$.

Wir ordnen jeder Menge G^* aus $\mathfrak{S}(\beta E')$ ihren Durchschnitt $G' = G^* \cap E'$ mit E' als Bild ΦG^* zu. Da E' ein dichter Unterraum von $\beta E'$ ist, wird $\mathfrak{S}(\beta E')$ durch Φ isomorph auf $\mathfrak{S} E'$ abgebildet; für jede Menge $G' \in \mathfrak{S}E'$ gilt $\Phi^{-1} G' = k^* h^* G'$. Der Isomorphismus Φ ist regulär: aus $h^* G_1^* \subseteq G_2^*$ folgt $E' \cap h^* G_1^* \subseteq \Phi G_2^*$ zufolge der Definition von Φ; es ist aber $h' \Phi G_1^* = E' \cap$ $\cap h^* \Phi G_1^*$ und $h^* \Phi G_1^* = h^* G_1^*$, also $h' \Phi G_1^* \subseteq \Phi G_2^*$ für je zwei Mengen G_1^*, $G_2^* \in \mathfrak{S}(\beta E')$. Umgekehrt seien G_1' und G_2' Mengen aus $\mathfrak{S}E'$ mit $h' G_1' \subseteq G_2'$. Setzen wir $F_1' = h' G_1'$ und $F_2' = E' - G_2'$, so sind F_1' und F_2' in E' fremde,

abgeschlossene Mengen. Da $\beta E'$ wegen der Normalität von E' gleich der WALLMANschen Erweiterung $\omega E'$ von E' ist[29]), sind auch $h^* F_1'$ und $h^* F_2'$ fremd. Hieraus folgt $h^* G_1^* \subseteq G_2^*$ mit $G_1^* = \Phi^{-1} G_1'$ und $G_2^* = \Phi^{-1} G_2'$, weil $G_1^* = k^* h^* G_1' \subseteq$ $\subseteq h^* F_1'$ und $\beta E' - G_2^* = h^* F_2'$ ist. Letzteres folgt so: es ist $\beta E' - G_2^* = \beta E' -$ $- k^* h^* G_2' = h^* (\beta E' - h^* G_2')$ sowie $E \cap (\beta E' - h^* G_2') = E' - h' G_2' = k' F_2'$ und somit $h^* F_2' = h^* k' F_2' = h^* (\beta E' - h^* G_2') = \beta E' - G_2^*$. Schließlich ist der Isomorphismus Φ E-identisch, da aus $E \subseteq E'$ und $\Phi G^* = G^* \cap E'$ folgt $\Phi G^* \cap E$ $= G^* \cap E$.

Die Bedingung b) ist *hinreichend*. E' und E'' seien reguläre T_1-Räume; zwischen $\mathfrak{G} E'$ und $\mathfrak{G} E''$ bestehe ein E-identischer, regulärer Isomorphismus Φ.

Es sei $\alpha E'$ die ALEXANDROFFsche Erweiterung von E' und $\alpha E''$ die ALEXANDROFFsche Erweiterung von E''. Nach dem Satz 17 liegt $\alpha E'$ in der Hauptklasse $\mathfrak{E}_0 E'$ von E'; wegen $E \subseteq E'$ hat dies zur Folge, daß E' und $\alpha E'$ in derselben Erweiterungsklasse von E liegen. Ebenso liegen E'' und $\alpha E''$ in derselben Erweiterungsklasse von E. Unsere Behauptung ist also bewiesen, wenn wir zeigen können, daß eine E-identische Homöomorphie φ von $\alpha E'$ auf $\alpha E''$ existiert; nach dem Satz 9 liegen dann nämlich auch $\alpha E'$ und $\alpha E''$ in derselben Erweiterungsklasse von E.

Aus den im Beweis von Satz 17 angegebenen charakteristischen Eigenschaften von $\alpha E'$ folgt[30]): für jeden Punkt $p^* \in \alpha E'$ ist die Spur in E' des Umgebungssystems von p^* in $\alpha E'$ ein maximaler regulärer Raster $\mathfrak{U}'(p^*)$; umgekehrt existiert zu jedem maximalen regulären Raster $\mathfrak{U}'$ in E' genau ein Punkt $p^* \in \alpha E'$ mit $\mathfrak{U}' = \mathfrak{U}'(p^*)$. Mit $\mathfrak{U}_0'$ bezeichnen wir jedes System mit folgenden zwei Eigenschaften: 1. $\mathfrak{U}_0'$ ist ein regulärer Raster in E' bestehend aus regulär offenen Mengen $G_0' \subseteq E'$; 2. ist $\mathfrak{U}_0^\times$ ein der Bedingung 1. genügendes System mit $\mathfrak{U}_0' \subseteq \mathfrak{U}_0^\times$, so gilt $\mathfrak{U}_0' = \mathfrak{U}_0^\times$. Ist $\mathfrak{U}'$ ein maximaler regulärer Raster in E', so ist das System aller regulär offenen Mengen aus $\mathfrak{U}'$ ein solches System $\mathfrak{U}_0'$ und es besteht $\mathfrak{U}'$ aus allen offenen Obermengen von Mengen aus $\mathfrak{U}_0'$; umgekehrt ist für jedes System $\mathfrak{U}_0'$ das System aller offenen Obermengen von Mengen aus $\mathfrak{U}_0'$ ein maximaler regulärer Raster $\mathfrak{U}'$ in E'. Also entsprechen sich auch die Punkte $p^* \in \alpha E'$ und die Systeme $\mathfrak{U}_0'$ eineindeutig: $\mathfrak{U}_0' = \mathfrak{U}_0'(p^*)$. Da E' in $\alpha E'$ regulär eingebettet ist, bilden die Mengen $U_{G'}^*$, wobei G' eine beliebige in E' offene Menge und $U_{G'}^*$ die größte in $\alpha E'$ offene Menge V^* mit $V^* \cap E' = G'$ ist, eine offene Basis $\mathfrak{B}^*$ von $\alpha E'$. Es ist aber auch das System $\mathfrak{B}_0^*$ aller Mengen $U_{G_0'}^*$ mit regulär offenem G_0' eine offene Basis von $\alpha E'$. Es sei nämlich $U_{G'}^*$ eine beliebige Menge aus $\mathfrak{B}^*$ und p^* ein beliebiger Punkt von $U_{G'}^*$, also $G' \in \mathfrak{U}'(p^*)$. Da $\mathfrak{U}'(p^*)$ ein maximaler regulärer Raster in E' ist, existiert eine in E' regulär offene Menge $G_0' \subseteq G'$ mit $G_0' \in \mathfrak{U}'(p^*)$; also ist $p^* \in U_{G_0'}^*$ und $U_{G_0'}^* \subseteq U_{G'}^*$. Hieraus folgt die Basiseigenschaft von $\mathfrak{B}_0^*$.

Zufolge der Eigenschaften des Isomorphismus Φ ist für jeden Punkt $p^* \in \alpha E'$ das System $\Phi\, \mathfrak{U}_0'(p^*)$ ein System $\mathfrak{U}_0''$ in E'' mit den (für E'' formulierten) Eigenschaften 1. und 2.; zu $\mathfrak{U}_0''$ existiert genau ein Punkt $p^{**} \in \alpha E''$ mit $\mathfrak{U}_0'' = \mathfrak{U}_0''(p^{**})$; wir setzen $\varphi p^* = p^{**}$. Dann ist φ eine eineindeutige

[29]) Vgl. G. NÖBELING [10], S. 161, Fußnote 1.

[30]) Vgl. auch Fußnote 27.

Abbildung von $\alpha E'$ auf $\alpha E''$. φ ist eine Homöomorphie, denn es wird die Basis $\mathfrak{B}_0^*$ von $\alpha E'$ auf die entsprechend definierte Basis $\mathfrak{B}_0^{**}$ von $\alpha E''$ abgebildet, da für jede regulär offene Menge G_0' in E' gilt $\varphi\, U^*_{G_0'} = U^{**}_{\Phi G_0'}$. Um zu zeigen, daß φ E-identisch ist, sei p ein beliebiger Punkt aus E. Da der Isomorphismus ΦE-identisch ist, gilt $G_0' \cap E = \Phi G_0' \cap E$ für jede Menge $G_0' \in \mathfrak{U}_0'(p)$; also ist $\Phi\, \mathfrak{U}_0'(p) = \mathfrak{U}_0''(p)$.

Damit ist der Satz 19 bewiesen.

Für Erweiterungen E' und E'' von E im üblichen Sinne beweisen wir schließlich noch:

Satz 20. *Es seien E' und E'' zwei Erweiterungen des Raumes E im üblichen Sinne. Hinreichend und im Falle normaler Räume E' und E'' auch notwendig dafür, daß E' und E'' in derselben Erweiterungsklasse von E liegen, ist die folgende Bedingung: besitzen zwei offene Mengen von E fremde, abgeschlossene Hüllen in E', so auch in E'' und umgekehrt.*

Beweis. Die Bedingung ist *hinreichend*. Die Funktion $f \in \mathfrak{C}E$ sei zu einer stetigen Funktion auf E' fortsetzbar. Nach Vulich [12] besitzen dann die Urbildmengen $[f < \alpha]$ und $[f > \beta]$ für je zwei reelle Zahlen $\alpha < \beta$ fremde Hüllen in E', also auch in E''. Folglich kann f zu einer auf E'' stetigen Funktion fortgesetzt werden. Analog zeigt man, daß jede Funktion $f \in \mathfrak{C}E$, die auf E'' stetig fortgesetzt werden kann, auch auf E' stetig fortgesetzt werden kann.

Die Bedingung ist für normale Räume E' und E'' *notwendig*. Besitzen zwei in E offene Mengen U_0 und U_1 fremde Hüllen in E', so existiert zufolge der Normalität von E' eine Funktion $f \in \mathfrak{C}E$ mit $f U_0 = 0$ und $f U_1 = 1$, welche auf E' stetig fortgesetzt werden kann. Da E' und E'' in derselben Erweiterungsklasse von E liegen, kann f auch auf E'' stetig fortgesetzt werden. Folglich besitzen U_0 und U_1 auch in E'' fremde Hüllen. Analog verläuft der Beweis in der umgekehrten Richtung.

§ 6. Schlußbemerkungen.

Zwei topologische Räume E' und E'' können stets als Erweiterungen des leeren Raumes $E = \theta$ aufgefaßt werden. Wenngleich auch die Untersuchungen des § 2 nur für nichtleere Räume E sinnvoll sind[31]), so kann die Definition der Erweiterungsklassen $\mathfrak{C}E$ auch für den Fall $E = \theta$ ausgesprochen werden. Statt von Erweiterungsklassen $\mathfrak{C}\theta$ des leeren Raumes sprechen wir lieber von *Raumklassen* $\mathfrak{R}$, welche also wie folgt definiert sind:

Wir sagen: zwei topologische Räume E' und E'' liegen in derselben Raumklasse $\mathfrak{R}$, wenn die F-Algebren $\mathfrak{C}E'$ und $\mathfrak{C}E''$ isomorph sind. Es entsprechen sich also eineindeutig die Raumklassen und die Klassen von isomorphen F-Algebren.

Für die Raumklassen gilt nach den Sätzen 1, 2 und 4[32]):

---

[31]) Bisher haben wir einen topologischen Raum stillschweigend stets als nicht leer angenommen.

[32]) Rein formal ergibt sich dies auch aus den Sätzen 5 bis 7, indem man dort $E = \theta$ setzt.

In jeder Raumklasse $\mathfrak{R}$ liegt ein bis auf Homöomorphien eindeutig bestimmter bikompakter HAUSDORFF-*Raum $E_{\mathfrak{R}}$. Jeder Raum E' aus $\mathfrak{R}$ kann auf einen dichten Unterraum von $E_{\mathfrak{R}}$ stetig abgebildet werden.*

Unmittelbar aus der Definition der Erweiterungsklassen $\mathfrak{E}\,E$ folgt:

Liegen zwei Räume E' und E'' in derselben Erweiterungsklasse $\mathfrak{E}\,E$ eines Raumes E, so liegen sie auch in derselben Raumklasse $\mathfrak{R}$. Insbesondere liegt mit einem Raum auch jede Erweiterung E' von E aus der Hauptklasse $\mathfrak{E}_0 E$ in derselben Raumklasse $\mathfrak{R}$.

In Analogie zu Satz 9 gilt:

Homöomorphe Räume E' und E'' liegen in derselben Raumklasse $\mathfrak{R}$.

Der Beweis des Satzes 19 bleibt auch für den Fall $E = \theta$ richtig. Wir erhalten daher:

Damit zwei T_1-Räume E' und E'' in derselben Raumklasse $\mathfrak{R}$ liegen, ist notwendig, falls E' und E'' normal sind, und hinreichend, falls E' und E'' regulär sind, jede der beiden folgenden Bedingungen:

a) *es existiert ein Isomorphismus von $\mathfrak{N}\,E'$ auf $\mathfrak{N}\,E''$;*

b) *es existiert ein regulärer Isomorphismus von $\mathfrak{S}\,E'$ auf $\mathfrak{S}\,E''$* [33]).

Literatur.

[1] P. ALEXANDROFF: Bikompakte Erweiterungen topologischer Räume. Rec. math. Moscou, n. Ser. **5**, 403—423 (1939). — [2] H. BAUER: Kennzeichnende Eigenschaften der ALEXANDROFFschen Erweiterung αE eines topologischen Raumes. Bull. Soc. Math. Grèce **30** (1955). [3] H. BAUER: Trennungsrelationen in topologischen Räumen. (Erscheint voraussichtlich in Fund. math.) — [4] E. ČECH: On bicompact spaces. Ann. of Math. **38**, 823 bis 844 (1937). — [5] H. FREUDENTHAL: Enden und Primenden. Fund. math. **39**, 189 bis 210 (1952). — [6] I. GELFAND: Normierte Ringe. Rec. math. Moscou, n. Ser. **9**, 3—24 (1941). — [7] I. GELFAND u. G. ŠILOV: Über verschiedene Methoden der Einführung der Topologie in die Menge der maximalen Ideale eines normierten Ringes. Rec. math. Moscou, n. Ser. **9**, 25—38 (1941). — [8] M. KATĚTOV: On H-closed extensions of topological spaces. Časopis. Mat. Fys. **72**, 17—31 (1947). — [9] L. H. LOOMIS: An introduction to abstract harmonic analysis. Toronto-New York-London: D. van Nostrad Company, Inc. 1953. — [10] G. NÖBELING: Grundlagen der analytischen Topologie. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1954. — [11] M. H. STONE: Applications of the theory of Boolean rings to general topology. Trans. Amer. Math. Soc. **41**, 375—481 (1937). — [12] B. Z. VULICH: Über die Fortsetzung stetiger Funktionen in topologischen Räumen. Mat. Sbornik, n. Ser. **30** (**72**), 167—170 (1952). — [13] H. WALLMAN: Lattices and topological spaces. Ann. of Math. **39**, 112—126 (1938).

(Eingegangen am 16. Februar 1955.)

[33]) Für zwei bikompakte HAUSDORFF-Räume E' und E'' ist also jede der beiden Bedingungen a) und b) notwendig und hinreichend dafür, daß E' und E'' homöomorph sind.

BIEBERBACH, L.
Math. Annalen, Bd. 130, S. 46—86 (1955).

Zur Euklidischen Geometrie der Kreisbogendreiecke*.

Von

LUDWIG BIEBERBACH in Berlin.

In einem merkwürdigen und bemerkenswerten Buch[1]) hat W. K. B. HOLZ 1944 die Verallgemeinerung der Euklidischen Dreiecksgeometrie auf gewisse Typen von Kreisbogendreiecken angeregt. Insbesondere hat ihn eine heuristische hier nicht wiederzugebende Betrachtung zu der Einsicht geführt, daß schöne Ergebnisse für diejenigen Kreisbogendreiecke zu erwarten stehen, deren Winkel in den Ecken Vielfache von π sind, oder die durch Inversion aus dem Euklidischen Dreieck hervorgehen. Die in Betracht kommenden Gebilde sind aus Fig. 1 abzulesen. Es handelt sich um Kreisbogendreiecke mit den Ecken $A\,B\,C$, nämlich neben dem geradlinigen Dreieck $\varDelta$ mit den Seiten a, b, c, um die Dreikreise $'\varDelta$, deren Seiten $'a, 'b, 'c$ den Kreisen mit den Mittelpunkten $'A, 'B, 'C$ angehören und die einander paarweise in den Ecken $A\,B\,C$ berühren; ferner um Kreisbogendreiecke, deren Seiten sämtlich dem Umkreis $^{\circ}\varDelta$ von $A\,B\,C$ mit dem Mittelpunkt U angehören, und endlich um die Inversdreiecke $^{\bullet}\varDelta$, deren Seiten $^{\bullet}a, {}^{\bullet}b, {}^{\bullet}c$ auf Kreisen durch U liegen. Sie haben ihren Namen daher, daß diese Kreise aus den Seitengeraden des Dreiecks $A\,B\,C$ durch Inversion an dem Umkreis $^{\circ}\varDelta$ hervorgehen. Insbesondere ist das in Fig. 1 gestrichelte Gebilde das zu den Seitenverlängerungen von $\varDelta$ inverse Dreieck $^{\bullet}\varDelta$. Die Mittelpunkte $'A, 'B, 'C$ der Kreise, auf denen die Seiten der Drei-

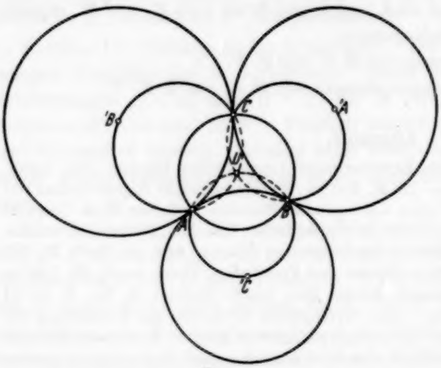

Fig. 1

* Herrn ERNST JACOBSTHAL zum 16. Oktober 1952.

[1]) WALTER K. B. HOLZ: Das ebene obere Dreieck (Berechnung und Erzeichnung von Dreiseit und Dreikreis aus je drei Stücken gleicher Art). Eine Aufgabenstellung. 83 Seiten. Hagen i. W., im Selbstverlag 1944. Von Herrn HOLZ stammen auch die in dieser Arbeit benutzten Bezeichnungen. *Zusatz bei der Korrektur:* Herr HOLZ hat seine Auffassungen neuerdings — mit zum Teil abgeänderten Bezeichnungen — wieder dargelegt: Der Dreikreis und seine primitiven Lösungen Dreieck, Dreikreis, Umkreis. Der math. u. nat. Unterricht. 8, 108—112 (1955) — Das Euklidische Dreieck und seine engere Kreisbogenverwandtschaft. (Probleme spezieller Dreipunkte.) Mit 25 Zeichnungen des Verfassers. Hagen; Otto Grabow 1955.

kreise $'\Delta$ liegen, sind die Ecken des dem Umkreis $^\circ\Delta$ von Δ in den Ecken $A\,B\,C$ umbeschriebenen Euklidischen Dreiecks. Darin liegt die Tatsache begründet, daß die Seiten der Dreikreise $'\Delta$ auf dem Umkreis $^\circ\Delta$ senkrecht stehen. Die Seiten der Inversdreiecke liegen auf den Umkreisen der Dreiecke $BC'A$, $CA'B$, $AB'C$. Es bieten alle Kreisbogendreiecke Interesse, die ABC zu Ecken haben und deren Seiten irgendwelche Bogen der genannten Kreise sind. Ich werde aber die folgende Betrachtung auf einige Typen derselben beschränken.

Hauptgegenstand dieser Arbeit soll der Beweis der von W. K. Holz begründeten Vermutung sein, daß für die aufgezählten Figuren Übertragungen von Sätzen der Euklidischen Dreiecksgeometrie gelten. Insbesondere werden sich dabei die Kongruenzsätze und ein Analogon des Pythagoräischen Lehrsatzes ergeben.

Dreikreise.

Unter einem Dreikreis verstehe ich allgemein die Figur von drei sich in drei verschiedenen Punkten paarweise berührenden Kreisbogen der Euklidischen Ebene. Diese drei Punkte heißen die Ecken, die sie verbindenden Kreisbogen die Seiten des Dreikreises. Trivial ist der Fall, daß alle drei Bogen dem gleichen Kreis angehören. Dahin gehört z. B. die in drei Bogen aufgeteilte Peripherie eines Kreises (Umkreis $^\circ\Delta$ der Fig. 1) oder auch der Fall, daß die drei Bogen eine mehrfache Bedeckung der ganzen Kreisperipherie oder eines Teiles derselben ausmachen. Gehören zwei Seiten eines Dreikreises der gleichen Kreisperipherie an, so gehört auch die dritte Seite dieser Peripherie an, da man ja in ihren beiden Endpunkten die Tangenten kennt. Es bleibt also nur der Fall, daß die drei Seiten des Dreikreises drei verschiedenen Kreisen angehören. Dann ist aber der Kreis durch die drei Ecken ein gemeinsamer Orthogonalkreis der drei Seitenkreise. Er kann in eine Gerade ausarten, oder aber sein Mittelpunkt ist das gemeinsame Potenzzentrum der drei Kreise. Die Ausartung tritt ein, wenn die drei Berührungstangenten in den Ecken einander parallel sind. Anderenfalls schneiden sie sich im Potenzzentrum. Fig. 2 zeigt einen Ausartungsfall. Den Fall des Orthogonalkreises mit endlichem Radius kennen wir von Fig. 1.

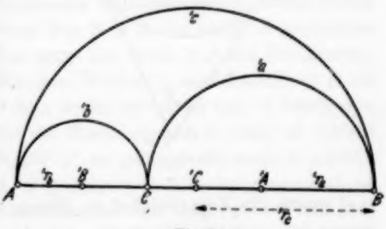

Fig. 2

Es sei noch bemerkt, daß die drei Winkel in den Ecken des Dreikreises im Falle dreier verschiedener Seitenkreise niemals alle drei gerade Vielfache von π sein können. Umläuft man nämlich das Dreikreis in passender Richtung, so gelangt man beim Passieren einer Ecke des Dreikreises vom Äußeren des Orthogonalkreises ins Innere, falls in der betreffenden Ecke der Winkel, um den sich diee orientierte Tangente bei dem Übergang von einer Seite zur nächsten dreht, ein gerades Vielfaches von π ist. Da man aber nach Vollendung des

Umlaufes zum Ausgangspunkt zurückkehrt, so kann dieser Durchgang durch die Peripherie des Orthogonalkreises nicht dreimal — oder nur einmal — eintreten.

Die wichtigsten Ergebnisse beziehen sich im folgenden auf Dreikreise, deren Seiten entweder ganz dem Inneren oder ganz dem Äußeren des gemeinsamen Orthogonalkreises angehören (Innendreikreise und Außendreikreise). Zunächst soll aber von Dreikreisen ganz im allgemeinen die Rede sein, unter der bloßen Annahme, daß die drei Seiten drei verschiedenen Kreisen angehören.

Man orientiert das Dreikreis, indem man die drei Ecken numeriert. Diese Numerierung soll durch die natürliche Reihenfolge der drei die Ecken bezeichnenden Buchstaben A, B, C gegeben sein. Die drei Ecken gehören einer Geraden g oder einem Kreis K an. Im Falle K bilden die drei Ecken zugleich die Ecken eines Euklidischen Dreiecks Δ, dessen Umkreis K ist. Durch die Numerierung der Ecken des Dreikreises $'\Delta$ werden g, K und Δ ihrerseits orientiert. Die durch die Numerierung der Ecken des Dreikreises $'\Delta$ ebenfalls orientierten Seiten des Dreikreises und ihre Euklidischen Längen werden mit $'a, 'b, 'c$ bezeichnet. Das können positive oder negative Zahlen sein. Entsprechend sind a, b, c die Seiten von Δ. Die Radien der Seitenkreise von $'\Delta$ werden mit $'r_a, 'r_b, 'r_c$ bezeichnet. Die Mittelpunkte der Seitenkreise seien $'A, 'B, 'C$. Der Fall, daß ein Seitenkreis in eine Gerade ausartet, soll nicht ausgeschlossen sein. Im Falle K sind $'A, 'B, 'C$ die Ecken eines weiteren Dreiecks, dessen Seiten in den Punkten A, B, C den Kreis K berühren. Je nachdem, ob das Dreieck mit den Ecken A, B, C spitzwinklig, rechtwinklig oder stumpfwinklig ist, soll das Dreikreis selbst spitzwinklig, rechtwinklig oder stumpfwinklig heißen. Die Fig. 3, 4, 5 geben Innendreikreise dieser drei Arten wieder. Im spitzwinkligen Fall ist das Dreieck $'A, 'B, 'C$ dem Kreis K umbeschrieben, im rechtwinkligen Fall rückt eine Ecke $'B$ ins Unendliche, im stumpfwinkligen Fall ist es dem Kreis K anbeschrieben. Die Zentriwinkel der Seiten des Dreikreises werden mit $'\alpha, '\beta, '\gamma$ bezeichnet. Ich nenne sie weiterhin kurz die *Winkel des Dreikreises*. Ich lege eine entgegen dem Uhrzeigersinn orientierte Ebene zugrunde und messe die Zentriwinkel in diesem Drehsinn. Den Dreikreis der Fig. 3 nenne ich negativ orientiert, weil das Innere von Δ und von K zur rechten des angenommenen Umlaufsinnes $A\ B\ C$ liegt. Als Seiten von $'\Delta$ sind die im Inneren von K gelegenen Bogen der Seitenkreise genommen. Hier sind die Zentriwinkel positiv. Auch das Dreieck $'A, 'B, 'C$ ist negativ orientiert. Wir wollen aber die Dreikreise zunächst in voller Allgemeinheit nehmen und dementsprechend nicht nur den Fall berücksichtigen, daß die Seiten

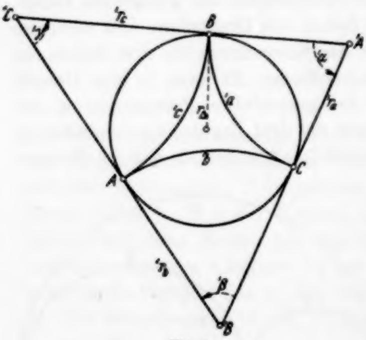

Fig. 3

des Dreikreises die kürzesten Verbindungsbogen seiner Ecken auf den Seitenkreisen sind, wie das in den Fig. 3, 4, 5 angenommen ist. Vielmehr verstehen wir unter der orientierten Seite $'a$ irgendeinen die Ecken $B\,C$ verbindenden Bogen des Seitenkreises, der von B nach C durchlaufen wird und orientiert ist. Dementsprechend kann sich der Zentriwinkel $'\alpha$ von dem in Fig. 3 mit $'\alpha$ bezeichneten Winkel im Vorzeichen und um beliebige Vielfache von $2\,\pi$ unterscheiden. Analog bei den Fig. 4, 5 und bei den anderen Winkeln $'\beta, '\gamma$. Dahin gehören insbesondere auch die Außendreikreise, aber auch Gebilde, bei denen die Seiten teils im Inneren, teils im Äußeren von K liegen, oder auch volle Peripherien der Seitenkreise enthalten. Eine Seite $'a$ kann z. B. in B beginnen, ein oder mehrmals den Kreis $'A\,('r_a)$ durchlaufen und dann erst in C zum Halt kommen.

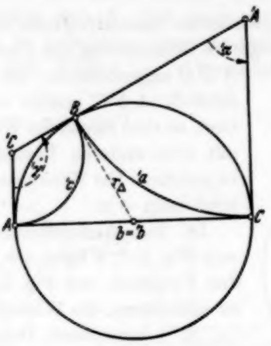

Fig. 4.

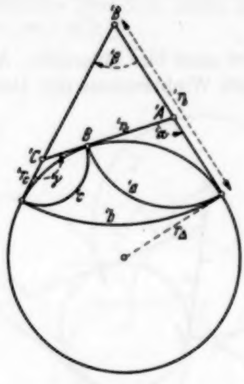

Fig. 5.

Die verschiedenen hier möglichen Fälle unterscheiden sich durch die Schranken, zwischen denen die Winkel $'\alpha, '\beta, '\gamma$ liegen, und durch die Winkelsumme. *Die Winkelsumme ist stets ein ungerades Vielfaches von π.* Denn denkt man sich z. B. im spitzwinkligen Fall von Fig. 3 in A die nach $'B$ gerichtete Normale des Dreikreises und verfolgt sie längs der Seite $A\,B$ des Dreikreises, so dreht sie sich um den Punkt $'C$ durch den Winkel $'\gamma$ und kommt in B als von B nach $'A$ gerichtete Normale an. Man drehe sie weiter um $'A$ durch den Winkel $'\alpha$. Dann gelangt sie nach C mit der Richtung von C nach $'A$. Dreht man sie endlich um $'B$ durch den Winkel $'\beta$, so gelangt sie nach A zurück und ist jetzt zum Schluß von A nach $'C$ gerichtet, d. h. entgegengesetzt zu ihrer Ausgangslage. Daher ist die Winkelsumme ein ungerades Vielfaches von π.

(1) $$'\alpha + '\beta + '\gamma = (2\,n + 1)\,\pi \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Ähnlich schließt man im rechtwinkligen und im stumpfwinkligen Fall. Beim spitzwinkligen Innendreikreis von Fig. 3 gilt

(2) $$0 < '\alpha < \pi,\ 0 < '\beta < \pi,\ 0 < '\gamma < \pi.$$

Daher ist hier

$$'\alpha + '\beta + '\gamma = \pi. \tag{3}$$

Beim rechtwinkligen Innendreikreis von Fig. 4 ist

$$0 < '\alpha < \pi, \quad 0 < '\gamma < \pi. \tag{4}$$

Daher gilt auch hier (3) mit $'\beta = 0$, d. h.

$$'\alpha + '\gamma = \pi. \tag{3'}$$

Beim stumpfwinkligen Innendreikreis von Fig. 5 ist

$$0 < '\alpha < \pi, \quad -\pi < '\beta < 0, \quad 0 < '\gamma < \pi. \tag{5}$$

Daher ist auch hier (3) erfüllt. Alle gleich orientierten Innendreikreise haben die gleiche Winkelsumme (3). Dabei ist die negative Orientierung des Dreiecks $A\,B\,C$ angenommen. Ist dies Dreieck $A\,B\,C$ positiv orientiert, so sind sämtliche Winkel mit dem anderen Vorzeichen zu nehmen. Die Winkelsumme wird dann $-\pi$.

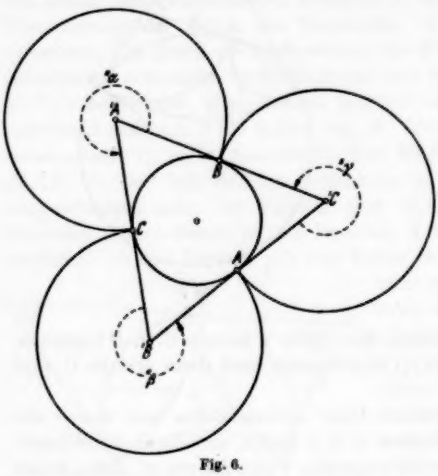

Fig. 6.

In den Außendreikreisen von Fig. 6, 7, 8 habe ich, um den Vergleich mit Fig. 3, 4, 5 zu erleichtern, die Winkel mit $''\alpha, ''\beta, ''\gamma$ bezeichnet. Dann ist im Falle des negativ orientierten spitzwinkligen Außendreikreises von Fig. 6

$$\begin{aligned} -'\alpha + ''\alpha &= 2\pi, \\ -'\beta + ''\beta &= 2\pi, \\ -'\gamma + ''\gamma &= 2\pi. \end{aligned} \tag{6}$$

Daher wird jetzt

$$\pi < ''\alpha < 2\pi, \quad \pi < ''\beta < 2\pi, \quad \pi < ''\gamma < 2\pi, \tag{7}$$

und die Winkelsumme ist

$$''\alpha + ''\beta + ''\gamma = 5\pi. \tag{8}$$

Beim rechtwinkligen negativ orientierten Außendreikreis ist nach Fig. 4 und 7

$$'\alpha - ''\alpha = 2\pi, \quad '\gamma - ''\gamma = 2\pi \tag{9}$$

$$-2\pi < ''\alpha < -\pi, \quad -2\pi < ''\gamma < -\pi \tag{10}$$

$$''\alpha + ''\gamma = -3\pi. \tag{11}$$

Endlich gilt nach Fig. 5 und 8 beim negativ orientierten stumpfwinkligen

Außendreikreis

(12) $$'\alpha - ''\alpha = 2\pi,\quad '\beta - ''\beta = -2\pi,\quad '\gamma - ''\gamma = 2\pi$$

(13) $$-2\pi < ''\alpha < -\pi,\quad \pi < ''\beta < 2\pi,\quad -2\pi < ''\gamma < -\pi$$

(14) $$''\alpha + ''\beta + ''\gamma = -\pi.$$

Bei positiver Orientierung der Außendreikreise wechseln sämtliche Winkel ihr Vorzeichen. Von den hier hervorgehobenen Fällen der Innen- und der Außendreikreise unterscheiden sich alle anderen Dreikreise dadurch, daß ein oder einige Winkel sich im Vorzeichen oder um Vielfache von 2π ändern. Das bedeutet z. B., daß man ein negativ orientiertes Dreikreis bilden kann, teils aus Bogen im Innern, teils aus Bogen im Äußeren von K, daß man mit anderen Worten in beliebiger Auswahl teils Winkel $'\alpha, '\beta, '\gamma$ teils Winkel $''\alpha$, $''\beta, ''\gamma$ nehmen kann

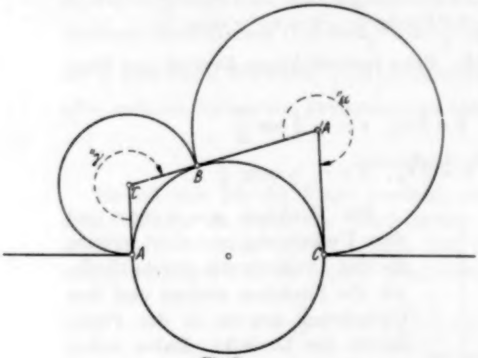

Fig. 7.

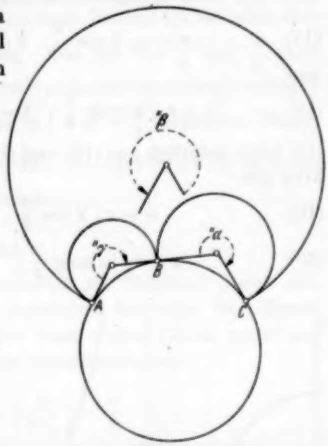

Fig. 8.

und diese zudem noch nach Belieben um Vielfache von 2π ändern kann, so daß die Seiten des Dreikreises dann teils im Inneren, teils im Äußeren von K verlaufen und auch voll durchlaufene Peripherien in den Seiten enthalten sein können.

Ich wende mich nun den *Beziehungen* zu, die *zwischen den verschiedenen Stücken eines Dreikreises* bestehen. Außer den schon genannten Stücken, nämlich den Seiten, den Winkeln, den Radien der Seiten, ziehe ich noch den Radius r_Δ des Umkreises heran. Diesen letzteren will ich stets positiv annehmen. Das Vorzeichen der Winkel ist bereits bestimmt, da festgelegt wurde, in welchem Drehsinn die Winkel gemessen werden sollen. Auch für die Außendreikreise bezeichne ich wie für alle übrigen die Winkel wieder mit $'\alpha, '\beta, '\gamma$. Dann gelten die folgenden Beziehungen, die man aus den Figuren abliest, für jedes Dreikreis, dessen Orthogonalkreis ein echter Kreis ist:

(15) $$'a = 'r_a\,'\alpha,\quad 'b = 'r_b\,'\beta,\quad 'c = 'r_c\,'\gamma,$$

(16) $$'r_a = r_\Delta \operatorname{cotg}\frac{'\alpha}{2},\quad 'r_b = r_\Delta \operatorname{cotg}\frac{'\beta}{2},\quad 'r_c = r_\Delta \operatorname{cotg}\frac{'\gamma}{2}.$$

Durch diese Formeln wird zugleich über die Vorzeichen der Radien $'r_a$, $'r_b$, $'r_c$ und auch der Seiten $'a, 'b, 'c$ verfügt. Natürlich entfallen die mittleren Beziehungen beim rechtwinkligen Dreikreis. Den rechten bzw. den stumpfen Winkel nehme ich stets bei der Ecke B an. Aus den Beziehungen (2), (4) und (5) sieht man, daß beim negativ orientierten Innendreikreis die Seiten $'a, 'b, 'c$ positiv ausfallen. Es ist dann nämlich stets $'r_a > 0$ und $'r_c > 0$, aber $'r_b > 0$ beim spitzwinkligen und $'r_b < 0$ beim stumpfwinkligen negativ orientierten Innendreikreis. Nehmen wir noch ein Beispiel: Beim negativ orientierten spitzwinkligen Außendreikreis ist nach (7) und (16) $'r_a > 0$, $'r_b > 0$, $'r_c > 0$ und daher nach (15) $'a < 0$, $'b < 0$, $'c < 0$. Weiter gilt beim spitzwinkligen und beim stumpfwinkligen Dreieck und Dreikreis

$$a = r_\Delta\, 2\cos\frac{'\alpha}{2}\,,\quad b = r_\Delta\, 2\cos\frac{'\beta}{2}\,,\quad c = r_\Delta\, 2\cos\frac{'\gamma}{2} \tag{17}$$

und

$$'a = r_\Delta\, '\alpha \operatorname{cotg}\frac{'\alpha}{2}\,,\quad 'b = r_\Delta\, '\beta \operatorname{cotg}\frac{'\beta}{2}\,,\quad 'c = r_\Delta\, '\gamma \operatorname{cotg}\frac{'\gamma}{2} \tag{18}$$

(18) folgt natürlich aus (15) und (16). Beim rechtwinkligen Dreieck und Dreikreis gilt

$$a = r_\Delta\, 2\cos\frac{'\alpha}{2}\,,\quad b = 2\, r_\Delta,\quad c = r_\Delta\, 2\cos\frac{'\gamma}{2} \tag{19}$$

$$'a = r_\Delta\, '\alpha \operatorname{cotg}\frac{'\alpha}{2}\,,\quad 'b = 2\, r_\Delta\,,\quad 'c = r_\Delta\, '\gamma \operatorname{cotg}\frac{'\gamma}{2}\,. \tag{20}$$

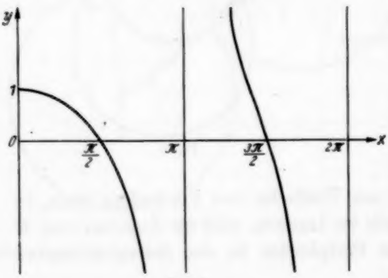

Fig. 9.

Die Funktion $y = x \operatorname{ctg} x$ und ihre Umkehrung $x = C(y)$ spielen für das Dreikreis die gleiche Rolle, wie die Funktion cosinus und ihre Umkehrung arc cos in der Planimetrie des Dreiecks. Daher sollen diese Funktionen zunächst betrachtet werden. Fig. 9 zeigt den Verlauf der beiden Funktionen. Die Funktion $x = C(y)$ erweist sich natürlich als unendlich vieldeutig. Man erkennt, daß zwischen zwei aufeinanderfolgenden Vielfachen von π genau einer der Werte x liegt, die $C(y)$ annimmt, mit dem Zusatz, daß für $y > 1$ keiner dieser Werte zwischen $-\pi$ und $+\pi$ anzutreffen ist. Über die Monotonie und die Konvexität der Funktion geben die beiden ersten Ableitungen Aufschluß. Es ist nämlich

$$y' = \operatorname{cotg} x - \frac{x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x \cos x - x}{\sin^2 x} = \frac{\sin 2x - 2x}{2\sin^2 x}\,,\quad y'' = -2\,\frac{\cos x\,(\operatorname{tg} x - x)}{\sin^3 x}\,. \tag{21}$$

Umkehrung der Formeln (18) oder (20) liefert[2])

$$\frac{'\alpha}{2} = C\left(\frac{'a}{2r_\Delta}\right),\quad \frac{'\beta}{2} = C\left(\frac{'b}{2r_\Delta}\right),\quad \frac{'\gamma}{2} = C\left(\frac{'c}{2r_\Delta}\right). \tag{22}$$

[2]) Die mittlere Formel (22) entfällt beim rechtwinkligen Dreikreis.

Es soll festgestellt werden, welchen der Werte der Funktion $C(y)$ man hier zu nehmen hat. Das richtet sich danach, in welchen Schranken die Winkel bei den zu betrachtenden Dreikreisen liegen. Nach Formel (2) und (4) hat man bei spitzwinkligen und bei rechtwinkligen negativ orientierten Innendreikreisen den in das Intervall $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ fallenden Wert bei $\frac{'\alpha}{2}, \frac{'\beta}{2}, \frac{'\gamma}{2}$ zu benutzen mit dem Zusatz, daß nach (3′) im rechtwinkligen Fall $'\beta = 0$ zu nehmen ist. Bei stumpfwinkligen negativ orientierten Innendreikreisen gilt (5). Man hat $\frac{'\alpha}{2}$ und $\frac{'\gamma}{2}$ wieder aus $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ zu nehmen, während man für $\frac{'\beta}{2}$ den im Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ liegenden Wert zu nehmen hat. Bei spitzwinkligen positiv orientierten Außendreikreisen hat man nach Formel (7) bei allen drei Winkeln einen Wert aus $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ zu nehmen. Das gilt für $\frac{'\alpha}{2}$ und $\frac{'\gamma}{2}$ auch im rechtwinkligen Fall, während man bei negativ orientierten stumpfwinkligen Außendreikreisen nach (13) für $\frac{'\alpha}{2}$ und $\frac{'\gamma}{2}$ die in $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ fallenden Werte, für $\frac{'\beta}{2}$ aber einen Wert aus $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ zu nehmen hat. Entsprechend hat man bei allen anderen Sorten von Dreikreisen zu überlegen.

Innendreikreise.

Es soll sich um die Frage handeln, inwieweit ein Dreikreis durch drei seiner Stücke im Sinne der Euklidischen Geometrie bestimmt ist. Zuerst seien die *drei Seiten gegeben*. Nach (22) hat man wegen (3) im spitz- und stumpfwinkligen Fall des negativ orientierten Innendreikreises

$$C\left(\frac{'a}{2r_\Delta}\right) + C\left(\frac{'b}{2r_\Delta}\right) + C\left(\frac{'c}{2r_\Delta}\right) = \frac{\pi}{2}, \tag{23}$$

während im rechtwinkligen Fall nach (3′)

$$C\left(\frac{'a}{2r_\Delta}\right) + C\left(\frac{'c}{2r_\Delta}\right) = \frac{\pi}{2} \tag{24}$$

gilt, dem Umstand entsprechend, daß auch für den hier zu benutzenden Zweig von $C(y)$ nach Bild 9 noch $C(1) = 0$ ist. Es erweist sich für die weitere Untersuchung der negativ orientierten Innendreikreise als zweckmäßig, auch für $C\left(\frac{'b}{2r_\Delta}\right)$ im stumpfwinkligen Fall den in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ fallenden Wert zu nehmen, und dafür in der Gleichung (23) in diesem Fall das mittlere Glied mit dem negativen Vorzeichen zu versehen. Dann haben wir die folgenden Beziehungen:

$$C\left(\frac{'a}{2r_\Delta}\right) + C\left(\frac{'b}{2r_\Delta}\right) + C\left(\frac{'c}{2r_\Delta}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{im spitzwinkligen Fall} \tag{25}$$

$$C\left(\frac{'a}{2r_\Delta}\right) + C\left(\frac{'c}{2r_\Delta}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{im rechtwinkligen Fall} \tag{26}$$

$$C\left(\frac{'a}{2r_\Delta}\right) - C\left(\frac{'b}{2r_\Delta}\right) + C\left(\frac{'c}{2r_\Delta}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{im stumpfwinkligen Fall.} \tag{27}$$

In diesen drei Formeln ist dann durchweg der ins Intervall $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ fallende Wert von $C(y)$ zu nehmen. Dann ist $C(0) = \frac{\pi}{2}$ und $C(1) = 0$. Aus (26) folgt mit (20)

Satz 1. Im rechtwinkligen Innendreikreis besteht als Analogon des pythagoräischen Satzes die Gleichung

$$C\left(\frac{'a}{'b}\right) + C\left(\frac{'c}{'b}\right) = \frac{\pi}{2}. \tag{28}$$

Dabei ist $'b$ die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite.

Da man vermittelst (18) r_Δ durch eine Seite und den ihr gegenüberliegenden Winkel ausdrücken kann, enthalten (25) und (27) zusammen mit (18) für spitz- und stumpfwinkligen negativ orientierten Innendreikreis das *Analogon des Cosinussatzes*.

Das *Analogon des Sinussatzes* folgt aus (18). Es lautet:

$$\frac{'a}{'b} = \frac{'\alpha \operatorname{cotg} \frac{'\alpha}{2}}{'\beta \operatorname{cotg} \frac{'\beta}{2}}, \quad \frac{'b}{'c} = \frac{'\beta \operatorname{cotg} \frac{'\beta}{2}}{'\gamma \operatorname{cotg} \frac{'\gamma}{2}}, \quad \frac{'c}{'a} = \frac{'\gamma \operatorname{cotg} \frac{'\gamma}{2}}{'\alpha \operatorname{cotg} \frac{'\alpha}{2}}. \tag{29}$$

Die Grundlage zum Beweis der *Kongruenzsätze* bildet der

Satz 2. In jedem negativ orientierten Innendreikreis ist die Summe der Längen irgend zweier Seiten größer als die Länge der dritten Seite oder dieser gleich. Dabei steht gleich nur dann, wenn die drei Ecken des Dreikreises in gerader Linie liegen.

Die Richtigkeit des Satzes 2 im Falle von Fig. 2 liest man aus dieser Figur unmittelbar ab. Dort ist mit einer Ausnahme die Summe zweier Seiten größer als die dritte Seite, während es einmal vorkommt, daß die Summe zweier Seiten gleich der dritten Seite ist. An Fig. 4 sieht man weiter, daß beim rechtwinkligen negativ orientierten Innendreikreis die Summe zweier Seiten stets größer ist als die dritte Seite. Denn es ist z. B.

$$'c + 'b > 'b = 2\, r_\Delta > 'a.$$

Ich wende mich den spitzwinkligen und den stumpfwinkligen negativ orientierten Innendreikreisen zu. Aus den Fig. 3 und 5 liest man ab. oder man entnimmt aus (16) und (3)

$$\frac{'r_b + 'r_c}{'r_a + 'r_c} = \frac{\sin '\alpha}{\sin '\beta}, \quad \frac{'r_a + 'r_b}{'r_a + 'r_c} = \frac{\sin '\gamma}{\sin '\beta}. \tag{30}$$

Daraus findet man

$$\begin{aligned} 'r_a : 'r_b : 'r_c = (-\sin '\alpha + \sin '\beta + \sin '\gamma) : (\sin '\alpha - \sin '\beta + \sin '\gamma) :& \\ (\sin '\alpha + \sin '\beta - \sin '\gamma)&. \end{aligned} \tag{31}$$

Im spitzwinkligen Fall haben alle Klammerausdrücke das positive Vorzeichen wie die $'r$. Im stumpfwinkligen Fall haben sämtliche Klammerausdrücke das entgegengesetzte Vorzeichen wie die zugehörigen $'r$. Dem Satz 2 entsprechen nach (15) drei Relationen, die im spitzwinkligen Fall aus

$$\begin{aligned} '\alpha(-\sin '\alpha + \sin '\beta + \sin '\gamma) + '\gamma(\sin '\alpha + \sin '\beta - \sin '\gamma) >& \\ > '\beta(\sin '\gamma - \sin '\beta + \sin '\gamma)& \end{aligned} \tag{32}$$

durch cyklische Vertauschung der $'\alpha,'\beta,'\gamma$ hervorgehen. Im stumpfwinkligen Fall ist

$$(33)\quad \begin{aligned} &'\alpha(-\sin'\alpha+\sin'\beta+\sin'\gamma)+'\gamma(\sin'\alpha+\sin'\beta-\sin'\gamma)< \\ &\qquad <'\beta(\sin'\alpha-\sin'\beta+\sin'\gamma) \end{aligned}$$

eine der zu beweisenden Relationen. Dabei gelten für (32) die Beziehungen (2) und (3), für (33) aber die Relationen (5) und (3). Trägt man in (32) und (33) $'\beta=\pi-'\alpha-'\gamma$ ein, so wird die zu beweisende Ungleichung im spitzwinkligen Fall

$$(34)\quad \begin{aligned} &(\pi-2'\gamma)\sin'\alpha+(\pi-2'\alpha)\sin'\gamma<\pi\sin('\alpha+'\gamma) \\ &\qquad \text{für } 0<'\alpha<\pi,\ 0<'\gamma<\pi,\ 0<'\alpha+'\gamma<\pi. \end{aligned}$$

Im stumpfwinkligen Fall wird sie

$$(35)\quad \begin{aligned} &(\pi-2'\gamma)\sin'\alpha+(\pi-2'\alpha)\sin'\gamma>\pi\sin('\alpha+'\gamma) \\ &\qquad \text{für } 0<'\alpha<\pi,\ 0<'\gamma<\pi,\ \pi<'\alpha+'\gamma<2\pi. \end{aligned}$$

Für (34) und (35) kann man schreiben

$$(36)\quad \begin{aligned} &(\pi-2'\gamma-\pi\cos'\gamma)\sin'\alpha+ \\ &+(\pi-2'\alpha-\pi\cos'\alpha)\sin'\gamma \end{aligned} \begin{cases} <0 \text{ für } 0<'\alpha<\pi,\ 0<'\gamma<\pi,\ 0<'\alpha+'\gamma<\pi \\ >0 \text{ für } 0<'\alpha<\pi,\ 0<'\gamma<\pi,\ \pi<'\alpha+'\gamma<2\pi \end{cases}$$

oder

$$(37)\quad \begin{aligned} &\frac{\pi-2'\alpha-\pi\cos'\alpha}{\sin'\alpha}+ \\ &+\frac{\pi-2'\gamma-\pi\cos'\gamma}{\sin'\gamma} \end{aligned} \begin{cases} <0 \text{ für } 0<'\alpha<\pi,\ 0<'\gamma<\pi,\ 0<'\alpha+'\gamma<\pi \\ >0 \text{ für } 0<'\alpha<\pi,\ 0<'\gamma<\pi,\ \pi<'\alpha+'\gamma<2\pi. \end{cases}$$

Der Beweis von (37) beruht auf dem folgenden

Hilfssatz 1.

$$(38)\qquad f(\xi)=\frac{\pi-2\xi-\pi\cos\xi}{\sin\xi}$$

ist für $0<\xi<\pi$ *eine monoton wachsende Funktion, d. h. es ist*

$$(39)\qquad f'(\xi)>0 \quad \textit{für } 0<\xi<\pi.$$

Es ist nämlich

$$(40)\qquad f'(\xi)=\frac{\pi(1-\cos\xi)+2(\xi\cos\xi-\sin\xi)}{\sin^2\xi}.$$

Man setze

$$(41)\qquad g(\xi)=\pi(1-\cos\xi)+2(\xi\cos\xi-\sin\xi).$$

Dann ist

$$(42)\qquad g(0)=0,\ g(\pi)=0,\ g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi-2,\ g'(\xi)=(\pi-2\xi)\sin\xi.$$

Also ist $g'(\xi)>0$, wenn $0<\xi<\frac{\pi}{2}$ ist, und $g'(\xi)<0$, wenn $\frac{\pi}{2}<\xi<\pi$ ist. Daher ist $g(\xi)>0$ für $0<\xi<\pi$ und $f'(\xi)>0$ für $0<\xi<\pi$. Nun ist

$$f(\xi)+f(\pi-\xi)=0.$$

Daher gilt

Hilfssatz 2. *Es ist* $f('\alpha_1) + f('\gamma) = 0$, *wenn* $'\alpha_1 + '\gamma = \pi$, $'\alpha_1 > 0$, $'\gamma > 0$ *ist*. Daher ist

(43) $f('\alpha) + f('\gamma) < 0$, wenn $0 < '\alpha < '\alpha_1 < \pi$, $0 < '\gamma < \pi$, d. h. wenn $0 < '\alpha + '\gamma < \pi$

und

(44) $f('\alpha) + f('\gamma) > 0$, wenn $\pi > '\alpha > '\alpha_1 > 0$, $0 < '\gamma < \pi$, d. h. wenn $\pi < '\alpha + '\gamma < 2\pi$ ist.

(43) und (44) beweisen (37) und damit ist Satz 2 im spitzwinkligen Fall restlos als richtig erkannt. Denn in diesem Fall führt auch zyklische Vertauschung der $'\alpha, '\beta, '\gamma$ in (32) immer wieder auf eine Ungleichung der Form (37) in ihrer oberen Form. Im Fall des stumpfwinkligen Dreikreises ist nur bewiesen, daß die Summe zweier Seiten stets größer ist als die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Seite. Für die anderen Ungleichungen im stumpfwinkligen Fall ist eine neue Betrachtung nötig. Es ist aber am einfachsten, das im stumpfwinkligen Fall am Beweis des Satzes 2 noch fehlende aus dem folgenden Satz 3 zu entnehmen. Dieser lautet:

Satz 3. Dem größeren Winkel des mit einem negativ orientierten Innendreikreis gleicheckigen geradlinigen Dreiecks liegt die größere Seite des Dreikreises gegenüber.

Da nach diesem Satz im stumpfwinkligen Dreikreis dem stumpfen Winkel die größte Seite gegenüber liegt, folgt in der Tat aus Satz 3 das am Satz 2 noch Fehlende. Ich wende mich daher dem Beweis von Satz 3 zu. Zu zeigen ist im spitzwinkligen Fall $'b > 'c$, wenn $b > c$ ist usw. bei beliebiger Vertauschung der Seiten, im rechtwinkligen $'b > 'c$, $'b > 'a$ und $'c < 'a$, wenn $c < a$ ist, endlich im stumpfwinkligen Fall $'b > 'c$, $'b > 'a$ und $'a > 'c$, wenn $a > c$ ist. Der Beweis beruht darauf, daß nach (21) $y = x \operatorname{cotg} x$ in $0 < x < \frac{\pi}{2}$ monoton abnehmend ist. Da auch $\cos x$ in $0 < x < \frac{\pi}{2}$ monoton abnimmt, so folgt aus (17): Aus $a > b$ folgt $'\alpha < '\beta$, und es folgt aus (18) wegen (21): Wenn $'\alpha < '\beta$ ist, so ist $'a > 'b$. Ganz analog beweist man alle anderen Behauptungen von Satz 3, bis auf $'b > 'c$, $'b > 'a$ im rechtwinkligen Fall. Man liest aber unmittelbar an Fig. 4 ab: $'b = 2r_\Delta > 'c$ und $'b = 2r_\Delta > 'a$.

Im folgenden seien positive Zahlen $'a \leqq 'b$, $'c \leqq 'b$ gegeben, und es sei noch $'a + 'c \geqq 'b$ angenommen. Die Bezeichnungen sind so gewählt, weil immer angenommen war, daß im rechtwinkligen Fall $'b$ dem rechten Winkel und im stumpfwinkligen Fall $'b$ dem stumpfen Winkel gegenüber liegt. Es soll untersucht werden, ob es stets negativ orientierte Innendreikreise mit gegebenen Seiten gibt. Die notwendigen Bedingungen von Satz 2 sind durch die gemachten Annahmen jedenfalls erfüllt. Ist insbesondere $'a + 'c = 'b$, so gibt es genau ein den Bedingungen von Fig. 2 entsprechendes negativ orientiertes Dreikreis und nach Satz 2 kein weiteres negativ orientiertes Innendreikreis. Man hat sich daher weiter nur mit gegebenen Seitenlängen $'a \leqq 'b$, $'c \leqq 'b$ unter der Annahme $'a + 'c > 'b$ zu befassen. Die Beweismethode beruht zunächst darauf, daß man die Gleichungen (25), (26), (27) als Gleichungen für r_Δ auffaßt. Hat man ein einer dieser Gleichungen genügendes $2r_\Delta$ gefunden, das ja größer ist als alle Seiten, so sind nach (18) und (20) die $'\alpha, '\beta, '\gamma$ und dann

nach (15) die $'r_a$, $'r_b$, $'r_c$ bestimmt und damit das Dreikreis gefunden. Es kommt daher alles auf die Bestimmung von r_Δ an.

Es wird sich zeigen, daß bei gegebenen $'a$, $'b$, $'c$ stets genau eine der Gleichungen (25), (26), (27) genau eine Lösung r_Δ liefert. Zu einem Kriterium dafür, welche der drei Gleichungen lösbar sein kann, führt die folgende Überlegung. Im rechtwinkligen Dreikreis ist $2\,r_\Delta = b$. Daher ist nach (26) für das Vorliegen des rechtwinkligen Falles notwendig

$$C\left(\frac{'a}{'b}\right) + C\left(\frac{'c}{'b}\right) = \frac{\pi}{2}. \tag{45}$$

Diese Bedingung (45) ist aber auch hinreichend für die Existenz eines rechtwinkligen Dreikreises mit den gegebenen Seiten. Gilt nämlich (45), so ist (26) mit $2\,r_\Delta = 'b$ erfüllt. Mit dem so ermittelten r_Δ bestimmt man nach (20) $'\alpha$ und $'\gamma$ und dann nach (15) $'r_a$ und $'r_c$ und damit das Dreikreis. So ist bewiesen:

Satz 4. Die Bedingung (45) *ist notwendig und hinreichend für ein rechtwinkliges negativ orientiertes Innendreikreis mit den Seitenlängen $'a \leq 'b$, $'c \leq 'b$, $'a + 'c > 'b$. Es gibt dann genau ein rechtwinkliges negativ orientiertes Innendreikreis mit diesen drei gegebenen Seitenlängen.*

Ich füge noch die Bemerkung hinzu, daß es genau ein rechtwinkliges negativ orientiertes rechtwinkliges Innendreikreis mit gegebenen Katheten $'a$ und $'c$ gibt. Dazu ist zu zeigen, daß bei gegebenen $'a$ und $'c$ die Gleichung (26) genau eine Lösung r_Δ besitzt. Es genügt, den Fall $'a \leq 'c$ zu betrachten. Die Funktion

$$D(\xi) = C\left(\frac{'a}{\xi}\right) + C\left(\frac{'c}{\xi}\right) \tag{46}$$

ist in $'c \leq \xi < \infty$ monoton wachsend, und es ist

$$D('c) = C\left(\frac{'a}{'c}\right) \leq \frac{\pi}{2}, \quad D(\infty) = \pi.$$

Daher gibt es genau ein $\xi = 2\,r_\Delta$, so daß (26) erfüllt ist. Daher haben wir

Satz 5. Es gibt genau ein rechtwinkliges negativ orientiertes Dreikreis mit gegebenen Katheten $'a$ und $'c$.

Im spitzwinkligen Fall ist $2\,r_\Delta > 'b$ nach Fig. 3 und daher $\frac{'a}{2r_\Delta} < \frac{'a}{'b}$, $\frac{'c}{2r_\Delta} < \frac{'c}{'b}$. Wegen der Monotonie von $C(y)$ und wegen $C(1) = 0$ ist daher im spitzwinkligen Fall

$$C\left(\frac{'a}{'b}\right) + C\left(\frac{'c}{'b}\right) < \frac{\pi}{2} \tag{47}$$

notwendig erfüllt. Die Bedingung (47) ist aber auch hinreichend für die Existenz eines spitzwinkligen negativ orientierten Dreikreises mit gegebenen Seiten $'a \leq 'b$ und $'c \leq 'b$. Zum Beweis betrachte man die Funktion

$$E(\xi) = C\left(\frac{'a}{2\xi}\right) + C\left(\frac{'b}{2\xi}\right) + C\left(\frac{'c}{2\xi}\right) - \frac{\pi}{2}. \tag{48}$$

Sie hängt stetig und monoton von ξ ab. Setzt man darin $2\,\xi = 'b$, so wird nach (47) $E\left(\frac{'b}{2}\right) < 0$. Läßt man aber $\xi \to \infty$ streben, so nähert sich jeder der drei C-Posten in (48) dem Wert $\frac{\pi}{2}$, und daher gilt $E(\xi) \to \pi$ für $\xi \to \infty$.

Daher gibt es genau einen Wert $\xi = r_\Delta > \frac{'b}{2}$, für den $E(r_\Delta) = 0$, d. h. (25) erfüllt ist. So haben wir

Satz 6. Dafür daß $'a \leqq 'b$, $'c \leqq 'b$, $'a + 'c > 'b$ die drei Seiten eines spitzwinkligen negativ orientierten Dreikreises sind, ist (47) *notwendig und hinreichend. Es gibt dann genau ein solches Dreikreis mit diesen gegebenen Seiten.*

Es fällt auf, daß beim Beweis die Bedingung $'a + 'c > 'b$ nicht explizite benutzt wurde. Das liegt daran, daß sie wegen $\varphi(y) \equiv C(y) + C(1-y) \geqq \frac{\pi}{2}$, $0 \leqq y \leqq 1$ in (47) enthalten ist. $\varphi(y) \geqq \frac{\pi}{2}$, $0 \leqq y \leqq 1$ folgt daraus, daß nach (21) $\varphi''(y) = C''(y) + C''(1-y) < 0$, $0 \leqq y \leqq 1$ ist und daß $\varphi(0) = \varphi(1) = \frac{\pi}{2}$ gilt. Aus $\varphi(y) \geqq \frac{\pi}{2}$ folgt wegen $C'(y) < 0$, daß auch $C(y_1) + C(y_2) \geqq \frac{\pi}{2}$ ist für $y_1 + y_2 \leqq 1$.

Für ein stumpfwinkliges negativ orientiertes Innendreikreis[3]) wird sich bei gegebenen Seiten $'a < 'b$, $'c < 'b$ mit $'a + 'c > 'b$

$$C\left(\frac{'a}{'b}\right) + C\left(\frac{'c}{'b}\right) > \frac{\pi}{2} \tag{49}$$

als notwendige und hinreichende Bedingung ergeben. Ich will zuerst zeigen, daß die Bedingung (49) hinreichend ist. Dazu betrachte ich

$$F(\xi) = C\left(\frac{'a}{2\xi}\right) - C\left(\frac{'b}{2\xi}\right) + C\left(\frac{'c}{2\xi}\right) - \frac{\pi}{2}. \tag{50}$$

Ein der Bedingung (27) genügendes r_Δ muß jedenfalls nach Fig. 5 die Bedingung $2\,r_\Delta > 'b$ erfüllen. Wegen (49) ist $F\left(\frac{b'}{2}\right) > 0$. Für $\xi \to \infty$ gilt $F(\xi) < 0$ wegen $'a + 'c > 'b$. Um das einzusehen, entwickle man $F(\xi)$ nach Potenzen von $1/\xi$ in der Umgebung von $\xi = \infty$. Es ist

$$y = x \operatorname{cotg} x = -\frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \cdots.$$

Daraus ergibt sich durch Umkehrung

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\,y + \cdots.$$

Daher ist für große ξ

$$F(\xi) = -\frac{1}{\pi}('a + 'c - 'b)\frac{1}{\xi} + \cdots < 0 \quad \text{wegen} \quad 'a + 'c > 'b.$$

Wegen der Stetigkeit von $F(\xi)$ für $\xi \geqq \frac{'b}{2}$ gibt es daher mindestens ein $\xi = r_\Delta > \frac{'b}{2}$, für das $F(r_\Delta) = 0$ ist, für das daher (27) gilt. Es bleibt nun zu zeigen, daß es nur ein solches r_Δ gibt, wenn (49) erfüllt ist, und daß diese Bedingung (49) notwendig ist. Trotz vielfältiger Bemühungen ist es mir nicht gelungen, dafür einen kürzeren Beweis zu finden, als den nachstehenden etwas mühsamen, der auf dem Sinussatz beruht. Ich gehe von (18), (3) und (5)

[3]) Vgl. Satz 3.

aus und entnehme daraus die folgenden beiden Gleichungspaare

$$(51)\qquad 'b\,\alpha\,\mathrm{cotg}\,\alpha = 'a\,\beta\,\mathrm{cotg}\,\beta, \qquad \gamma = \frac{\pi}{2} + \beta - \alpha$$

$$(52)\qquad 'b\,\gamma\,\mathrm{cotg}\,\gamma = 'c\,\beta\,\mathrm{cotg}\,\beta, \qquad \alpha = \frac{\pi}{2} + \beta - \gamma\,.$$

Dabei habe ich $'\alpha = 2\,\alpha$, $'\beta = -2\,\beta$, $'\gamma = 2\,\gamma$ gesetzt, so daß α, β, γ auf das Intervall $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ beschränkt sind. Ich fasse beide Gleichungspaare als Gleichungen für Kurven in der α, γ-Ebene auf. In der Tat ergeben beide Gleichungspaare γ bzw. α als eindeutige Funktionen von α bzw. γ. Aus (51) folgt nämlich

$$(53)\qquad \gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha + C\left(\frac{'b}{'a}\,\alpha\,\mathrm{cotg}\,\alpha\right), \qquad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \qquad \alpha + \gamma > \frac{\pi}{2},$$

und aus (52) ergibt sich

$$(54)\qquad \alpha = \frac{\pi}{2} - \gamma + C\left(\frac{'b}{'c}\,\gamma\,\mathrm{cotg}\,\gamma\right), \qquad 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}, \qquad \alpha + \gamma > \frac{\pi}{2}\,.$$

Beide Male ist der in das Intervall $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ fallende Wert von C zu nehmen. Die beiden Kurven haben den Punkt $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$ gemein und schneiden sich weiter genau in denjenigen Punkten, welche stumpfwinkligen negativ orientierten Innendreikreisen mit den drei gegebenen Seiten entsprechen. Es soll gezeigt werden, daß beide Kurven nur höchstens einen weiteren Punkt gemein haben, und daß dann und nur dann ein solcher weiterer Schnittpunkt existiert, wenn die Bedingung (49) erfüllt ist. Um das einzusehen, zeige ich, daß $d^2\gamma/d\,\alpha^2$ längs (53) und daß $d^2\alpha/d\,\gamma^2$ längs (54) je ein unveränderliches Vorzeichen hat, und daß diese Vorzeichen längs beiden Kurven voneinander verschieden sind. Dann ist die eine Kurve konvex, die andere konkav, und beide können wegen ihrer Darstellung durch eindeutige Funktionen nur höchstens einen weiteren Schnittpunkt haben.

Das Vorzeichen von $d^2\gamma/d\,\alpha^2$ ist dem Vorzeichen von $\dot\alpha\,\ddot\gamma - \dot\gamma\,\ddot\alpha$ gleich, weil sich $\dot\alpha$ nach (56) für α und β aus $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ als positiv erweist. Punkte bedeuten hier Ableitungen nach dem Parameter β. Da beide Kurven durch Vertauschung von α und γ auseinander hervorgehen, wobei auch $'a$ und $'c$ sich vertauschen, und da das Vorzeichen der Krümmung nach (61) unabhängig von der Wahl der $'a$, $'b$, $'c$ ist, so haben beide Kurven in der Tat verschiedenes Vorzeichen der Krümmung. Es bleibt nur zu zeigen, daß dieses Vorzeichen längs einer der beiden Kurven unveränderlich ist. Ich betrachte die Kurve (51). Differentiation nach β ergibt

$$(55)\qquad \begin{aligned} &'b\,\frac{\sin\alpha\cos\alpha - \alpha}{\sin^2\alpha}\,\dot\alpha = 'a\,\frac{\sin\beta\cos\beta - \beta}{\sin^2\beta}\,,\ \dot\gamma = 1 - \dot\alpha, \\ &'b\,\frac{-2\sin\alpha + 2\alpha\cos\alpha}{\sin^3\alpha}\,\dot\alpha^2 + 'b\,\frac{\sin\alpha\cos\alpha - \alpha}{\sin^2\alpha}\,\ddot\alpha = 'a\,\frac{-2\sin\beta + 2\beta\cos\beta}{\sin^3\beta}\,,\ \ddot\gamma = -\ddot\alpha. \end{aligned}$$

Daher hat man

$$\dot\alpha = \frac{'a}{'b}\,\frac{\sin\beta\cos\beta-\beta}{\sin\alpha\cos\alpha-\alpha}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}$$

(56)
$$\ddot\alpha = \frac{'a\,\dfrac{-2\sin\beta+2\beta\cos\beta}{\sin^3\beta} - 'b\,\dfrac{-2\sin\alpha+2\alpha\cos\alpha}{\sin^3\alpha}\,\dot\alpha^2}{b'\,\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha-\alpha}{\sin^2\alpha}}.$$

Daraus folgt

(57)
$$\dot\alpha\,\ddot\gamma-\ddot\alpha\,\dot\gamma=-\ddot\alpha.$$

Da

$$\sin\alpha\cos\alpha-\alpha=\frac{\sin 2\alpha-2\alpha}{2}<0 \text{ ist} \qquad \text{in } 0<\alpha<\frac{\pi}{2},$$

so kommt es darauf an zu sehen, daß der Zähler von $\ddot\alpha$ in (56) längs der Kurve ein festes Vorzeichen hat. Ersetzt man da noch $\dot\alpha^2$ durch seinen Ausdruck gemäß (56) und läßt den Faktor $'a$ weg, so kommt es auf das Vorzeichen von

(58)
$$\frac{-2\sin\beta+2\beta\cos\beta}{\sin^3\beta}-\frac{'a}{'b}\,\frac{-2\sin\alpha+2\alpha\cos\alpha}{\sin^3\alpha}\left(\frac{\sin\beta\cos\beta-\beta}{\sin\alpha\cos\alpha-\alpha}\right)^2\frac{\sin^4\alpha}{\sin^4\beta}$$

an, oder was dasselbe ist, auf das Vorzeichen von

(59)
$$'b\,\frac{-2\sin\beta+2\beta\cos\beta}{(\sin\beta\cos\beta-\beta)^2}\sin\beta-'a\,\frac{-2\sin\alpha+2\alpha\cos\alpha}{(\sin\alpha\cos\alpha-\alpha)^2}\sin\alpha.$$

Da nach (29) noch

(60)
$$\frac{'a\sin\alpha}{'b\sin\beta}=\frac{\alpha\cos\alpha}{\beta\cos\beta}$$

gilt, so kommt es auf das Vorzeichen von

(61)
$$\frac{\beta\cos\beta\,(\sin\beta-\beta\cos\beta)}{(\sin\beta\cos\beta-\beta)^2}-\frac{\alpha\cos\alpha\,(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)}{(\sin\alpha\cos\alpha-\alpha)^2}$$

an. Da nach Fig. 5 noch $\alpha>\beta$ gilt, so wird der Beweis der Behauptung betreffs das unveränderliche Vorzeichen der Krümmung geführt sein, so wie gezeigt ist, daß

(62)
$$F(\xi)=\frac{\xi\cos\xi\,(\sin\xi-\xi\cos\xi)}{(\sin\xi\cos\xi-\xi)^2} \qquad \text{in } 0<\xi<\frac{\pi}{2}$$

monoton abnimmt. Die Berechnung der Ableitung $F'(\xi)$ ergibt

(63)
$$F'(\xi)=-\frac{\xi\sin 2\xi-\frac12\sin^2 2\xi-\xi^2+\xi^3\sin 2\xi+\frac14\xi^2\sin^2 2\xi-2\xi\sin 2\xi\sin^2\xi}{(\sin\xi\cos\xi-\xi)^3}.$$

Da der Nenner ständig negativ ist, ist zu zeigen, daß auch der Zähler ständig negativ ist. Ich dividiere ihn durch $\xi\sin 2\,\xi$ und zeige, daß

(64)
$$1-\frac12\left(\frac{\sin 2\xi}{2\xi}+\frac{2\xi}{\sin 2\xi}\right)+\xi^2-2\sin^2\xi+\frac12\xi\sin 2\,\xi<0 \quad \text{in } 0<\xi<\frac{\pi}{2}.$$

Falls sich $\xi\uparrow\frac{\pi}{2}$ nähert, wächst $\frac12\left(\frac{\sin 2\xi}{2\xi}+\frac{2\xi}{\sin 2\xi}\right)$ immer positiv bleibend über alle Grenzen. Daher ist für $\xi\uparrow\frac{\pi}{2}$ die Ungleichung (64) erfüllt. Um den

Bereich der ξ-Werte abzuschätzen, für den diese Überlegung zum Beweis von (64) führt, betrachte ich

$$G(\xi) = 1 + \xi^2 - 2\sin^2\xi + \tfrac{1}{2}\,\xi\sin 2\xi. \tag{65}$$

Die Ableitungen werden

$$\begin{aligned} G'(\xi) &= 2\xi - \tfrac{3}{2}\sin 2\xi + \xi\cos 2\xi,\\ G''(\xi) &= 2 - 2\cos 2\xi - 2\xi\sin 2\xi,\\ G'''(\xi) &= 2(\sin 2\xi - 2\xi\cos 2\xi). \end{aligned} \tag{66}$$

Aus $G'''(\xi) > 0$ für $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$ schließe ich, daß

$$G''(\xi) > G''(0) = 0 \qquad \text{in } 0 < \xi < \frac{\pi}{2}$$

und daraus, daß

$$G'(\xi) > G'(0) = 0 \qquad \text{in } 0 < \xi < \frac{\pi}{2}$$

und daraus schließlich

$$1 = G(0) < G(\xi) < G\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - 1 < 1{,}47 \qquad \text{in } 0 < \xi < \frac{\pi}{2}.$$

Daher gilt die Abschätzung in (64) für

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2\xi}{2\xi} + \frac{2\xi}{\sin 2\xi}\right) \geqq 1{,}47, \qquad 0 < \xi < \frac{\pi}{2}.$$

Ist y_1 die kleinere der beiden Wurzeln von

$$y^2 - y\cdot 2{,}94 + 1 = 0,$$

so ist

$$y_1 > 0{,}39,$$

und daher gilt (64) für

$$\frac{\sin 2\xi}{2\xi} \leqq 0{,}39, \qquad 0 < \xi < \frac{\pi}{2}.$$

Weil $\frac{\sin 2\xi}{2\xi}$ monoton abnimmt in $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$ und weil

$$\frac{\sin 2{,}16}{2{,}16} < 0{,}39$$

ist, so gilt (64) für

$$1{,}08 = \xi_1 \leqq \xi < \frac{\pi}{2}.$$

Die Überlegung kann wiederholt werden. Es ist

$$G(\xi) < G(\xi_1) = G(1{,}08) < 1{,}042 \qquad \text{in } 0 < \xi < \xi_1.$$

Daher gilt (64) für den Teil dieses Intervalls, in dem

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2\xi}{2\xi} + \frac{2\xi}{\sin 2\xi}\right) \geqq 1{,}042$$

ist. Ist y_2 die kleinere der beiden Wurzeln von

$$y^2 - y\cdot 2{,}084 + 1 = 0,$$

so ist

$$y_2 > 0{,}744,$$

und daher gilt (64) für

$$\frac{\sin 2\xi}{2\xi} \leqq 0{,}744, \qquad 0 < \xi < \xi_1 .$$

Nun ist

$$\frac{\sin 1{,}3}{1{,}3} < 0{,}744.$$

Daher gilt (64) weiter für

$$0{,}65 = \xi_2 \leqq \xi < \xi_1.$$

Im ganzen ist also jetzt (64) richtig für

$$0{,}65 \leqq \xi < \frac{\pi}{2}.$$

Die Überlegung werde noch ein letztes Mal wiederholt. Es ist

$$G(\xi) < G(\xi_2) = G(0{,}65) < 1{,}0048 \qquad \text{in } 0 < \xi < \xi_2.$$

Daher gilt (64) für denjenigen Teil dieses Intervalls, in dem

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2\xi}{2\xi} + \frac{2\xi}{\sin 2\xi}\right) \geqq 1{,}0048$$

ist. Bedeutet y_3 die kleinere der beiden Wurzeln von

$$y^2 - y \cdot 2{,}0096 + 1 = 0,$$

so ist $y_3 > 0{,}9$ und daher gilt (64) für

$$\frac{\sin 2\xi}{2\xi} \leqq 0{,}9, \qquad 0 < \xi < \xi_2 .$$

Da

$$\frac{\sin 0{,}8}{0{,}8} < 0{,}9$$

ist, so gilt (64) für

$$0{,}4 = \xi_3 \leqq \xi < \xi_2.$$

Im ganzen ist daher bis jetzt (64) für

$$0{,}4 \leqq \xi < \frac{\pi}{2}$$

als richtig nachgewiesen.

Um (64) auch in $0 < \xi \leqq 0{,}4$ zu beweisen, schlage ich einen anderen, sogar für $0 < \xi \leqq 0{,}5$ brauchbaren Weg ein. Ich multipliziere (64) mit $4\,\xi \sin 2\xi$ und beweise, daß

$$\text{(67)} \quad H(\xi) = -(\sin 2\xi - 2\xi)^2 + 4\xi^3 \sin 2\xi - 8\xi \sin 2\xi \cdot \sin^2\xi + 2\xi^2 \sin^2 2\xi < 0 \qquad \text{in } 0 < \xi \leqq 0{,}5 .$$

Aus der Potenzreihenentwicklung entnimmt man, daß in $0 < \xi \leqq 0{,}5$

$$-(2\xi - \sin 2\xi)^2 < -\frac{16}{9}\xi^6\left(1 - \frac{1}{5}\xi^2\right)^2 = -\frac{16}{9}\xi^6\left(1 - \frac{2}{5}\xi^2 + \frac{1}{25}\xi^4\right)$$

$$4\xi^3 \sin 2\xi < 8\xi^4\left(1 - \frac{2}{3}\xi^2 + \frac{2}{15}\xi^4\right)$$

$$2\xi^2 \sin^2 2\xi < 8\xi^4\left(1 - \frac{2}{3}\xi^2 + \frac{2}{15}\xi^4\right)^2$$

$$= 8\xi^4\left(1 - \frac{4}{3}\xi^2 + \frac{32}{45}\xi^4 - \frac{8}{45}\xi^6 + \frac{4}{225}\xi^8\right)$$

$$-8\xi \sin 2\xi \sin^2\xi < -16\xi^4\left(1 - \frac{2}{3}\xi^2\right)\left(1 - \frac{\xi^2}{6}\right)^2 = -16\xi^4\left(1 - \xi^2 + \frac{1}{4}\xi^4 - \frac{1}{54}\xi^6\right).$$

Daher wird

$$H(\xi) < -\frac{16}{9}\xi^6\left(1-\frac{39}{20}\xi^2+\left(\frac{21}{25}-\frac{1}{6}\right)\xi^4-\frac{2}{25}\xi^6\right);\ 0<\xi\leqq\frac{\pi}{2}.$$

Da die Klammer für $0 \leqq \xi \leqq 0{,}5$ positiv ausfällt, so ist $H(\xi) < 0$ für $0 < \xi \leqq \frac{1}{2}$ und damit (64) vollständig bewiesen. Damit ist gezeigt, daß es unter der Bedingung (49) nur ein stumpfwinkliges, negativ orientiertes Dreikreis mit den gegebenen Seiten gibt.

Nun bleibt noch zu zeigen, daß die Bedingung (49) notwendig ist. In Fig. 10 sind die beiden Kurven (53) und (54) skizziert. Die Gerade

$$\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2}$$

ist dort punktiert eingetragen. Da $C(y)$ im positiven Reellen nur für $0 \leqq y \leqq 1$ erklärt ist, beginnt die Kurve (53) auf der punktierten Geraden in einem Punkt, dessen α-Koordinate α_0 der Bedingung

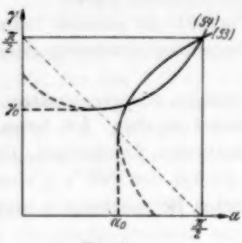

Fig. 10a.

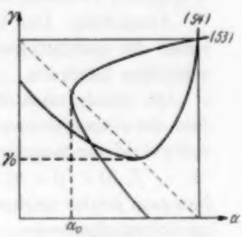

Fig. 10b.

$$\alpha_0 \operatorname{cotg} \alpha_0 = \frac{'a}{'b}, \quad \alpha_0 = C\left(\frac{'a}{'b}\right)$$

genügt. Entsprechend beginnt die Kurve (54) in einem Punkt der punktierten Geraden, dessen γ-Koordinate γ_0 der Bedingung

$$\gamma_0 \operatorname{cotg} \gamma_0 = \frac{'c}{'b}, \quad \gamma_0 = C\left(\frac{'c}{'b}\right)$$

genügt. (56) lehrt, daß $\dot{\alpha} > 0$ ist. Nach (55) und (57) hat für die Kurve (53) $\ddot{\gamma}$ das gleiche Vorzeichen wie $\dot{\alpha}\,\ddot{\gamma} - \ddot{\alpha}\,\dot{\gamma}$. Dies Vorzeichen ist aber nach den zu den Formeln (56)ff. angestellten Überlegungen das negative. Daher kehrt die Kurve (53) ihre Wölbung nach oben. Entsprechend kehrt die Kurve (54) ihre Wölbung nach unten. Die Steigung beider Kurven in dem gemeinsamen Punkt $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich zu

$$\frac{d\gamma}{d\alpha} = -1 + \frac{'b}{'a} \qquad \text{für die Kurve (53),}$$

$$\frac{d\alpha}{d\gamma} = -1 + \frac{'b}{'c} \qquad \text{für die Kurve (54).}$$

Es ist aber

$$-1 + \frac{'b}{'a} < \frac{1}{-1 + \frac{'b}{'c}}$$

wegen $'a + 'c > 'b$. Man liest daher an den beiden Fig. 10 ab, daß die Kurven (53) und (54) sich dann und nur dann in einem weiteren Punkt schneiden, wenn

$$\alpha_0 + \gamma_0 = C\left(\frac{'a}{'b}\right) + C\left(\frac{'c}{'b}\right) \geqq \frac{\pi}{2} \tag{68}$$

ist, daß sie sich also nicht treffen, wenn

$$\alpha_0 + \gamma_0 = C\left(\frac{'a}{'b}\right) + C\left(\frac{'c}{'b}\right) < \frac{\pi}{2}$$

ausfällt. (68) mit Gleichheitszeichen ist aber die notwendige und hinreichende Bedingung für ein rechtwinkliges negativ orientiertes Dreikreis. Daher haben wir nun endgültig den Satz 7 bewiesen. Er lautet:

Satz 7. Für die Existenz eines stumpfwinkligen negativ orientierten Dreikreises mit den Seiten $'a \leqq 'b$, $'c \leqq 'b$, $'a + 'c > 'b$ ist (49) *die notwendige und hinreichende Bedingung. Es gibt dann genau ein stumpfwinkliges negativ orientiertes Dreikreis mit den gegebenen Seiten.*

Anmerkung. Der in Fig. 10b zu sehende Schnittpunkt der Kurventeile unter der gestrichelten Diagonalen entspricht dem dann vorhandenen spitzwinkligen Dreikreis.

Ich wende mich den übrigen Kongruenzsätzen zu. Es seien *zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel* gegeben. Ich betrachte zuerst den Fall eines spitzwinkligen negativ orientierten Dreikreises. Die gegebenen Stücke seien $'a$, $'c$, $'\beta$, $(0 < '\beta < \pi)$. Es genügt, den Fall $'a \leqq 'c$ zu betrachten. Ist $'a \geqq 'c$, so hat man in der nachstehenden Betrachtung $'a$ und $'c$ zu vertauschen. Dann ist notwendigerweise

(69) $$C\left(\frac{'a}{'c}\right) < \frac{\pi}{2} - \frac{'\beta}{2}.$$

Nach (25) und (22) ist nämlich

(70) $$C\left(\frac{'a}{2r_\Delta}\right) + C\left(\frac{'c}{2r_\Delta}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{'\beta}{2}.$$

Nach (18) ist weiter $2\,r_\Delta > 'c$, und wegen der Monotonie von $C(\eta)$ ist

(71) $$C\left(\frac{'a}{'c}\right) < C\left(\frac{'a}{2r_\Delta}\right) < C\left(\frac{'a}{2r_\Delta}\right) + C\left(\frac{'c}{2r_\Delta}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{'\beta}{2}.$$

Um zu erkennen, daß ein spitzwinkliges negativ orientiertes Dreikreis unter der Annahme (69) aus den gegebenen Stücken eindeutig bestimmt ist, ist zu zeigen, daß die Gleichung (70) genau eine Lösung $2\,r_\Delta > 'c$ hat. Um das zu erkennen, betrachte man die Funktion

(72) $$J(\xi) = C\left(\frac{'a}{\xi}\right) + C\left(\frac{'c}{\xi}\right) - \frac{\pi}{2} + \frac{'\beta}{2}, \qquad \xi \geqq 'c.$$

Sie ist monoton und stetig in ξ, und es gilt $J(\infty) > 0$ sowie $J('c) < 0$ wegen (69). Daher gibt es genau eine Lösung $\xi = 2\,r_\Delta > 'c$ von (70). Hat man r_Δ, so entnimmt man aus (18) die anderen Stücke eindeutig. Daher gilt

Satz 8. Dafür, daß es ein spitzwinkliges negativ orientiertes Dreikreis mit den Stücken $'a \leqq 'c$, $'\beta$, $(0 < '\beta < \pi)$ gibt, ist (69) *notwendig und hinreichend. Ist $'a \geqq 'c$, so ist statt dessen*

$$C\left(\frac{'c}{'a}\right) < \frac{\pi}{2} - \frac{'\beta}{2}$$

notwendig und hinreichend. Das negativ orientierte spitzwinklige Dreikreis ist durch die gegebenen Stücke eindeutig bestimmt.

Für den Fall des rechtwinkligen Dreikreises wurde die entsprechende Frage schon weiter oben erledigt. Er ordnet sich dem Satz 8 für $'\beta = 0$ unter.

Im stumpfwinkligen Fall muß man unterscheiden, ob der stumpfe oder ein spitzer Winkel gegeben ist. Es seien zunächst $'a$, $'c$, $'\beta$, $0 < '\beta < \pi$ gegeben[4]). Es genügt wieder $'a \leqq 'c$ anzunehmen. Aus (27) folgt die Beziehung

$$(73) \qquad C\left(\frac{'a}{2r_\Delta}\right) + C\left(\frac{'c}{2r_\Delta}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{'\beta}{2}.$$

Man betrachte die Funktion

$$(74) \qquad K(\xi) = C\left(\frac{'a}{\xi}\right) + C\left(\frac{'c}{\xi}\right) - \frac{\pi}{2} - \frac{'\beta}{2}, \qquad \xi \geqq 'c.$$

Sie ist wieder monoton und stetig in ξ. Es ist $K(\infty) > 0$ und $K('c) < 0$. Daher gibt es genau ein $\xi = 2r_\Delta > 'c$, für das $K(2r_\Delta) = 0$ ist, d. h. (73) gilt. Hat man r_Δ, so entnimmt man die übrigen Stücke aus (18). Wegen $'\alpha - '\beta + '\gamma = \pi$ ist dann sowohl $'\alpha > '\beta$, wie $'\gamma > '\beta$. Also wird $'b > 'c$, nach Satz 3 oder nach (18). Ist $'a \geqq 'c$, so vertauschen $'a$ und $'c$ in der vorstehenden Betrachtung ihre Rollen. So hat man

Satz 9. Bei beliebig gegebenen Stücken $'a$, $'c$, $'\beta$, $0 < '\beta < \pi$ gibt es genau ein stumpfwinkliges negativ orientiertes Dreikreis mit diesen drei Stücken. Dabei ist angenommen, daß an der Ecke B der stumpfe Winkel des zugeordneten Euklidischen Dreiecks liegt.

Nun seien im stumpfwinkligen Fall[5]) $'a < 'b$, $'\gamma$, $0 < '\gamma < \pi$ gegeben. Dann ist zunächst notwendigerweise

$$(75) \qquad C\left(\frac{'a}{'b}\right) > \frac{\pi}{2} - \frac{'\gamma}{2}.$$

Denn nach (49) ist

$$C\left(\frac{'a}{'b}\right) + C\left(\frac{'c}{'b}\right) > \frac{\pi}{2}.$$

Ferner ist $2r_\Delta > 'b$. Also

$$C\left(\frac{'c}{2r_\Delta}\right) > C\left(\frac{'c}{'b}\right), C\left(\frac{'a}{'b}\right) + \frac{'\gamma}{2} = C\left(\frac{'a}{'b}\right) + C\left(\frac{'c}{2r_\Delta}\right) > C\left(\frac{'a}{'b}\right) + C\left(\frac{'c}{'b}\right) > \frac{\pi}{2}.$$

Nun betrachte man die Funktion

$$(76) \qquad L(\xi) = C\left(\frac{'a}{\xi}\right) - C\left(\frac{'b}{\xi}\right) - \frac{\pi}{2} + \frac{'\gamma}{2}, \qquad \xi \geqq 'b.$$

Sie ist monoton und stetig in ξ. Nach der Definition von $C(y)$ ist nämlich identisch in y

$$y = C(y) \operatorname{cotg} C(y).$$

Daher ist

$$(77) \qquad C'(y) = \frac{C(y)}{y - y^2 - C^2(y)} < 0$$

[4]) Ich nehme mit Rücksicht auf das zu Formel (27) Gesagte in Abweichung von der Festsetzung zu Fig. 5 den Winkel $'\beta$ positiv an.

[5]) Nach Satz 3 ist immer $'a < 'b$ im stumpfwinkligen Fall.

wegen der bekannten Monotonie von $C(y)$. Ferner ist

$$(78)\qquad L'(\xi) = -\frac{'a}{\xi^2}\,\frac{C\left(\frac{'a}{\xi}\right)}{\frac{'a}{\xi}-\frac{'a^2}{\xi^2}-C^2\left(\frac{'a}{\xi}\right)} + \frac{'b}{\xi^2}\,\frac{C\left(\frac{'b}{\xi}\right)}{\frac{'b}{\xi}-\frac{'b^2}{\xi^2}-C^2\left(\frac{'b}{\xi}\right)}.$$

Nun betrachte man die Funktion

$$(79)\qquad M(y) = \frac{y\,C(y)}{y-y^2-C^2(y)}, \qquad 0 < y < 1.$$

Differentiation ergibt

$$(80)\qquad M'(y) = C(y)\,\frac{y^2(1-y^2)+C^4(y)}{(y-y^2-C^2(y))^2} < 0 \quad \text{wegen (77) und } 0 < y < 1.$$

Da also $M(y)$ monoton abnimmt und da $'b > 'a$ ist, so ist in (77) der erste Posten größer als der zweite, und daher ist $L'(\xi) < 0$. Damit ist die Monotonie der Funktion (76) bewiesen. Nach (75) ist $L('b) > 0$ und $L(\infty) < 0$. Daher gibt es genau ein $\xi = 2\,r_\Delta > 'b$, für das $L(2\,r_\Delta) = 0$ ist, d. h. (27) gilt. Damit haben wir

Satz 10. Dafür, daß es ein stumpfwinkliges negativ orientiertes Dreikreis mit den Stücken $'a < 'b$, $'\gamma$, $0 < '\gamma < \pi$ gibt, ist (75) *notwendig und hinreichend. $'b$ soll dabei die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Seite sein. Es gibt dann genau ein stumpfwinkliges negativ orientiertes Dreikreis.*

Nach Satz 8 gibt es zu gegebenen Stücken $'a < 'b$, $'\gamma$, $0 < '\gamma < \pi$ dann und nur dann ein eindeutig bestimmtes spitzwinkliges negativ orientiertes Dreikreis, wenn

$$C\left(\frac{'a}{'b}\right) < \frac{\pi}{2} - \frac{'\gamma}{2}$$

ist. Zwischen beiden Fällen steht das rechtwinklige Dreikreis mit den gegebenen Stücken $'a < 'b$, $'\gamma$. $'b$ soll die Hypotenuse sein. Nach (26) ist dann notwendigerweise

$$C\left(\frac{'a}{'b}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{'\gamma}{2}.$$

Und diese Bedingung ist dann auch hinreichend. Man bestimmt $'c$ aus

$$C\left(\frac{'c}{'b}\right) = \frac{'\gamma}{2}.$$

Ich komme zu den Fällen, in denen *zwei Seiten $'a$, $'b$ und ein gegenüberliegender Winkel $'\alpha$, $0 < '\alpha < \pi$ gegeben* sind. Dann gibt es im allgemeinen zwei nichtkongruente negativ orientierte Dreikreise mit diesen gegebenen Stücken. Man hat so zu schließen: Ich betrachte zunächst den Fall $'a \leqq 'b$. Aus $'a$ und $'\alpha$ folgt nach (18) der Wert von r_Δ eindeutig. Aus ihm und aus $'b$ entnimmt man dann eindeutig $'\beta \leqq '\alpha$ mit $0 < '\beta < \pi$. Ist nun $'\alpha + '\beta < \pi$, so bestimme man $'\gamma$ so, daß $'\alpha + '\beta + '\gamma = \pi$ ist. Zu diesem $'\gamma$ gibt es dann aus (18) ein $'c$, so daß ein spitzwinkliges negativ orientiertes Dreikreis bestimmt ist. Im Falle, daß $'\beta < '\alpha$ ist, kann man aber auch $'\gamma$ aus $0 < '\gamma < \pi$ so bestimmen, daß $'\alpha - '\beta + '\gamma = \pi$ ist, und dann $'c$ aus (18) entnehmen. Zu den gegebenen Stücken gehört dann auch ein stumpfwinkliges negativ orientiertes Dreikreis. Ist $'\alpha + '\beta = \pi$, so ist das Dreikreis rechtwinklig, und $'c = 2\,r_\Delta$. Ist $'\alpha + '\beta > \pi$,

so kann man entweder $'\gamma$ aus $'\alpha + '\beta - '\gamma = \pi$ entnehmen $(0 < '\gamma < \pi)$, und damit ein stumpfwinkliges negativ orientiertes Dreikreis festlegen, oder aber man kann für $'\alpha > '\beta$ auch $'\gamma$ aus $'\alpha - '\beta + '\gamma = \pi$ entnehmen und so ein zweites stumpfwinkliges negativ orientiertes Dreikreis mit den gegebenen Stücken ermitteln. Ganz ebenso schließt man, wenn $'a \geq 'b$, $'\alpha$, $0 < '\alpha < \pi$ gegeben ist. Nur fällt in diesem Fall, daß der gegebene Winkel der größeren Seite gegenüberliegt, jedesmal die zweite Möglichkeit weg, so daß es dann stets nur einen Dreikreis gibt. So hat man den

Satz 11. Durch zwei Seiten und den der größeren der beiden Seiten gegenüberliegenden Winkel ist ein negativ orientiertes Dreikreis eindeutig bestimmt. Falls die beiden gegebenen Seiten gleich sind, bleibt die Eindeutigkeit bestehen. Wenn aber der gegebene Winkel der kleineren der beiden gegebenen Seiten gegenüberliegt, so ist entweder ein rechtwinkliges Dreikreis eindeutig, oder sind zwei stumpfwinklige Dreikreise oder ein spitzwinkliges und ein stumpfwinkliges Dreikreis stets mit negativer Orientierung bestimmt.

Der Fall, daß eine Seite, der gegenüberliegende Winkel und ein anliegender Winkel gegeben sind, wird durch die Bemerkung erledigt, daß man bereits aus der Seite und ihrem Gegenwinkel nach (18) r_Δ kennt.

Sind eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben, so kann man aus der Forderung, daß ein spitzwinkliges, ein rechtwinkliges oder ein stumpfwinkliges negativ orientiertes Dreikreis vorliegen soll, auch den letzten Winkel ermitteln und damit die Aufgabe auf schon behandelte zurückführen.

Sind endlich drei Winkel gegeben, so ist das Dreikreis negativer Orientierung bis auf Ähnlichkeitstransformationen festgelegt.

Außendreikreise.

Methodisch bietet die Behandlung der übrigen Dreikreistypen, insbesondere der Außendreikreise, keinen Anlaß zu neuen Ansätzen. In den Ergebnissen liegt aber manches anders als bei den Innendreikreisen. Die drei Typen der Außendreikreise sind in den Fig. 6, 7, 8 dargestellt. Es ist für die nachstehenden Betrachtungen etwas bequemer, die positiv orientierten Dreikreise zu untersuchen. Ich nehme also an, daß der Umkreis des gleicheckigen Euklidischen Dreiecks durch die Reihenfolge $A\,B\,C$ positiv orientiert ist, d. h. daß sein Inneres zur Linken des durch die Reihenfolge $A\,B\,C$ bestimmten Umlaufsinnes liegt. Die grundlegenden Formeln für die Dreikreise sind durch (18) gegeben. Dazu kommen noch die Ungleichungen für die Winkel. Es gelten für positiv orientierte Außendreikreise die folgenden Beziehungen, die zugleich die benötigten Werte der C-Funktion erkennen lassen. Es ist im spitzwinkligen Fall des positiv orientierten Außendreikreises

$$(81)\quad \pi < '\alpha = 2C\left(\frac{'a}{2r_\Delta}\right) < 2\pi,\ \pi < '\beta = 2C\left(\frac{'b}{2r_\Delta}\right) < 2\pi,\ \pi < '\gamma = 2C\left(\frac{'c}{2r_\Delta}\right) < 2\pi$$

$$(82)\quad '\alpha + '\beta + '\gamma = 5\pi,\ \text{d. h.}\ C\left(\frac{'a}{2r_\Delta}\right) + C\left(\frac{'b}{2r_\Delta}\right) + C\left(\frac{'c}{2r_\Delta}\right) = \frac{5\pi}{2}.$$

Im rechtwinkligen Fall des positiv orientierten Außendreikreises ist

$$(83)\qquad \pi < {'\alpha} = 2\,C\left(\frac{'a}{2r_\Delta}\right) < 2\pi,\ \pi < {'\gamma} = 2\,C\left(\frac{'c}{2r_\Delta}\right) < 2\pi,$$

$$(84)\qquad {'\alpha} + {'\gamma} = 3\pi,\ \text{d. h. } C\left(\frac{'a}{2r_\Delta}\right) + C\left(\frac{'c}{2r_\Delta}\right) = \frac{3\pi}{2}.$$

Im stumpfwinkligen Fall des positiv orientierten Dreikreises ist

$$(85)\ \pi < {'\alpha} = 2C\left(\frac{'a}{2r_\Delta}\right) < 2\pi, -2\pi < {'\beta} = 2C\left(\frac{'b}{2r_\Delta}\right) < -\pi,\ \pi < {'\gamma} = 2C\left(\frac{'c}{2r_\Delta}\right) < 2\pi$$

$$(86)\qquad {'\alpha} + {'\beta} + {'\gamma} = \pi\ \text{ d. h. } C\left(\frac{'a}{2r_\Delta}\right) + C\left(\frac{'b}{2r_\Delta}\right) + C\left(\frac{'c}{2r_\Delta}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Der stumpfe Winkel liegt wieder B gegenüber. Beim Vergleich von (86) mit (27) muß man bedenken, daß in (27) der Winkel $'\beta$ mit seinem absoluten Betrag angesetzt war, während für (86) nach (85) sein Vorzeichen berücksichtigt ist. Dies Vorzeichen werde ich auch bei der weiteren Betrachtung beibehalten. Die Formeln (18) lassen anhand der Fig. 9 und wegen der Formeln (81), (83), (85) erkennen, daß die Seiten der Außendreikreise durchweg negativ sind. Aus den Formeln (16) ersieht man, daß die $'r$ für negative Winkel positiv, für positive Winkel negativ ausfallen. Die Beziehungen (82), (84) und (86) geben zusammen mit (18) die Analoga zum Cosinussatz und zum Pythagoras an. Das Analogon des Sinussatzes folgt wieder aus (18) und ist in den Formeln (29) enthalten.

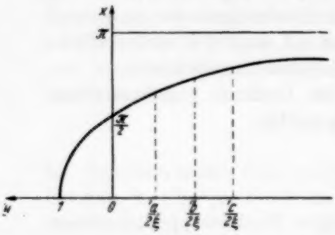

Fig. 11a.

Ich betrachte nun die spitzwinkligen positiv orientierten Außendreikreise näher. In Fig. 11a ist der Zweig der Funktion $C(y)$ skizziert, dem nach (81) die Werte von C zu entnehmen sind. Da r_Δ positiv sein soll und, wie gesagt, alle Seiten negativ sind, kommen unter der C-Funktion nur negative Werte der unabhängigen Variablen vor. Man setze

$$(87)\qquad N(\xi) = C\left(\frac{'a}{2\xi}\right) + C\left(\frac{'b}{2\xi}\right) + C\left(\frac{'c}{2\xi}\right) - \frac{5\pi}{2}$$

und bemerke, daß $N(0) = \frac{\pi}{2}$ und $N(\infty) = -\pi$ ist. Da laut Fig. 11a die drei Summanden C von (87) gleichsinnig monoton sind, ist auch $N(\xi)$ monoton. Daher gibt es genau ein $\xi = r_\Delta$, für das (82) gilt. Somit haben wir

Satz 12. Es gibt zu beliebig gegebenen Seiten $'a < 0$, $'b < 0$, $'c < 0$ *genau ein positiv orientiertes spitzwinkliges Außendreikreis mit diesen drei Seiten.*

Man bemerkt, daß bei den spitzwinkligen Außendreikreisen kein dem Satz 2 entsprechender Satz gilt. Die Seiten können beliebig vorgegeben werden.

Eine ganz entsprechende Überlegung lehrt

Satz 13. Es gibt bei beliebig gegebenen Katheten $'a < 0$, $'c < 0$ *genau ein positiv orientiertes rechtwinkliges Außendreikreis mit diesen Katheten.*

Mühsamere Überlegungen sind beim positiv orientierten stumpfwinkligen Außendreikreis anzustellen. In Fig. 11b sind die für die Formeln (85) und (86) benötigten Werte der C-Funktion angedeutet. In (86) ist daher der erste und der dritte Summand positiv, während der zweite negativ ist.

Nun gilt *Satz 14. Bei stumpfwinkligen positiv orientierten Außendreikreisen gilt für die Seitenlängen* $|'a|$, $|'b|$, $|'c|$ *notwendig*

(88) $$|'a| + |'c| < |'b|.$$

Dabei liegt 'b dem stumpfen Winkel gegenüber.

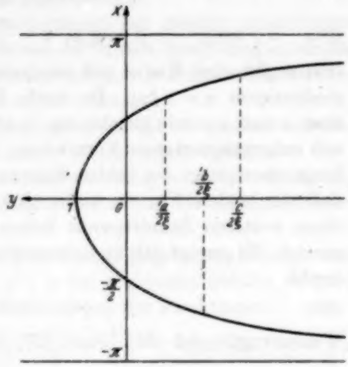

Fig. 11b.

Unter Berücksichtigung der Vorzeichen der $'a$, $'b$, $'c$ lautet die zu beweisende Ungleichung (88)

(89) $$'a + 'c - 'b > 0.$$

Wie schon gesagt, ist nach (16) wegen (85)

$$'r_a < 0, \quad 'r_b > 0, \quad 'r_c < 0.$$

Aus den Formeln (16) und (3) oder anhand von Fig. 8 unter Berücksichtigung der Vorzeichen ergibt sich (30) und daraus wieder

$$'r_a : 'r_b : 'r_c = (\sin'\alpha - \sin'\beta - \sin'\gamma) : (-\sin'\alpha + \sin'\beta - \sin'\gamma) : (-\sin'\alpha - \sin'\beta + \sin'\gamma).$$

Die Klammern haben bei dieser Schreibweise, wie man am bequemsten an der mittleren sieht, alle das gleiche Vorzeichen, wie die zugehörigen $'r$. Dann lautet die zu beweisende Ungleichung (89)

$$'\alpha\,(\sin'\alpha - \sin'\beta - \sin'\gamma) + '\gamma\,(-\sin'\alpha - \sin'\beta + \sin'\gamma) - {}'\beta\,(-\sin'\alpha + \sin'\beta - \sin'\gamma) > 0.$$

Trägt man hier $'\beta = \pi - '\alpha - '\gamma$ ein, so ergibt sich nach Umrechnung

(90) $$\frac{\pi - 2'\alpha - \pi\cos'\alpha}{\sin'\alpha} + \frac{\pi - 2'\gamma - \pi\cos'\gamma}{\sin'\gamma} > 0,$$

was wegen (85) tatsächlich der Fall ist. Damit ist Satz 14 bewiesen. Nun zeige ich, daß die darin angegebene notwendige Bedingung auch hinreichend ist. Dazu setze ich

(91) $$E(\xi) = C\left(\frac{'a}{2\xi}\right) + C\left(\frac{'b}{2\xi}\right) + C\left(\frac{'c}{2\xi}\right) - \frac{\pi}{2}.$$

Es ist $E(0) = \frac{\pi}{2}$; $E(\infty) = 0$. Ferner ist

(92) $$E(\xi) = -\frac{1}{\pi}('a - 'b + 'c)\frac{1}{\xi} + \text{Glieder höherer Ordnung in } \frac{1}{\xi}.$$

Daher ist $E(\xi) < 0$ für große ξ. Aus Stetigkeitsgründen gibt es daher mindestens ein $r_\Delta > 0$, für das $E(r_\Delta) = 0$ und daher (86) erfüllt ist. Es gibt daher

zu beliebig gegebenen negativen, der Bedingung (89) genügenden Seiten mindestens ein positiv orientiertes stumpfwinkliges Außendreikreis mit diesen Seiten. Daß es aber nur ein solches Außendreikreis gibt, ist schwerer zu zeigen. Ähnlich wie beim Innendreikreis betrachte ich die aus (18) und (86) folgenden Beziehungen

$$(93)\quad 'b\,\alpha \operatorname{cotg}\alpha = 'a\,\beta \operatorname{cotg}\beta,\ \gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta,$$

$$(94)\quad 'b\,\gamma \operatorname{cotg}\gamma = 'c\,\beta \operatorname{cotg}\beta,\ \alpha = \frac{\pi}{2} - \gamma - \beta,\ '\alpha = 2\,\alpha,\ '\beta = 2\,\beta,\ '\gamma = 2\,\gamma.$$

(93) ergibt eine Kurve mit eindeutigem $\gamma = \gamma(\alpha)$ und (94) eine Kurve mit eindeutigem $\alpha = \alpha(\gamma)$. Da beide Kurven auseinander hervorgehen, indem man α und γ sowie gleichzeitig $'a$ und $'c$ vertauscht, haben sie Krümmungen mit entgegengesetztem Vorzeichen. Es wird sich zeigen, daß die Krümmung längs einer jeden der beiden Kurven ihr Vorzeichen nicht ändert. Das lehrt, daß die beiden Kurven außer dem trivialen Schnittpunkt nicht mehr als einen weiteren Schnittpunkt haben können. Seine Existenz wurde bereits gezeigt. Es genügt (93) zu untersuchen. Differentiation nach dem Parameter β ergibt

$$(95)\qquad \dot\gamma = -1 - \dot\alpha,\quad \ddot\gamma = -\ddot\alpha.$$

Wieder ergibt sich (56). Statt (57) folgt aber jetzt

$$(96)\qquad \dot\alpha\,\ddot\gamma - \ddot\alpha\,\dot\gamma = \ddot\alpha.$$

Die an (56) anschließenden Überlegungen bleiben bis zur Formel (61) ungeändert, so daß es wieder darauf ankommt zu zeigen, daß der in (61) angegebene Ausdruck ein längs der ganzen Kurve (93) unveränderliches Vorzeichen hat. Wegen (85) folgt aber aus (86)

$$(97)\qquad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - \gamma < 0,\qquad \text{d. h. } \alpha < -\beta.$$

Da aber für die durch (62) erklärte Funktion $F(-\xi) = F(\xi)$ gilt, so ist wieder zu zeigen, daß $F(\xi)$ auch in $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ monoton abnimmt. Man bilde wieder die Ableitung (63) und dividiere den Zähler durch das jetzt negative $\xi \sin 2\xi$. Dann ist analog zu (64) jetzt zu beweisen, daß

$$(98)\quad 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2\xi}{2\xi} + \frac{2\xi}{\sin 2\xi}\right) + \xi^2 - 2\sin^2\xi + \frac{1}{2}\xi \sin 2\xi > 0 \text{ in } \frac{\pi}{2} < \xi < \pi.$$

Der zweite Posten ist jetzt immer positiv. Ferner ist in $\frac{\pi}{2} < \xi < \pi$

$$(99)\quad 1 + \xi^2 - 2\sin^2\xi + \xi \sin\xi \cos\xi = 1 + \xi^2 - 2 + \cos\xi\,(2\cos\xi + \xi \sin\xi)$$
$$> -1 + \xi^2 + \frac{\pi}{2}\cos\xi = -1 + \xi^2 - \frac{\pi}{2}\sin\left(\xi - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$> -1 + \xi^2 - \frac{\pi}{2}\left(\xi - \frac{\pi}{2}\right) = -1 + \frac{\pi^2}{4} + \xi\left(\xi - \frac{\pi}{2}\right) > 0.$$

Damit ist (98) bewiesen. Die beiden Kurven (93) und (94) haben beide eine Krümmung mit festem Vorzeichen längs der ganzen Kurve. Dies Vorzeichen ist für alle $'a$, $'b$, $'c$ das gleiche. Es ändert sich aber, wenn man α und γ (und zugleich $'a$ und $'c$) vertauscht. Daher haben beide Kurven ver-

schiedenes Vorzeichen der Krümmung und können daher nur zwei Schnittpunkte aufweisen. So haben wir nun

Satz 15. Dafür, daß es zu gegebenen Seiten $'a < 0$, $'b < 0$, $'c < 0$ *ein positiv orientiertes stumpfwinkliges Außendreikreis mit diesen Seiten gibt, derart, daß* $'b$ *dem stumpfen Winkel gegenüberliegt, ist* $'a + 'c > 'b$ *notwendig und hinreichend. Dann gibt es genau ein stumpfwinkliges positiv orientiertes Dreikreis mit diesen Seiten und so, daß* $'b$ *dem stumpfen Winkel gegenüberliegt.*

Ich komme zu den übrigen Kongruenzsätzen bei positiv orientierten Außendreikreisen. Da die negativ orientierten durch eine Spiegelung an einem Durchmesser des Umkreises der drei Ecken aus den positiv orientierten hervorgehen, genügt es, die positiv orientierten zu betrachten.

Satz 16. Es gibt genau ein spitzwinkliges Außendreikreis positiver Orientierung, falls zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Satz 17. Es gibt genau ein positiv orientiertes stumpfwinkliges Dreikreis, wenn die der stumpfen Ecke anliegenden beiden Seiten und ihr eingeschlossener Winkel gegeben sind.

Sind für Satz 16 $'a < 0$, $'c < 0$, $\pi < '\beta < 2\pi$ die gegebenen Stücke, und sind für Satz 17 $'a < 0$, $'c < 0$, $-2\pi < '\beta < \pi$ die gegebenen Stücke, so wird der Leser leicht die beiden Sätze durch Betrachtung der Funktionen

$$C\left(\frac{'a}{2\xi}\right) + C\left(\frac{'c}{2\xi}\right) - \frac{5\pi}{2} + \frac{'\beta}{2} \qquad \text{mit } \pi < 2C < 2\pi$$

im Falle von Satz 16 und

$$C\left(\frac{'a}{2\xi}\right) + C\left(\frac{'c}{2\xi}\right) - \frac{\pi}{2} + \frac{'\beta}{2} \qquad \text{mit } \pi < 2c < 2\pi$$

im Falle von Satz 17 beweisen.

Etwas länger muß ich verweilen, wenn im stumpfwinkligen Fall $'a < 0$, $'b < 0$, $\pi < '\gamma < 2\pi$ gegeben sind. Wieder soll $'b$ der stumpfen Ecke gegenüberliegen. Da nach Satz 14 notwendig $'a - 'b > -'c > 0$ ist, so muß man annehmen, daß $'a - 'b > 0$ gegeben ist. Sonst kann die Aufgabe keine Lösung haben. Nun ist $r_\Delta > 0$ so zu bestimmen, daß

$$\begin{gathered} L(r_\Delta) \equiv C\left(\frac{'a}{2r_\Delta}\right) + C\left(\frac{'b}{2r_\Delta}\right) - \frac{\pi}{2} + \frac{'\gamma}{2} = 0, \quad \pi < 2C\left(\frac{'a}{2r_\Delta}\right) < 2\pi, \\ -2\pi < 2C\left(\frac{'b}{2r_\Delta}\right) < -\pi \end{gathered} \tag{100}$$

ist. Da aber $L(0) = L(\infty) = -\frac{\pi}{2} + \frac{'\gamma}{2} > 0$ ist, muß etwas anders als in den vorigen Fällen überlegt werden. Ich betrachte die Funktion

$$y(\xi) = C\left(\frac{'a}{2\xi}\right) + C\left(\frac{'b}{2\xi}\right). \tag{101}$$

Dann verlangt die Aufgabe, ein $\xi = r_\Delta > 0$ zu finden, für das

$$y(r_\Delta) = \frac{\pi}{2} - \frac{'\gamma}{2} < 0 \tag{102}$$

ist. Nun ist $y(\xi) < 0$ für alle $\xi > 0$, wenn $'a - 'b > 0$ ist. Daher ist für die Existenz eines Außendreikreises der verlangten Art weiter notwendig, daß

$$\frac{\pi}{2} - \frac{'\gamma}{2} \geq \operatorname*{Min}_{\xi > 0}\left[C\left(\frac{'a}{2\xi}\right) + C\left(\frac{'b}{2\xi}\right)\right] \tag{103}$$

ist. Aus Stetigkeitsgründen ist klar, daß diese Bedingung auch hinreichend ist. Aber es ist die Frage, wieviel positiv orientierte Außendreikreise mit den gegebenen Stücken es dann gibt. Es wird sich zeigen, daß es genau eines gibt, wenn in (103) das Gleichheitszeichen steht, sonst aber genau zwei. Zur Beweisführung betrachte ich die in (100) eingeführte Funktion $L(\xi)$ in $\xi > 0$. Ich erinnere mich, daß sie in (76) mit anderen Werten von $'a$, $'b$ und $'\gamma$ schon einmal vorkam. Die dort angestellte Betrachtung kann mutatis mutandis auch hier verwendet werden. Sie lehrt, daß es darauf ankommt zu zeigen, daß die dort stehende Ungleichung (80) auch für $y < 0$ richtig ist. Der Nenner in (80) ist aber nach (77) auch für $y < 0$ negativ. Es kommt also darauf an zu erkennen, daß der Zähler in (80) für $y < 0$ positiv ist. Das heißt, zu zeigen ist, daß

$$C^4 + y^2 - y^4 > 0 \qquad \text{in } y < 0.$$

Nun ist nach (77)

$$C^2 > y^2 - y \qquad \text{in } y < 0.$$

Daher ist in der Tat

$$C^4 + y^2 - y^4 > y^4 - 2\,y^3 + y^2 + y^2 - y^4 = 2\,y^2 - 2\,y^3 > 0 \text{ in } y < 0.$$

So haben wir Satz 18. *Wenn für ein stumpfwinkliges positiv orientiertes Außendreikreis* $'a < 0$, $'b < 0$, $\pi < '\gamma < 2\,\pi$ *gegeben sind und* $'b$ *wieder der stumpfen Ecke gegenüberliegen soll, so sind für die Existenz eines solchen Dreikreises zwei notwendige Bedingungen vorhanden, nämlich* $'a > 'b$ *und* (103). *Sind diese erfüllt, so gibt es zwei stumpfwinklige positiv orientierte Außendreikreise mit diesen gegebenen Stücken, die in eines zusammenfallen, wenn in* (103) *das Gleichheitszeichen steht.*

Eine ganz analoge Betrachtung führt zu einem ganz entsprechenden Ergebnis, wenn $'c < 0$, $'b < 0$, $\pi < '\alpha < 2\,\pi$ gegeben sind.

Sind eine Seite und die anliegenden Winkel gegeben, so gilt

Satz 19. Sind eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben, und zwar so, daß die Winkel den aus den einleitenden Darlegungen dieser Arbeit geläufigen Ungleichheitsbeziehungen genügen und eine mit diesen Bedingungen verträgliche Summe besitzen, so gibt es genau ein positiv orientiertes Außendreikreis mit den gegebenen Stücken.

Der Beweis von Satz 19 mag dem Leser überlassen bleiben. Es sei nur erwähnt, daß man jetzt r_Δ unmittelbar explizit aus einer Gleichung von der Form

$$C\left(\frac{'a}{2r_\Delta}\right) + \frac{'\beta}{2} + \frac{'\gamma}{2} = \frac{2n+1}{2}\pi$$

durch

$$\frac{1}{2r_\Delta} = \frac{1}{'a}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi - \frac{'\beta}{2} - \frac{'\gamma}{2}\right] \operatorname{cotg}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi - \frac{'\beta}{2} - \frac{'\gamma}{2}\right]$$

gewinnen kann.

Entsprechende Bemerkungen gelten auch für den Fall, daß eine Seite, ein anliegender und der der Seite gegenüberliegende Winkel gegeben sind. Es gilt

Satz 20. Durch eine Seite, einen anliegenden und den der Seite gegenüberliegenden Winkel ist ein positiv orientiertes Außendreikreis von gegebenem Typus

(d. h. der Angabe, ob spitzwinklig, rechtwinklig oder stumpfwinklig) eindeutig bestimmt. Die gegebenen Winkel sind dabei freilich an gewisse aus dem Beginn dieser Arbeit ersichtliche Ungleichheitsbeziehungen gebunden.

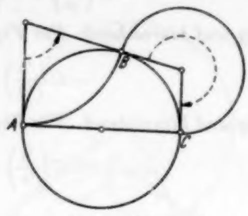

Fig. 13.

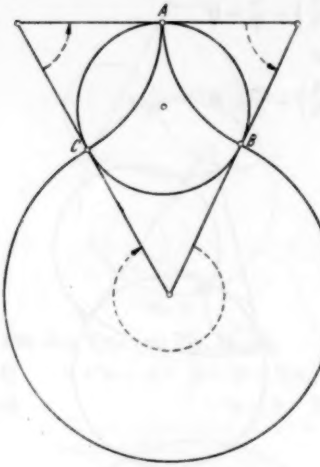

Fig. 12.

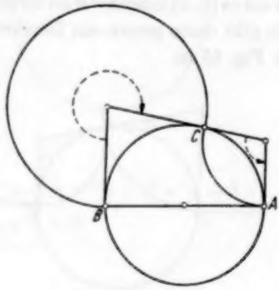

Fig. 14.

Der Fall, daß zwei Seiten und der gegenüberliegende Winkel der einen gegeben sind, verlangt nur ganz einfache Diskussionen, die dem Leser überlassen bleiben mögen.

Weitere Dreikreistypen.

Für 14 weitere in den Fig. 12 bis 25 dargestellte Typen will ich noch Resultate angeben, die sich mit den Methoden dieser Arbeit gewinnen lassen. Diese Typen sind dadurch charakterisiert, daß jeder Seitenkreisbogen entweder ein Innenkreisbogen oder ein Außenkreisbogen ist. Der Umkreis ist ein echter Kreis. Sämtliche Dreikreise sind negativ orientiert. Die Typen der Fig. 11—18 haben einen Außenkreisbogen, die der Fig. 19—25 haben zwei Außenkreisbogen. In der Fig. 12, 13, 14 ist stets $'a$ der Außenkreisbogen. Es gelten die folgenden Relationen

(104) $\quad -2\pi < '\alpha < -\pi, \quad 0 < '\beta < \pi, \quad 0 < '\gamma < \pi, \quad '\alpha + '\beta + '\gamma = -\pi$

$'a < 0, \quad 'b > 0, \quad 'c > 0, \quad 'r_a > 0, \quad 'r_b > 0, \quad 'r_c > 0$ für Fig. 12,

(105) $\quad -2\pi < '\alpha < -\pi, \quad 0 < '\gamma < \pi, \quad '\alpha + '\gamma = -\pi$

$'a < 0, \quad 'b > 0, \quad 'c > 0$ für Fig. 13,

(106) $\quad -2\pi < '\alpha < -\pi, \quad 0 < '\beta < \pi, \quad '\alpha + '\beta = -\pi$

$'a < 0, \quad 'b > 0, \quad 'c > 0$ für Fig. 14.

Satz 21. Für den Typ der Fig. 12 ist

$$(107)\qquad -C\left(\frac{'a}{\mu}\right)+C\left(\frac{'b}{\mu}\right)+C\left(\frac{'c}{\mu}\right)+\frac{\pi}{2}<0, \qquad \mu=\operatorname{Max}('b,'c)$$

notwendig und hinreichend. Für Fig. 13 ist

$$(108)\qquad -C\left(\frac{'a}{'b}\right)+C\left(\frac{'c}{'b}\right)+\frac{\pi}{2}=0$$

notwendig und hinreichend. Für Fig. 14 ist

$$(109)\qquad -C\left(\frac{'a}{'c}\right)+C\left(\frac{'b}{'c}\right)+\frac{\pi}{2}=0$$

notwendig und hinreichend. Unter C ist dabei stets ein in $(0,\pi)$ fallender Wert verstanden. Es gibt dann genau ein Dreikreis.

Für Fig. 15 ist

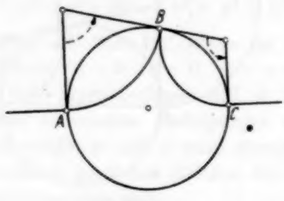

Fig. 15.

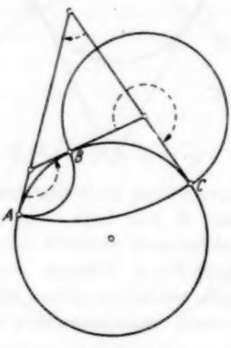

Fig. 16.

$$(110)\qquad 0<'\alpha<\pi,\quad 0<'\gamma<\pi,\quad '\alpha+'\gamma=\pi$$
$$'a>0,\qquad 'c>0$$

und gilt

Satz 22. Es gibt bei gegebenen Katheten $'a>0$, $'c>0$ genau ein rechtwinkliges Dreikreis vom Typus der Fig. 15.

Für den in Fig. 16 dargestellten Typus gilt

$$(111)\quad -2\pi<'\alpha<-\pi,\quad -\pi<'\beta<0,\quad 0<'\gamma<\pi,\quad '\alpha+'\beta+'\gamma=-\pi$$
$$'a<0,\quad 'b>0,\quad 'c>0.$$

Satz 23. Für die Existenz eines Dreikreises vom Typus der Fig. 16 sind die folgenden beiden Bedingungen notwendig und hinreichend

$$(112)\qquad -'a+'c>'b,\quad 'b\geqq 'c$$

$$(113)\qquad -C\left(\frac{'a}{'b}\right)+C\left(\frac{'c}{'b}\right)+\frac{\pi}{2}>0, \qquad 0<C<\pi.$$

Es existiert, wenn sie erfüllt sind, genau ein Dreikreis vom Typus der Fig. 16 mit gegebenen Seiten. Man bemerkt noch auf Grund von Satz 21, daß die Typen der Fig. 12, 13 und 16, für die (112) *gilt, ähnlich wie die Innendreikreise eine Einheit bilden, da sie sich dann dadurch voneinander trennen, daß die linke Seite der Relation* (113) *für Fig. 12: <0, für Fig. 13: $=0$ und für Fig. 16: >0 ist.*

Der Typ von Fig. 17 unterscheidet sich im Ergebnis von dem der Fig. 16 nur durch die Vertauschung von $'b$ und $'c$. Jetzt bilden analog die Typen der Fig. 12, 14 und 17 eine Einheit.

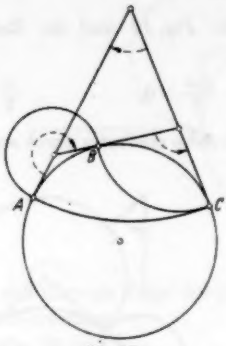

Fig. 17.

Fig. 18.

Für den Typ von Fig. 18 gilt

(114) $\quad 0 < '\alpha < \pi, \quad \pi < '\beta < 2\pi, \quad 0 < '\gamma < \pi, \quad '\alpha + '\beta + '\gamma = 3\pi$

(115) $\quad 'a > 0, \quad 'b < 0, \quad 'c > 0.$

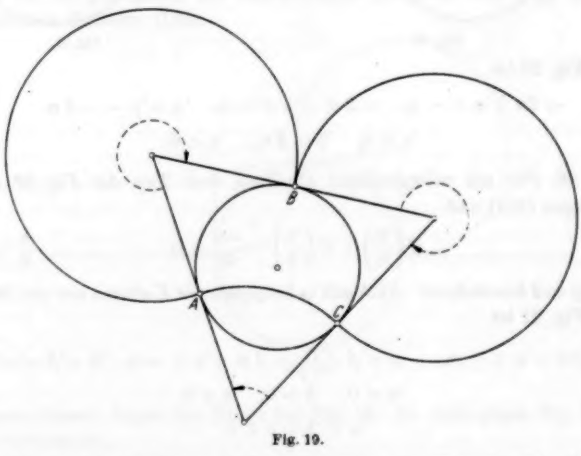

Fig. 19.

Satz 24. Für die Existenz eines Dreikreises vom Typ der Fig. 18 mit gegebenen Seiten sind die Bedingungen (115) *und*

(116) $$'a + 'b + 'c < 0$$

notwendig und hinreichend. Es gibt dann genau ein Dreikreis vom Typ der Fig. 18 mit gegebenen Seiten.

Für Fig. 19 ist

(117) $-2\pi < '\alpha < -\pi, \quad 0 < '\beta < \pi, \quad -2\pi < '\gamma < -\pi, \quad '\alpha + '\beta + '\gamma = -3\pi$

(118) $\qquad 'a < 0, \quad 'b > 0, \quad 'c < 0.$

Satz 25. Für ein Dreikreis vom Typ der Fig. 19 sind die Bedingungen (118) *und*

(119) $$C\left(\frac{'a}{'b}\right) + C\left(\frac{'c}{'b}\right) - \frac{3\pi}{2} > 0, \qquad \frac{\pi}{2} < C < \pi$$

notwendig und hinreichend. Das Dreikreis ist dann eindeutig durch seine Seiten bestimmt.

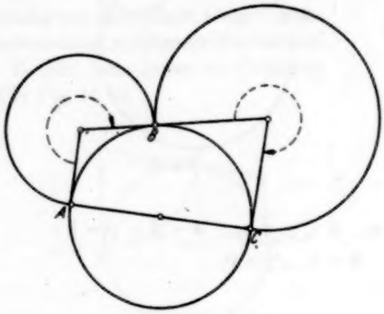

Fig. 20.

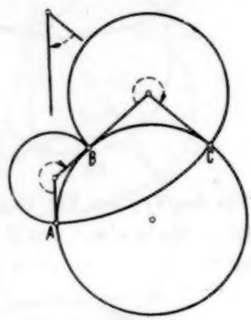

Fig. 21.

Für Fig. 20 ist

(120) $\qquad -2\pi < '\alpha < -\pi, \quad -2\pi < '\gamma < -\pi, \quad '\alpha + '\gamma = -3\pi$

(121) $\qquad 'a < 0, \quad 'b = 2\, r_\Delta, \quad 'c < 0.$

Satz 26. Für ein rechtwinkliges Dreikreis vom Typ der Fig. 20 sind die Bedingungen (121) *und*

(122) $$C\left(\frac{'a}{'b}\right) + C\left(\frac{'c}{'b}\right) - \frac{3\pi}{2} = 0, \qquad \frac{\pi}{2} < C < \pi$$

notwendig und hinreichend. Auch gibt es bei gegebenen Katheten nur ein Dreikreis.

Für Fig. 21 ist

(123) $-2\pi < '\alpha < -\pi, \quad -\pi < '\beta < 0, \quad -2\pi < '\gamma < -\pi, \quad '\alpha + '\beta + '\gamma = -3\pi$

(124) $\qquad 'a < 0, \quad 'b > 0, \quad 'c < 0$

(125) $\qquad 'a + 'b + 'c < 0.$

Satz 27. Für ein stumpfwinkliges Dreikreis vom Typus der Fig. 21 sind die Bedingungen (124), (125) *und*

$$C\left(\frac{'a}{'b}\right) + C\left(\frac{'c}{'b}\right) - \frac{3\pi}{2} < 0, \qquad \frac{\pi}{2} < C < \pi$$

notwendig und hinreichend. Es gibt dann bei gegebenen Seiten nur ein Dreikreis.

Übrigens ist die Bedingung (125) auch bei den Typen der Fig. 19 und 20 erfüllt. Sie brauchen in den Sätzen 25 und 26 nicht hervorgehoben zu werden,

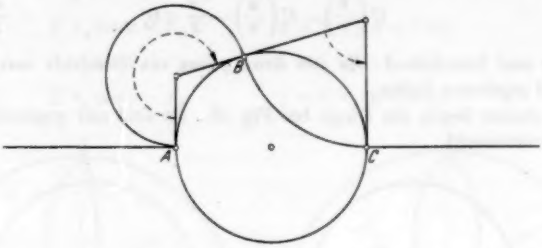

Fig. 22.

weil sie sich dort als Folge der in diesen Sätzen genannten Bedingungen (119) bzw. (122) erweisen.

Für Fig. 22 ist

$$0 < '\alpha < \pi, \quad -2\pi < '\gamma < -\pi, \quad '\alpha + '\gamma = -\pi$$

(126) $$'a > 0, \; 'c < 0.$$

Satz 28. Es gibt genau ein rechtwinkliges Dreikreis vom Typ der Fig. 22 mit gegebenen Katheten (126).

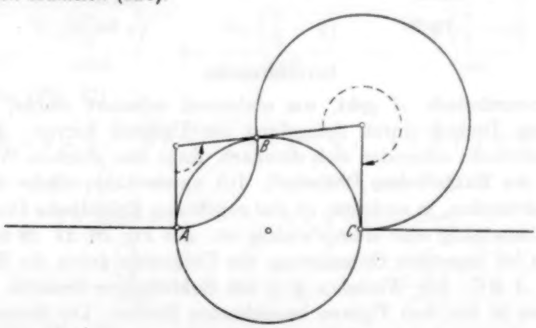

Fig. 23.

Genau ebenso liegen die Dinge bei Fig. 23. Es sind gegen Fig. 22 nur $'a$ und $'c$ vertauscht.

Für Fig. 24 ist

$$-2\pi < '\alpha < -\pi, \quad \pi < '\beta < 2\pi, \quad 0 < '\gamma < \pi, \quad '\alpha + '\beta + '\gamma = \pi$$

(127) $$'a < 0 \qquad 'b < 0, \qquad 'c > 0$$

(128) $$'b + 'c - 'a < 0.$$

Satz 29. ***Für die Existenz eines stumpfwinkligen Dreikreises vom Typ der Fig. 24 sind die Bedingungen*** **(127), (128)** ***und***

$$C\left(\frac{'b}{'c}\right)-C\left(\frac{'a}{'c}\right)-\frac{\pi}{2}<0, \qquad \frac{\pi}{2}<C<\pi$$

notwendig und hinreichend. Es gibt dann genau ein Dreikreis vom genannten Typus mit gegebenen Seiten.

Ganz ebenso liegen die Dinge bei Fig. 25. Es sind nur gegenüber Fig. 24 $'a$ und $'c$ vertauscht.

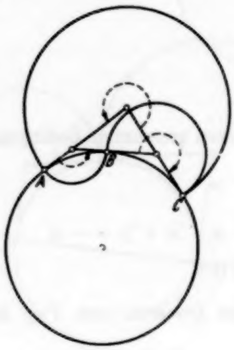

Fig. 24.

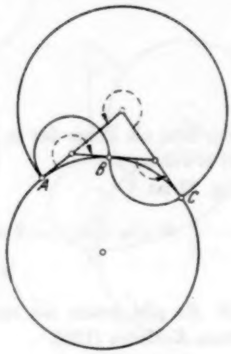

Fig. 25.

Inversdreiecke.

Das Inversdreieck $\cdot\Delta$ geht, wie einleitend erläutert wurde, aus einem Euklidischen Dreieck durch Spiegelung am Umkreis hervor. Die Seiten des Inversdreiecks schneiden sich demnach unter den gleichen Winkeln wie die Seiten des Euklidischen Dreiecks[6]). Ich unterscheide wieder drei Sorten von Inversdreiecken, je nachdem, ob das zugehörige Euklidische Dreieck spitzwinklig, rechtwinklig oder stumpfwinklig ist. Die Fig. 26, 27, 28 zeigen diese drei Typen bei negativer Orientierung des Umkreises durch die Reihenfolge der Ecken $A\ B\ C$. Die Winkel α, β, γ des Euklidischen Dreiecks erscheinen noch an den in den drei Figuren bezeichneten Stellen. Die Seiten und ihre in die Formeln eingehenden Maßzahlen bezeichne ich mit $\cdot a$, $\cdot b$, $\cdot c$, die Radien der Seiten mit $\cdot r_a$, $\cdot r_b$, $\cdot r_c$. Ich beschränke nun die Betrachtung auf negativ orientierte Inversdreiecke, deren Seiten dem Inneren des Umkreises angehören. Dann gelten die folgenden Beziehungen[7]): (r_Δ ist wieder der Radius des Umkreises).

---

[6]) Es läßt sich übrigens zeigen, daß diese Eigenschaft die Inversdreiecke unter allen denjenigen Kreisbogendreiecken kennzeichnet, deren Seiten durch einen Punkt gehen.

[7]) Will man allgemeinere Inversdreiecke studieren, so sind nur die Intervalle, in denen die Winkel liegen (und die Winkelsumme) zu ändern. Im hier zu behandelnden Fall sind die Winkel die gleichen wie im Euklidischen Dreieck.

Spitzwinklig (Fig. 26)

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}, \quad \alpha + \beta + \gamma = \pi$$

$$2 \cdot r_a \cos\alpha = r_\Delta \qquad \cdot a = 2 \cdot r_a(\pi - 2\,\alpha)$$
$$2 \cdot r_b \cos\beta = r_\Delta \qquad \cdot b = 2 \cdot r_b(\pi - 2\,\beta)$$
$$2 \cdot r_c \cos\gamma = r_\Delta \qquad \cdot c = 2 \cdot r_c(\pi - 2\,\gamma)$$

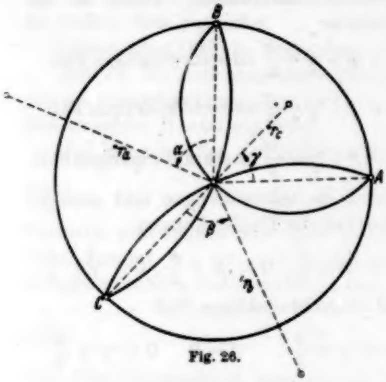

Fig. 26.

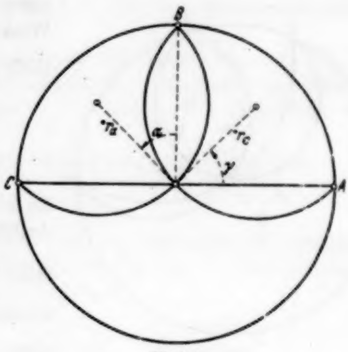

Fig. 27.

$$\cdot a = \frac{2 r_\Delta \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\alpha}, \quad \cdot b = \frac{2 r_\Delta \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)}{\cos\beta}, \quad \cdot c = \frac{2 r_\Delta \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)}{\cos\gamma}.$$

Rechtwinklig (Fig. 27)

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad \beta = \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}, \quad \alpha + \beta + \gamma = \pi$$

$$2 \cdot r_a \cos\alpha = r_\Delta, \qquad \cdot a = 2 \cdot r_a(\pi - 2\,\alpha)$$
$$2 \cdot r_c \cos\gamma = r_\Delta \qquad \cdot c = 2 \cdot r_c(\pi - 2\,\gamma),$$

$$\cdot a = \frac{2 r_\Delta \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\alpha}, \quad \cdot b = 2 r_\Delta, \quad \cdot c = \frac{2 r_\Delta \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)}{\cos\gamma}.$$

Stumpfwinklig (Fig. 28)

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < \beta < \pi, \quad 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}, \quad \alpha + \beta + \gamma = \pi$$

$$2 \cdot r_a \cos\alpha = r_\Delta \qquad \cdot a = 2 \cdot r_a(\pi - 2\,\alpha)$$
$$2 \cdot r_b \cos(\pi - \beta) = r_\Delta \qquad \cdot b = 2 \cdot r_b(2\,\beta - \pi)$$
$$2 \cdot r_c \cos\gamma = r_\Delta \qquad \cdot c = 2 \cdot r_c(\pi - 2\,\gamma)$$

$$\cdot a = \frac{2 r_\Delta \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\alpha}, \quad \cdot b = \frac{2 r_\Delta \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)}{\cos\beta}, \quad \cdot c = \frac{2 r_\Delta \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)}{\cos\gamma}.$$

Es erscheint nun zweckmäßig, durch

$$(129)\quad {}^{\cdot}\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha,\quad {}^{\cdot}\beta = \frac{\pi}{2} - \beta,\quad {}^{\cdot}\gamma = \frac{\pi}{2} - \gamma \quad \text{im spitzwinkligen Fall}$$

$${}^{\cdot}\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha,\quad {}^{\cdot}\beta = \frac{\pi}{2} - \beta,\quad {}^{\cdot}\gamma = \frac{\pi}{2} - \gamma \quad \text{im rechtwinkligen Fall}$$

$${}^{\cdot}\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha,\quad {}^{\cdot}\beta = \beta - \frac{\pi}{2},\quad {}^{\cdot}\gamma = \frac{\pi}{2} - \gamma \quad \text{im stumpfwinkligen Fall}$$

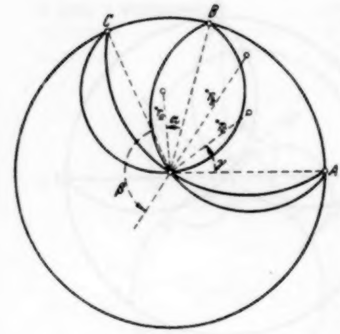

Fig. 28.

neue Winkel einzuführen. Dann ist die Winkelsumme

$$(130)\quad {}^{\cdot}\alpha + {}^{\cdot}\beta + {}^{\cdot}\gamma = \frac{\pi}{2} \quad \text{im spitzwinkligen Fall}$$

$${}^{\cdot}\alpha + {}^{\cdot}\beta + {}^{\cdot}\gamma = \frac{\pi}{2} \quad \text{im rechtwinkligen Fall}$$

$${}^{\cdot}\alpha - {}^{\cdot}\beta + {}^{\cdot}\gamma = \frac{\pi}{2} \quad \text{im stumpfwinkligen Fall.}$$

Es bestehen im spitzwinkligen und stumpfwinkligen Fall die Ungleichungen

$$(131)\quad 0 < {}^{\cdot}\alpha < \frac{\pi}{2},\quad 0 < {}^{\cdot}\beta < \frac{\pi}{2},\quad 0 < {}^{\cdot}\gamma < \frac{\pi}{2},$$

während im rechtwinkligen Fall

$$(132)\quad 0 < {}^{\cdot}\alpha < \frac{\pi}{2},\quad {}^{\cdot}\beta = 0 \quad 0 < {}^{\cdot}\gamma < \frac{\pi}{2}$$

gilt. Für die Seiten des Inversdreiecks gilt dann im spitzwinkligen und im stumpfwinkligen Fall

$$(133)\quad {}^{\cdot}a = \frac{2 r_\Delta {}^{\cdot}\alpha}{\sin {}^{\cdot}\alpha},\quad {}^{\cdot}b = \frac{2 r_\Delta {}^{\cdot}\beta}{\sin {}^{\cdot}\beta},\quad {}^{\cdot}c = \frac{2 r_\Delta {}^{\cdot}\gamma}{\sin {}^{\cdot}\gamma},$$

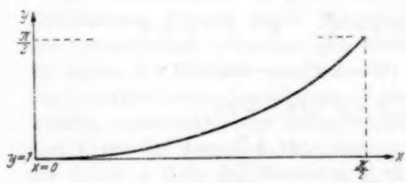

Fig. 29.

während im rechtwinkligen Fall

$$(134)\quad {}^{\cdot}a = \frac{2 r_\Delta {}^{\cdot}\alpha}{\sin {}^{\cdot}\alpha},\quad {}^{\cdot}b = 2 r_\Delta,\quad {}^{\cdot}c = \frac{2 r_\Delta {}^{\cdot}\gamma}{\sin {}^{\cdot}\gamma}$$

ist.

Ich betrachte nun die Funktion

$$(135)\quad y = \frac{x}{\sin x} \text{ und ihre Umkehrungsfunktion } x = s(y).$$

Sie sind in den für unsere Betrachtung benötigten Intervallen durch die Fig. 29 veranschaulicht. In Betracht zu ziehen ist nach (131) bis (134) das Intervall $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, wobei $x = 0$ nur im rechtwinkligen Fall eine Rolle spielt. Das Vorzeichen der Ableitungen

$$(136)\quad y' = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x},\quad y'' = \frac{x + x\cos^2 x - \sin 2x}{\sin^3 x} > 0,\quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

belegt die Richtigkeit der Zeichnung durch eine wachsende konvexe Kurve. Um die Angabe betr. y'' einzusehen, dividiere man den Zähler durch $\cos x$

und beachte $\cos x + 1/\cos x > 2$, $0 < x < \pi/2$. Die Tatsache, daß $1 \leq y < \frac{\pi}{2}$ für $0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$ gilt, führt nach (133) und (134) zu der Einsicht, daß in allen drei Fällen die Größen $\cdot a/2\, r_\Delta$, $\cdot b/2\, r_\Delta$, $\cdot c/2\, r_\Delta$ dem Intervall $\left[1, \frac{\pi}{2}\right)$ entnommen sind. Dabei kommt der Wert 1 selbst nur beim rechtwinkligen Inversdreieck vor. Das monotone Wachstum von $y = x/\sin x$ bedeutet nach (133) und (134) die Richtigkeit von

Satz 30. Dem größeren der drei Winkel $\cdot\alpha$, $\cdot\beta$, $\cdot\gamma$ liegt in jedem Inversdreieck die größere Seite gegenüber.

Weiter lehrt (130) in Verbindung mit (131) die Richtigkeit von

Satz 31. Im stumpfwinkligen Inversdreieck gilt $\cdot\beta < \cdot\alpha$ und $\cdot\beta < \cdot\gamma$. Daher gilt im stumpfwinkligen Inversdreieck auch $\cdot b < \cdot a$ und $\cdot b < \cdot c$. Dabei liegt $\cdot b$ dem stumpfen Winkel gegenüber.

Man kann in allen drei Fällen daher die Bezeichnung so wählen, daß

$$2\, r_\Delta \leqq \cdot b \leqq \cdot a \leqq \cdot c < r_\Delta \pi. \tag{137}$$

Dadurch wird freilich auch über die Orientierung des Inversdreiecks verfügt. Dabei kommt $\cdot b = 2\, r_\Delta$ nur im rechtwinkligen Fall vor und $\cdot b = \cdot a$ kann nur im spitzwinkligen Fall eintreten. Aus (137) folgt noch

$$1 \leqq \frac{\cdot a}{\cdot b} < \frac{\pi}{2}, \quad 1 \leqq \frac{\cdot c}{\cdot b} < \frac{\pi}{2}. \tag{138}$$

Das Gleichheitszeichen kommt nur beim spitzwinkligen Fall vor. Die Relationen (130) kann man nach (133) und (134) schreiben:

$$s\left(\frac{\cdot a}{2\, r_\Delta}\right) + s\left(\frac{\cdot b}{2\, r_\Delta}\right) + s\left(\frac{\cdot c}{2\, r_\Delta}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{im spitzwinkligen Inversdreieck} \tag{139}$$

$$s\left(\frac{\cdot a}{\cdot b}\right) + s\left(\frac{\cdot c}{\cdot b}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{im rechtwinkligen Inversdreieck} \tag{140}$$

$$s\left(\frac{\cdot a}{2\, r_\Delta}\right) - s\left(\frac{\cdot b}{2\, r_\Delta}\right) + s\left(\frac{\cdot c}{2\, r_\Delta}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{im stumpfwinkligen Inversdreieck.} \tag{141}$$

Die sämtlichen hier auftretenden Werte der Funktion $s(y)$ gehören dem Intervall $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ an.

(140) ist wieder das Analogon des *Pythagoras* beim Inversdreieck und (139) und (141) enthalten im Zusammenspiel mit einer der Beziehungen (133) und (134) das Seitenstück zum *Cosinussatz* als Beziehung zwischen den drei Seiten und einem Winkel. Entfernt man aus (133) durch Quotientenbildung r_Δ, so enthält man den *Sinussatz*.

Die *Kongruenzsätze*, welche zwei Seiten und den gegenüberliegenden Winkel einer derselben betreffen, ergeben sich mühelos aus (133) und (134). Die übrigen Kongruenzsätze verlangen etwas weiteres Eindringen. Ich behandle erst den Fall, daß drei Seiten gegeben sind.

Ich beginne mit dem spitzwinkligen Inversdreieck. Die Relation (139) bedeutet bei gegebenen $\cdot a$, $\cdot b$, $\cdot c$ eine Gleichung für r_Δ. Die linke Seite ist

eine monotone stetige Funktion von r_Δ. In Betracht kommen nach (137) nur Werte von $2\,r_\Delta$ aus dem Intervall

$$\left(\frac{2\cdot c}{\pi}, \cdot b\right). \tag{142}$$

In diesem Intervall liegt die linke Seite von (139) zwischen

$$s\left(\frac{\cdot a}{\cdot b}\right) + s\left(\frac{\cdot c}{\cdot b}\right) + s(1) = s\left(\frac{\cdot a}{\cdot b}\right) + s\left(\frac{\cdot c}{\cdot b}\right) \quad \text{und}$$

$$s\left(\frac{\cdot a\,\pi}{2\cdot c}\right) + s\left(\frac{\cdot b\,\pi}{2\cdot c}\right) + s\left(\frac{\pi}{2}\right) = s\left(\frac{\cdot a\,\pi}{2\cdot c}\right) + s\left(\frac{\cdot b\,\pi}{2\cdot c}\right) + \frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{2}.$$

Dafür, daß die Gleichung (139) für einen passenden r_Δ-Wert erfüllt werden kann, ist es daher notwendig und hinreichend, daß

$$s\left(\frac{\cdot a}{\cdot b}\right) + s\left(\frac{\cdot c}{\cdot b}\right) \leqq \frac{\pi}{2}$$

ist. Das Gleichheitszeichen bedeutet aber $2\,r_\Delta = \cdot b$, d. h. nach (140) den rechtwinkligen Fall. Daher gilt

Satz 32. Für die Existenz eines spitzwinkligen Inversdreiecks mit gegebenen Seiten ist

$$s\left(\frac{\cdot a}{\cdot b}\right) + s\left(\frac{\cdot c}{\cdot b}\right) < \frac{\pi}{2} \tag{143}$$

notwendig und hinreichend. Es gibt dann genau ein spitzwinkliges Inversdreieck.

Ist die Bedingung (143) erfüllt, so gibt es genau einen Wert $2\,r_\Delta$, für den (139) gilt. Hat man ihn ermittelt, so ergeben sich aus (133) eindeutig die Winkel, und das Inversdreieck ist bestimmt. Entsprechendes lehren die Formeln (134) im rechtwinkligen Fall:

Satz 33. Es gibt genau ein rechtwinkliges Inversdreieck mit gegebenen Katheten $\cdot a$, $\cdot c$.

Zur Untersuchung des Seitenkongruenzsatzes bei stumpfwinkligen Inversdreiecken gehe ich vom Sinussatz aus. Aus (133) folgt mit (130)

$$\alpha \cdot b \sin\beta = \beta \cdot a \sin\alpha, \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha + \beta \tag{144}$$

$$\gamma \cdot b \sin\beta = \beta \cdot c \sin\gamma, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \gamma + \beta, \quad \alpha, \beta, \gamma \text{ aus } \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \tag{145}$$

Ich schreibe statt $\cdot\alpha$, $\cdot\beta$, $\cdot\gamma$ kurz α, β, γ aus gleich ersichtlichem Grund. Das sind zwei Kurven

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - s\left(\frac{\cdot a}{\cdot b}\frac{\beta}{\sin\beta}\right) + \beta, \quad \alpha = s\left(\frac{\cdot a}{\cdot b}\frac{\beta}{\sin\beta}\right) \tag{144'}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - s\left(\frac{\cdot c}{\cdot b}\frac{\beta}{\sin\beta}\right) + \beta, \quad \gamma = s\left(\frac{\cdot c}{\cdot b}\frac{\beta}{\sin\beta}\right) \tag{145'}$$

in der α, γ-Ebene, deren Schnittpunkten die Inversdreiecke mit den gegebenen Seiten entsprechen. Ich untersuche ähnlich wie bei den Innendreikreisen die Krümmung dieser Kurven. Es genügt (144) zu betrachten. Wieder ist das Vorzeichen von $d^2\gamma/d\alpha^2$ dem Vorzeichen von $\dot\alpha\,\ddot\gamma - \ddot\alpha\,\dot\gamma$ gleich, weil sich $\dot\alpha$ als positiv erweisen wird. Dabei bedeuten die über die α, γ gesetzten Punkte Differentiation nach dem Parameter β, auf den ich die Kurve (144) bezogen

denke. Ich werde wieder zeigen, daß die Krümmung längs der ganzen Kurven ein festes Vorzeichen hat. Dann ist es bei (145) ebenso, aber das Vorzeichen ist das entgegengesetzte. Man findet

$$(146)\qquad \dot{\alpha}\,{}^{\cdot}b\sin\beta + \alpha\,{}^{\cdot}b\cos\beta = {}^{\cdot}a\sin\alpha + \beta\,{}^{\cdot}a\,\dot{\alpha}\cos\alpha, \qquad \dot{\gamma} = 1 - \dot{\alpha}$$

$$(147)\qquad \dot{\alpha} = \frac{\alpha\,{}^{\cdot}b\cos\beta - {}^{\cdot}a\sin\alpha}{\beta\,{}^{\cdot}a\cos\alpha - {}^{\cdot}b\sin\beta} = \frac{\alpha\sin\alpha(\beta\cos\beta - \sin\beta)}{\beta\sin\beta(\alpha\cos\alpha - \sin\alpha)}.$$

Es ist in der Tat $\dot{\alpha} > 0$ für α, β aus $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Weiter ist

$$(148)\qquad \ddot{\gamma} = -\ddot{\alpha}, \quad \dot{\alpha}\,\ddot{\gamma} - \ddot{\alpha}\,\dot{\gamma} = -\ddot{\alpha}.$$

Man hat

$$\begin{aligned}
\ddot{\alpha} &= \left(\frac{\alpha\sin\alpha}{\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}\right)_\alpha \dot{\alpha}\,\frac{\beta\cos\beta - \sin\beta}{\beta\sin\beta} + \frac{\alpha\sin\alpha}{\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}\left(\frac{\beta\cos\beta - \sin\beta}{\beta\sin\beta}\right)_\beta \\
&= \left(\frac{\alpha\sin\alpha}{\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}\right)_\alpha \frac{\alpha\sin\alpha}{\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}\left(\frac{\beta\cos\beta - \sin\beta}{\beta\sin\beta}\right)^2 - \\
(149)\qquad &- \frac{\alpha\sin\alpha}{\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}\left(\frac{\beta\cos\beta - \sin\beta}{\beta\sin\beta}\right)^2\left(\frac{\beta\sin\beta}{\beta\cos\beta - \sin\beta}\right)_\beta \\
&= \frac{\alpha\sin\alpha}{\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}\left(\frac{\beta\cos\beta - \sin\beta}{\beta\sin\beta}\right)^2\left[\left(\frac{\alpha\sin\alpha}{\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}\right)_\alpha - \left(\frac{\beta\sin\beta}{\beta\cos\beta - \sin\beta}\right)_\beta\right] \\
&= \frac{\alpha\sin\alpha}{\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}\left(\frac{\beta\cos\beta - \sin\beta}{\beta\sin\beta}\right)^2\left[\frac{\alpha^2 - \sin^2\alpha}{(\alpha\cos\alpha - \sin\alpha)^2} - \frac{\beta^2 - \sin^2\beta}{(\beta\cos\beta - \sin\beta)^2}\right].
\end{aligned}$$

Nun bedenke man, daß nach Satz 31 $\alpha > \beta$ ist, und betrachte die Funktion

$$(150)\qquad f(x) = \frac{x^2 - \sin^2 x}{(x\cos x - \sin x)^2}, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

deren Monotonie untersucht werden soll. Man findet

$$(151)\qquad f'(x) = 2\,\frac{(x\cos x - \sin x)\,(x - \sin x\cos x) + (x^2 - \sin^2 x)\,x\sin x}{(x\cos x - \sin x)^3}.$$

Der Nenner ist negativ. Der Zähler ist

$$Z \equiv x^2\cos x - 2\,x\sin x + \sin^2 x\cos x + x^3\sin x.$$

Ich beweise, daß

$$(152)\qquad Z \equiv x^2\cos x - 2\,x\sin x + \sin^2 x\cos x + x^3\sin x > 0 \qquad \text{in } \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Es ist nämlich

$$\begin{aligned}
Z > x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}\right) - 2x\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + x^3\left(x - \frac{x^3}{3!}\right) \\
= \frac{x^6}{720}\,(38 - 11\,x^2) > 0 \qquad \text{für } x^2 < \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Im ganzen ist daher nach (151)

$$f'(x) < 0 \qquad \text{in } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Diese Überlegungungen lehren nun schließlich, daß die Krümmung der Kurve (144) überall negativ ist. Entsprechend ist die Krümmung der Kurve (145) überall positiv. Weil

$$\frac{x\sin x}{x\cos x - \sin x} < 0$$

ist und monoton wächst und weil nach Satz 31 $\alpha > \beta$ ist, so folgt nach (147) $0 < \dot{\alpha} < 1$ und daher nach (146) $0 < \dot{\gamma} < 1$. Daher zeigt die Kurve (144) den aus Fig. 30 ersichtlichen Verlauf. Sie beginnt mit $\beta = 0$ auf der gestrichelten Diagonalen $\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2}$, dringt mit wachsendem β immer weiter in das obere Dreieck der Fig. 30 ein und endet für $\beta = s\left(\frac{\pi}{2}\frac{{}^{\cdot}b}{{}^{\cdot}a}\right)$ auf $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

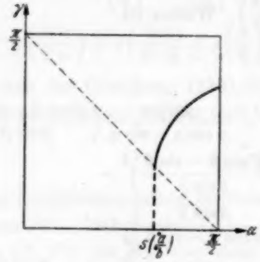

Fig. 30.

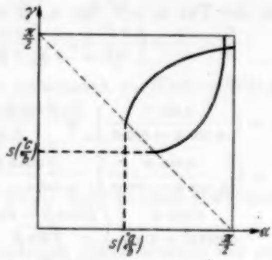

Fig. 31.

Die Gerade $\gamma = \frac{\pi}{2}$ wird nicht erreicht. Denn dann müßte nach (144′) für ein β aus $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ gelten

$$s\left(\frac{{}^{\cdot}a}{{}^{\cdot}b}\frac{\beta}{\sin\beta}\right) = \beta.$$

Das bedeutet aber

$$\frac{{}^{\cdot}a}{{}^{\cdot}b}\frac{\beta}{\sin\beta} = \frac{\beta}{\sin\beta},$$

was wegen ${}^{\cdot}a > {}^{\cdot}b$ unmöglich ist.

In Fig. 31 sind die beiden Kurven (144) und (145) für einen Fall

$$s\left(\frac{{}^{\cdot}a}{{}^{\cdot}b}\right) + s\left(\frac{{}^{\cdot}c}{{}^{\cdot}b}\right) < \frac{\pi}{2} \tag{153}$$

aufgezeichnet. Man sieht, daß unter dieser Bedingung (153), für die schon ein spitzwinkliges Inversdreieck vorhanden war, stets auch noch ein stumpfwinkliges existiert. Das spitzwinklige erscheint, wenn man in Fig. 31 die beiden Kurven für die jetzt den spitzwinkligen Inversdreiecken entsprechenden negativen β in das untere Dreieck der Figur verlängert.

Diese Feststellung gilt nach Fig. 32 auch für den Fall

$$s\left(\frac{{}^{\cdot}a}{{}^{\cdot}b}\right) + s\left(\frac{{}^{\cdot}c}{{}^{\cdot}b}\right) = \frac{\pi}{2}. \tag{154}$$

Außer dem dann vorhandenen rechtwinkligen Inversdreieck ist dann auch ein stumpfwinkliges vorhanden. Ich habe zur Begründung lediglich noch zu zeigen, daß in dem gemeinsamen Punkt auf der Diagonalen die Kurve (144) schwächer geneigt ist als die Kurve (145). Es ist nämlich nach (146) und (147) für $\beta = 0$

$$\frac{d\gamma}{d\alpha} = \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\alpha}} = \frac{1 - \dot{\alpha}}{\dot{\alpha}} = \infty.$$

Die Kurve (145) hat daher in jenem Schnittpunkt mit der Diagonalen eine der α-Achse parallele Tangente, während die Tangente von (144) der γ-Achse parallel ist.

Aus Stetigkeitsgründen ergibt sich, daß daher auch für nicht zu große Werte von

$$s\left(\frac{\cdot a}{\cdot b}\right) + s\left(\frac{\cdot c}{\cdot b}\right) > \frac{\pi}{2} \tag{155}$$

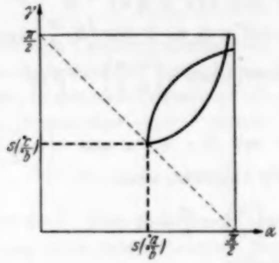

Fig. 32.

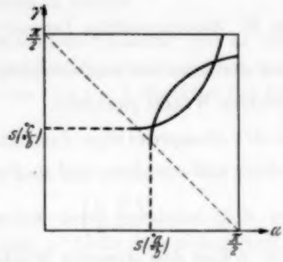

Fig. 33.

stumpfwinklige, und zwar genau zwei stumpfwinklige Inversdreiecke existieren, wie das Fig. 33 zeigt. Schon nach (138) ist

$$s\left(\frac{\cdot a}{\cdot b}\right) + s\left(\frac{\cdot c}{\cdot b}\right) < 2s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi\,.$$

Jedoch ist π zwar eine obere Schranke, aber jedenfalls nicht die obere Grenze der Summe

$$s\left(\frac{\cdot a}{\cdot b}\right) + s\left(\frac{\cdot c}{\cdot b}\right). \tag{156}$$

Denn käme (156) dem Wert π beliebig nahe, so müßte jeder Summand dem Wert $\frac{\pi}{2}$ beliebig nahekommen können. Daher müßten auch die Quotienten $\cdot a/\cdot b$ und $\cdot c/\cdot b$ diesem Wert $\pi/2$ beliebig nahekommen können. Das heißt, es müßte nach (137) $\cdot b$ nahezu $2\,r_\Delta$ und $\cdot a$ und $\cdot c$ gleichzeitig nahezu $r_\Delta \pi$ sein können. Dem entspricht aber nach (133), daß $\cdot\alpha$ und $\cdot\gamma$ nahezu $\pi/2$ und $\cdot\beta$ nahezu 0 sein müßte. Das verträgt sich aber nicht mit der Winkelsumme (130).

Numerische Rechnungen lassen erwarten, daß die gesuchte obere Grenze ein Maximum ist, das für $\cdot\alpha = \cdot\gamma = \frac{\pi}{3}$, $\cdot\beta = \frac{\pi}{6}$ eintritt. Es würde dann dies Maximum ungefähr bei 1,88 liegen. Jedenfalls ist es größer als $\pi/2\sqrt{2} = 1{,}11\ldots$

Ich fasse das Ergebnis zusammen.

Satz 34. Es gibt eine Zahl S zwischen $\frac{\pi}{\cdot 2\sqrt{2}}$ *und* π, *die die obere Grenze bildet für diejenigen Werte der Summe* (156), *für welche bei gegebenen Seiten* $\cdot a, \cdot b, \cdot c$ *stumpfwinklige Inversdreiecke existieren. Ist jene Summe* (156) $\leq \frac{\pi}{2}$, *so existiert neben dem spitzwinkligen bzw. dem rechtwinkligen Inversdreieck genau ein stumpfwinkliges Inversdreieck mit den gegebenen Seiten. Ist aber*

jene Summe größer als $\pi/2$ und kleiner als S, so existieren genau zwei stumpfwinklige Inversdreiecke, die in eines zusammenfallen, wenn die Summe (156) *den Wert S hat.*

Ohne Ausführung der Beweise führe ich noch die folgenden Ergebnisse an.

Satz 35. Spitzwinklige Inversdreiecke mit $\cdot a \leqq \cdot c$, $\cdot\beta$ aus $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ existieren dann und nur dann und sind eindeutig bestimmt, wenn $s\left(\frac{\cdot c}{\cdot a}\right) < \frac{\pi}{2} - \cdot\beta$.

Satz 36. Stumpfwinklige Inversdreiecke mit $\cdot a \leqq \cdot c$, $\cdot\beta$ aus $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ existieren dann und nur dann und sind eindeutig bestimmt, wenn $s\left(\frac{\cdot a}{\cdot b}\frac{\pi}{2}\right) > \cdot\beta$ ist. $\cdot b$ liegt dem stumpfen Winkel gegenüber.

Satz 37. Stumpfwinklige Inversdreiecke mit $\cdot b < \cdot c$, $\cdot\alpha$ aus $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ existieren dann und nur dann und sind eindeutig bestimmt, wenn

$$s\left(\frac{\cdot b}{\cdot c}\frac{\pi}{2}\right) < \cdot\alpha \quad \text{und} \quad s\left(\frac{\cdot c}{\cdot b}\right) < \frac{\pi}{2} - \cdot\alpha$$

erfüllt ist. $\cdot b$ liegt dem stumpfen Winkel gegenüber.

(Eingegangen am 17. Dezember 1954.)

van der Waerden, B. L.
Math. Annalen, Bd. 130, S. 87—101 (1955).

Die Cohomologietheorie der Polyeder*.

Von

B. L. van der Waerden in Zürich.

Unter den Cohomologietheorien für topologische Räume gibt es eine, die sich durch besondere Einfachheit der Begriffsbildung auszeichnet, nämlich diejenige, in der eine Cokette φ^p als Funktion von $p+1$ Punkten des Raumes und der Corand $\delta\varphi^p = \varphi^{p+1}$ durch

$$\delta\varphi^p(x_0\ldots x_{p+1}) = \sum_0^{p+1}(-1)^i\,\varphi^p(x_0\ldots x_{i-1}\,x_{i+1}\ldots x_{p+1})$$

definiert wird. Eine Cokette φ^p heißt Cozykel, wenn $\delta\varphi^p$ lokal (d. h. in einer Umgebung eines jeden Punktes) Null ist, und φ^p heißt cohomolog Null, wenn φ^p lokal gleich einem Corand $\delta\varphi^{p-1}$ ist.

Diese Definitionen stammen im wesentlichen von Alexander[1]). Bei Alexander kommen in der Corandbildung noch Zahlenfaktoren vor, die man nach einem Vorschlag von Wallace besser wegläßt. Spanier[2]) hat in ähnlicher Weise auch die relativen Cohomologiegruppen eines Raumes modulo Untermengen A definiert. Er zeigt, daß diese Cohomologietheorie die Axiome von Eilenberg und Steenrod erfüllt und daß sie für kompakte Räume mit der Theorie von Cech übereinstimmt.

Ferner beweist Spanier, daß für ein Polyeder, dessen Triangulierung lokal endlich ist, die Cohomologiegruppe des Polyeders mit der auf unendliche Coketten aufgebauten Cohomologiegruppe der Triangulierung übereinstimmt.

Versucht man, von hier aus den Anschluß an die gewöhnliche Homologietheorie der simplizialen Komplexe zu gewinnen, so entsteht eine formale Schwierigkeit. Gewöhnlich definiert man Ketten als endliche Summen von orientierten Simplices $a_p = (e_0e_1\ldots e_p)$, wobei πa_p für jede gerade Permutation π der Ecken $e_0,\ldots, e_p$ mit a_p, für jede ungerade Permutation mit $-a_p$ identifiziert wird. Aus diesen Ketten bildet man die *gewöhnliche* oder *alternierende Homologiegruppe* $H_{*p}(K)$ für die Dimension p.

Dual zu den alternierenden Ketten sind die *alternierenden Coketten*. Man kann sie erklären als Funktionen $f(a_p)$ mit Werten aus einer additiven Gruppe G, mit der Eigenschaft $f(\pi a_p) = \pm f(a_p)$ mit — für ungerade Permutationen. Aus diesen Coketten bildet man die zu $H_{*p}(K)$ duale *alternierende Cohomologiegruppe* $H^{*p}(K)$. Näheres in § 4.

---

*) Rolf Nevanlinna zum 60. Geburtstag am 22. Oktober 1955 gewidmet.

[1]) J. W. Alexander: On the ring of a compact metric space. Proc. Nat. Acad. Sci. **21**, p. 511 (1935).

[2]) E. H. Spanier: Cohomology theory for general spaces. Ann. of Math. **49**, p. 407 (1948). Siehe auch T. Radó u. P. V. Reichelderfer: Continuous transformations in analysis. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1955.

Spanier definiert jedoch eine Cokette auf dem Komplex K als eine beliebige Funktion $f^p(e_0, \ldots, e_p)$ mit Werten aus G, die definiert ist, wenn $e_0, \ldots, e_p$ Ecken eines Simplex von K sind. Die Cohomologiegruppe $H^p(K)$, die man so erhält, ist nicht dual zur gewöhnlichen (alternierenden) Homologiegruppe $H_{*p}(K)$, sondern zur *geordneten Homologiegruppe* $H_p(K)$, die wir in § 1 definieren werden. Das ist die Schwierigkeit.

Nach Eilenberg und Steenrod[3]) ist die geordnete Homologiegruppe $H_p(K)$ zur alternierenden $H_{*p}(K)$ isomorph. Dual dazu kann man auch beweisen, daß die geordnete Cohomologiegruppe $H^p(K)$ zur alternierenden $H^{*p}(K)$ isomorph ist, womit die erwähnte formale Schwierigkeit überwunden wäre.

Die vollständige Ausführung der eben skizzierten Überlegungen erfordert ein gründliches Literaturstudium und einige Denkarbeit. Es fragt sich, ob es keinen bequemeren Zugangsweg zum Invarianzbeweis der gewöhnlichen Cohomologiegruppen gibt.

Ein solcher Weg bietet sich, wenn man die Voraussetzungen, auf die Spanier sich stützt, unter die Lupe nimmt. Spanier setzt die Isomorphie der Cohomologiegruppe von K mit derjenigen einer baryzentrischen Unterteilung σK als bekannt voraus. Analysiert man nun die bekannten Beweise für die Isomorphie der Homologie- und Cohomologiegruppen von K und σK und unterscheidet dabei sorgfältig zwischen geordneten und alternierenden Ketten (und Coketten), so sieht man, daß eben diese Beweise unmittelbar folgendes ergeben:

Die alternierenden Homologie- und Cohomologiegruppen von K sind isomorph den geordneten Homologie- und Cohomologiegruppen der Unterteilung σK.

Der Beweis wird für die Homologie in § 3, für die Cohomologie in § 5 erbracht werden.

Hat man dieses Ergebnis einmal, so kann man darauf die Theorie von Spanier aufbauen, ohne daß die erwähnte Schwierigkeit auftaucht. Von der gewöhnlichen (alternierenden) Cohomologiegruppe von K kommt man in einem ersten Schritt zur geordneten Cohomologiegruppe von σK und von dort auf dem von Spanier angegebenen Wege zur topologisch invarianten Cohomologiegruppe des Polyeders. In §§ 6—8 wird das näher ausgeführt werden.

Zur Bequemlichkeit des Lesers soll hier vom Apparat der algebraischen Topologie (Homologie- und Cohomologietheorie) nichts vorausgesetzt, sondern alles ab ovo entwickelt werden. Auch die Arbeit von Spanier braucht man nicht vorher zu lesen. Spanier verwendet eine komprimierte Begriffsschrift; um seine Beweise zu verstehen, muß man fast jeden Satz mühsam dechiffrieren. Wir wollen dem Leser dieses Dechiffrieren nach Möglichkeit ersparen, brauchen dafür allerdings etwas mehr Druckseiten.

Die Beweismethoden sind dieselben wie bei Spanier. An Neuem kommt nur eine Kleinigkeit heraus, nämlich daß die Voraussetzung der lokalen Endlichkeit des Komplexes unnötig ist.

---

[3]) S. Eilenberg u. N. Steenrod: Foundations of Algebraic Topology, Theorem 6.9, p. 175. Princeton 1952.

In §§ 1—3 wird die Homologietheorie der Komplexe entwickelt, in §§ 4—5 ihre Cohomologietheorie, in §§ 6—8 die topologisch invariante Cohomologietheorie.

§ 1. Geordnete und alternierende Homologiegruppen.

Die Begriffe Simplex, Komplex, Polyeder und baryzentrische Unterteilung werden als bekannt vorausgesetzt. Auf einige Konventionen möge aber hingewiesen werden.

Ein *Polyeder* ist ein topologischer Raum T, Vereinigungsmenge von endlich oder unendlich vielen Simplices. Die Menge der Simplices ist ein *Komplex* K, die *Triangulierung* des Polyeders. Jeder Punkt des Raumes T ist innerer Punkt eines einzigen Simplex. Lokale Endlichkeit wird nicht verlangt, sondern nur, daß die offenen Simplexsterne von K offene Mengen von T sind.

Jedes Simplex X^p soll $p+1$ *verschiedene* Ecken haben, jedoch dürfen mehrere X^p dieselben Ecken haben.

Ein *orientiertes Simplex* a_{*p} des Komplexes K ist ein Simplex X^p, in dem eine Eckenfolge $e_0 \dots e_p$ und deren gerade Permutationen als *positiv* ausgezeichnet sind. Ist π eine ungerade Permutation, so wird πa_{*p} mit $-a_{*p}$ identifiziert. Endliche Summen

$$c_{*p} = \Sigma a_{*p}\, \gamma$$

mit Koeffizienten aus einer additiven Gruppe oder einem Körper Γ heißen *alternierende Ketten* auf K. Sie bilden die *alternierende Kettengruppe* C_{*p} des Komplexes K für die Dimension p und den Koeffizientenbereich Γ.

Daneben betrachten wir die *volle* oder *geordnete* Kettengruppe $C_p(K)$, die so definiert wird. Es sei $e_0 e_1 \dots e_p$ eine geordnete Folge von $p+1$ Ecken eines X^q. Wenn $r+1$ verschiedene unter den e_i vorkommen, so gibt es eine eindeutig bestimmte Seite X^r von X^q, die gerade diese Ecken hat. Eine solche Eckenfolge $e_0 e_1 \dots e_p$, verbunden mit der Angabe eines Trägersimplex X^q oder X^r, möge ein *Term* a_p heißen. Sind die Ecken nicht alle verschieden, so heißt der Term *ausgeartet*.

Aus den Termen kann man wieder *Ketten* $c_p = \Sigma a_p\, \gamma$ bilden. Sie bilden die *volle Kettengruppe* C_p.

Aus einer vollen Kette c erhält man eine alternierende c_*, indem man die ausgearteten Terme wegläßt und die nicht ausgearteten a_p durch a_{*p} ersetzt, wobei πa_{*p} gleich $\pm a_{*p}$ zu setzen ist. Die Abbildung $c \to c_*$ ist ein Homomorphismus von C_p auf C_{*p}.

Der *Rand* eines Termes $a_p = e_0 e_1 \dots e_p$ ist die ganzzahlige Kette von der Dimension $p-1$:

$$\partial a_p = \partial(e_0 e_1 \dots e_p) = \sum_0^p (e_0 \dots e_{i-1}\, e_{i+1} \dots e_p)\,(-1)^i \tag{1}$$

auf dem gleichen Träger X^r. Der Rand einer Kette ist die Summe der Ränder der Terme

$$\partial(\Sigma a_p\, \gamma) = \Sigma(\partial a_p)\, \gamma\,. \tag{2}$$

Die Randbedingung ist mit dem Homomorphismus $c \to c_*$ vertauschbar:

(3) $$(\partial c)_* = \partial(c_*) .$$

Der Rand des Randes ist Null:

(4) $$\partial\partial c_p = 0 .$$

Eine Kette, deren Rand Null ist, heißt *Zykel*. Die Zykel z_p bilden in C_p eine Untergruppe Z_p. In Z_p bilden die Ränder ∂c_{p+1} eine Untergruppe B_p (der Buchstabe B soll auf *berandend* oder *bounding* hindeuten). Die berandenden Zykeln heißen auch *homolog Null*. Die Faktorgruppe

(5) $$H_p = Z_p/B_p$$

heißt die *volle* oder *geordnete Homologiegruppe* des Komplexes K für die Dimension p.

Genauso definiert man die alternierende Zykelgruppe Z_{*p}, die alternierende Rändergruppe B_{*p} und die alternierende Homologiegruppe

(6) $$H_{*p} = Z_{*p}/B_{*p} .$$

§ 2. Baryzentrische Unterteilung.

Die baryzentrische Unterteilung des Komplexes K heiße σK. Der Schwerpunkt des Simplexes $X^p = e_0 e_1 \ldots e_p$ heiße $s_{01\ldots p}$. Das Simplex X^p wird in $n!$ Simplices der gleichen Dimension

$$Y^p = s_{0'} s_{0'1'} \ldots s_{0'1'\ldots p'}$$

unterteilt, wobei $0'1' \ldots p'$ jeweils eine Permutation von $01 \ldots p$ ist.

Greift man aus den Ecken von Y^p irgendeine Eckenfolge $s_{(0)} s_{(1)} \ldots s_{(q)}$ heraus, so erhält man einen *Term* $b_q = s_{(0)} s_{(1)} \ldots s_{(q)}$. Die eingeklammerten Nummern bezeichnen Indexmengen, die ineinandergeschachtelt sind in dem Sinne, daß jede von ihnen eine Teilmenge oder eine Obermenge jeder anderen ist. Zum Beispiel ist $b_2 = s_{012} s_{01} s_{01}$ ein Term auf dem Trägersimplex $Y^1 = s_{01} s_{012}$. Aus diesen Termen kann man wieder Ketten $\Sigma b_q \gamma$ bilden. Nun sei $a_p = e_0 e_1 \ldots e_p$ ein nicht ausgearteter Term von K mit dem Träger X^p. Die ganzzahlige Kette

(1) $$\sigma a_p = \Sigma s_{0'} s_{0'1'} \ldots s_{0'1'\ldots p'} \cdot \operatorname{sign}(0'1' \ldots p')$$

heißt die *Unterteilung des Termes* $a_p = e_0 \ldots e_p$. Die Summation erstreckt sich über alle $n!$ Permutationen $0'1' \ldots p'$. Vertauscht man die Ecken von X^p nach einer geraden oder ungeraden Permutation π, so multipliziert sich σa_p mit ± 1.

Bildet man andererseits den Ausdruck (1) für eine ausgeartete Kette a_p, so kommt Null heraus, da die Glieder sich paarweise wegheben. Also

(2) $$\sigma a_p = 0 , \qquad \text{wenn } a_p \text{ ausgeartet,}$$

(3) $$\sigma \pi a_p = \sigma a_p \cdot \operatorname{sign} \pi , \qquad \text{wenn } a_p \text{ nicht ausgeartet.}$$

Die Unterteilung einer Kette c_p wird definiert als Summe der Unterteilungen ihrer Glieder:

$$\sigma c_p = \sigma(\Sigma a_p \gamma) = \Sigma(\sigma a_p) \gamma .$$

Wegen (2) und (3) bleibt σc_p ungeändert, wenn in der Summe $\Sigma a_p\,\gamma$ die ausgearteten Glieder weggelassen werden oder wenn nicht-ausgeartete Glieder πa_p durch $\pm a_p$ ersetzt werden. Das heißt: *σc hängt nur von der alternierenden Kette c_* ab.*

Der Rand von σa_p ist die Unterteilung des Randes:

$$\partial\sigma a_p = \sigma\partial a_p\,. \tag{4}$$

Dieselbe Regel gilt für Ketten c_p. Die Operation σ ordnet also jedem alternierenden Zykel einen vollen Zykel und jedem alternierenden Rand einen vollen Rand zu. Daraus folgt:

σ bildet die alternierende Homologiegruppe von K in die volle Homologiegruppe von σK ab.

Es wird sich als zweckmäßig erweisen, außer den Termen von K und σK noch *gemischte Terme* y_q zu betrachten, von deren $q+1$ Ecken die letzten $q-r$ wie vorhin Schwerpunkte $s_{ij\ldots}$ sind, während die ersten $r+1$ Ecken des Komplexes K sind:

$$y_q = e_0\,e_1\ldots e_r\,s_{(r+1)}\ldots s_{(q)}\,. \tag{5}$$

Die eingeklammerten Nummern bezeichnen Indexmengen, die ineinandergeschachtelt sind und die Menge $\{01\ldots r\}$ umfassen. Beispiel: $y_3 = e_0 e_1 s_{01} s_{012}$. Die y_q sind einfach Eckenfolgen auf dem Trägersimplex X^p, sonst nichts.

Wenn man in (5) das Simplex $X^r = e_0\ldots e_r$ genau so unterteilt wie früher das Simplex X^p, aber die nachfolgenden $s_{(r+1)}\ldots s_{(q)}$ ungeändert läßt, so erhält man die *Unterteilungskette* von y_q:

$$\sigma\,y_q = \Sigma\, s_{0'} s_{0'1'}\ldots s_{0'1'\ldots r'} s_{(r+1)}\ldots s_{(q)}\cdot\operatorname{sign}(0'1'\ldots r')\,. \tag{6}$$

Die Randregel (4) gilt auch für gemischte Terme (5):

$$\partial\sigma\,y_q = \sigma\partial\,y_q\,. \tag{7}$$

§ 3. Simpliziale Approximation.

Jeder Punkt x eines Polyeders ist innerer Punkt eines einzigen Simplex $X^p = e_0\ldots e_p$ des Polyeders. Wird nun dem Punkt x willkürlich, aber ein für allemal fest eine Ecke e_k von X^p zugeordnet, und zwar so, daß x dem abgeschlossenen Simplexstern von e_k in σK angehört, so heißt $e_k = \tau x$ die *approximierende Ecke* zu x. Insbesondere hat jede Ecke $s_{ij\ldots m}$ der baryzentrischen Unterteilung eine approximierende Ecke e_k; der Index k ist einer unter den Indices $ij\ldots m$.

Hat man nun einen Term auf der Unterteilung von X^p

$$b_q = s_{(0)} s_{(1)}\ldots s_{(q)}$$

und ersetzt jede Ecke s durch ihre approximierende Ecke e auf X^p, so erhält man einen Term a_q auf dem Träger X^p, die *simpliziale Approximation* von b_q:

$$a_q = \tau b_q\,.$$

Die simpliziale Approximation einer Kette c ist wieder die Summe der Approximationen der Glieder

$$\tau(\Sigma b_q\,\gamma) = \Sigma(\tau b_q)\,\gamma\,. \tag{1}$$

Die Randbildung ist mit der Approximation vertauschbar:

(2) $$\partial \tau c = \tau \partial c\,.$$

Wir untersuchen nun, was herauskommt, wenn ein nicht ausgearteter Term $a_q = e_0 e_1 \ldots e_q$ zuerst unterteilt, dann approximiert und zum Schluß durch Weglassung ausgearteter Terme und Identifikation von πa_q mit $\pm a_q$ in eine alternierende Kette c_* übergeführt wird. Das Ergebnis ist das *Pflasterlemma*[4])

(3) $$(\tau \sigma a_q)_* = (a_q)_*\,.$$

Das Lemma wird bekanntlich durch vollständige Induktion nach der Dimension q bewiesen. Für $q = 0$ ist es trivial. Wird es für den Rand ∂a_q als gültig angenommen, so folgt es für a_q, denn die einzige alternierende Kette auf X_q, die den Rand $(\partial a_q)_*$ hat, ist $(a_q)_*$.

Für ausgeartete Terme a_q ist (3) trivial, da beide Seiten Null sind. Durch Summation folgt (3) für beliebige Ketten

(4) $$(\tau \sigma c)_* = c_*\,.$$

Läßt man die Sternchen weg, so werden (3) und (4) falsch. Das Pflasterlemma gilt nur im Bereich der alternierenden Ketten.

Wie der Beweis zeigt, gilt das Lemma auch für andere Unterteilungen als die baryzentrische. Insbesondere gilt es für die n-mal wiederholte baryzentrische Unterteilung:

(5) $$(\tau \sigma^n c)_* = c_*\,.$$

Im Bereich der alternierenden Ketten ist τ also die inverse Abbildung zu σ^n.

Bekanntlich wird jeder Term b_q mit seiner Approximation τb_q durch eine *Verbindungskette* v_{q+1} verbunden[5]). Es sei

$$b_q = s_{(0)} s_{(1)} \ldots s_{(q)}$$

ein Term auf σK. Die simpliziale Approximation sei

$$\tau b_q = e_0 e_1 \ldots e_q\,.$$

Die Verbindungskette $v_{q+1} = v(b_q)$ wird dann aus gemischten Termen y_{q+1} so gebildet:

(6) $$v(b_q) = \sum_{r=0}^{q} (e_0 e_1 \ldots e_r s_{(r)} s_{(r+1)} \ldots s_{(q)}) \cdot (-1)^r\,.$$

Für Ketten setzt man wieder

$$v(\Sigma b_q\, \gamma) = \Sigma (v b_q)\, \gamma\,.$$

Zum Beispiel ist

(7) $$v(\partial b_q) = \sum_{i=0}^{q} v(s_{(0)} \ldots s_{(i-1)} s_{(i+1)} \ldots s_{(q)}) \cdot (-1)^i\,.$$

---

[4]) Ich habe das Lemma so genannt, weil es in Sperners Beweis des Lebesgueschen Pflastersatzes (E. Sperner: Abh. Math. Sem. Hamburg 6, S. 265) eine Rolle spielt. Bei Alexandroff u. Hopf: Topologie I, erscheint das Lemma als Satz III auf S. 349. Man könnte es auch Modifikationssatz oder Spernersches Lemma (Alexandroff-Hopf, S. 316 und 376) nennen.

[5]) Siehe H. Seifert u. W. Threlfall: Lehrbuch der Topologie (1934), S. 105, sowie Spanier, l. c.[2]).

Es gilt die *Verbindungsregel*

$$\partial v(b_q) = b_q - \tau b_q - v(\partial b_q)\,. \tag{8}$$

Man verifiziert sie, indem man beide Seiten nach (6) und (7) ausrechnet. In (8) ist der erste Term rechts b_q ein Term der Unterteilung σK, der zweite τb_q ein Term auf K. Die übrigen Glieder von (8) enthalten gemischte Terme y_q. Wird nun auf τb_q und auf die y_q die Unterteilung σ angewandt, so erhält man wegen (7) § 2

$$\partial \sigma v b_q = b_q - \sigma\tau b_q - \sigma v \partial b_q\,. \tag{9}$$

Die unterteilte Verbindungskette $\sigma v b_q$ bezeichnen wir mit θb_q und erhalten schließlich

$$\partial \theta b_q = b_q - \sigma\tau b_q - \theta\partial b_q\,. \tag{10}$$

Durch Summation erhält man die *Verbindungsregel für Ketten* c:

$$\partial\theta c = c - \sigma\tau c - \theta\partial c\,. \tag{11}$$

Ist speziell c ein Zykel z_p, so fällt der letzte Term weg und man erhält eine Homologie auf σK, nämlich

$$z_p \sim \sigma\tau z_p\,, \tag{12}$$

in Worten: *Wird ein Zykel z_p von σK zuerst simplizial approximiert und dann unterteilt, so erhält man einen homologen Zykel.*

Daraus folgt, daß jede Homologieklasse von σK durch die Operation σ aus einer Homologieklasse von K hervorgeht, d. h. σ bildet $H_{*p}(K)$ nicht nur in, sondern sogar auf $H_p(\sigma K)$ ab.

Aus (4) folgt nunmehr leicht, daß diese Abbildung isomorph ist. Wir führen den Beweis mittels (5) gleich für die n-mal wiederholte Unterteilung σ^n. Ist $\sigma^n z_p \sim 0$, so hat man

$$\sigma^n z_p = \partial c_{p+1}\,,$$

$$\tau\sigma^n z_p = \tau\partial c_{p+1} = \partial\tau c_{p+1}\,,$$

$$(\tau\sigma^n z_p)_* = (\partial\tau c_{p+1})_*\,,$$

mithin nach (5)

$$(z_p)_* = (\partial\tau c_{p+1})_*\,,$$

also $(z_p)_* \sim 0$. Daher:

Satz 1. *Die alternierende Homologiegruppe H_{*p} des Komplexes K ist isomorph zur geordneten Homologiegruppe des n-mal baryzentrisch unterteilten Komplexes $\sigma^n K$. Der Isomorphismus wird durch σ^n, der inverse Isomorphismus durch τ vermittelt.*

§ 4. Kombinatorische Cohomologie.

Ist der für die Ketten zugrunde gelegte Koeffizientenbereich Γ eine beliebige abelsche Gruppe, so nehmen wir als Koeffizientenbereich für die Coketten die Charakterengruppe G von Γ. Um die Symmetrie zwischen den beiden zueinander dualen Gruppen G und Γ zum Ausdruck zu bringen, bezeichnen wir den Wert des Charakters g für das Gruppenelement γ einfach mit $g\,\gamma$. Dieses Produkt $g\,\gamma$ ist also eine reelle Zahl modulo 1. Ist aber

Γ ein Körper, so wollen wir unter G denselben Körper verstehen und unter $g\,\gamma$ das Produkt in diesem Körper.

Um nun zur Kettengruppe C_p die duale Gruppe C^p zu konstruieren, betrachten wir Funktionen $f^p(a_p)$ mit Werten in G. Für jede solche Funktion f^p und für jede Kette $c_p = \Sigma a_p\,\gamma$ wird das *skalare Produkt* durch

(1) $$(f^p, c_p) = \Sigma f^p(a_p)\,\gamma$$

definiert. Ist $(f^p, c_p) = 0$ für alle c_p, so folgt $f^p = 0$. Die Funktionen f^p heißen *Coketten*; sie bilden eine zu C_p duale Gruppe C^p. Ist der Komplex K unendlich, so sind unendlich viele Werte $f^p(a_p)$ beliebig wählbar, daher spricht man auch von *unendlichen Coketten*.

Das skalare Produkt (1) hat auch dann einen Sinn, wenn c_p eine ganzzahlige Kette ist. Insbesondere ist

$$(f^p, a_p) = f^p(a_p)\,.$$

Der *Corand* $\delta f^p = f^{p+1}$ einer Cokette f^p wird so definiert:

(2) $$(\delta f^p, a_{p+1}) = (f^p, \partial a_{p+1})$$

oder ausführlich geschrieben

(3) $$\delta f^p(e_0 \ldots e_{p+1}) = \sum_0^{p+1} (-1)^i f^p(e_0 \ldots e_{i-1} e_{i+1} \ldots e_{p+1})\,.$$

Aus (2) folgt für jede Kette c_{p+1}

(4) $$(\delta f^p, c_{p+1}) = (f^p, \partial c_{p+1})\,.$$

Ferner gilt

(5) $$\delta\delta f^p = 0\,.$$

Ist $\delta f^p = 0$, so heißt f^p ein *Cozykel*. Die Cozykel bilden eine Gruppe Z^p. Die Coränder δf^{p-1} bilden in Z^p eine Untergruppe B^p. Ist f^p ein Corand, so heißt f^p *cohomolog Null* und man schreibt $f^p \sim 0$. Die Faktorgruppe $H^p = Z^p/B^p$ ist die p-te *Cohomologiegruppe* des Komplexes K.

Von den 8 Gruppen

$$\begin{array}{cccc} \{0\} & B_p & Z_p & C_p \\ C^p & Z^p & B^p & \{0\} \end{array}$$

wird jede von der unter ihr stehenden annulliert; das folgt unmittelbar aus (4). Weiter gilt

Satz 2. *Wenn eine Cokette f^p von allen Rändern ∂c_{p+1} annulliert wird, so ist sie ein Cozykel.*

Beweis: Wenn in (4) die rechte Seite Null ist für alle c_{p+1}, so ist die linke Seite es auch; daraus folgt aber $\delta f^p = 0$.

Genau so beweist man

Satz 3. *Wenn eine Kette c_p von allen Corändern δf^{p-1} annulliert wird, so ist sie ein Zykel.*

Nach Satz 2 ist Z^p genau die von B_p annullierte Gruppe, und nach Satz 3 ist Z_p genau die von B^p annullierte Gruppe. Nach der Dualitätstheorie von

Pontrjagin[6]) folgt daraus, daß auch umgekehrt B_p die von Z^p annullierte und B^p die von Z_p annullierte Gruppe ist und daß $H^p = Z^p/B^p$ die Charakterengruppe von $H_p = Z_p/B_p$ ist.

Die Dualitätssätze von Pontrjagin machen die Zusammenhänge sehr übersichtlich und können dazu benutzt werden, Isomorphiesätze wie Satz 1 von den Homologiegruppen auf die Cohomologiegruppen zu übertragen. Wir wollen aber hier ohne diese tieferliegenden Sätze auskommen und führen daher die Isomorphiebeweise für die Cohomologiegruppen direkt.

Wir sind bisher bei der Bildung der Coketten von der *geordneten* Kettengruppe C_p ausgegangen. Bei der praktischen Berechnung der Cohomologiegruppen wird man natürlich von der *alternierenden* Kettengruppe C_{*p} ausgehen und zu ihr die duale Gruppe C^{*p} bilden. Da C_{*p} eine Faktorgruppe von C_p war, ist C^{*p} eine Untergruppe von C^p. Genauer ist C^{*p} die Gruppe der *alternierenden Coketten*, die durch folgende Eigenschaften charakterisiert sind:

(6) $$f^p(a_p) = 0 \qquad \text{für ausgeartete } a_p\,,$$

(7) $$f^p(\pi a_p) = (\operatorname{sign}\pi)\cdot f^p(a_p)\,.$$

Die alternierenden Cozykel bilden in Z^p eine Untergruppe Z^{*p}. Die Coränder von alternierenden Coketten f^{p-1} bilden in Z^{*p} eine Untergruppe B^{*p}. Die Faktorgruppe Z^{*p}/B^{*p} ist die *alternierende Cohomologiegruppe* H^{*p}.

Für die 8 Gruppen

$$\begin{matrix} \{0\} & B_{*p} & Z_{*p} & C_{*p} \\ C^{*p} & Z^{*p} & B^{*p} & \{0\} \end{matrix}$$

gilt genau dasselbe, was oben von den 8 ungesternten Gruppen gesagt wurde. Aus der von Eilenberg und Steenrod[3]) bewiesenen Isomorphie $H_p \cong H_{*p}$ folgt auf Grund der Dualitätssätze ohne weiteres die Isomorphie $H^p \cong H^{*p}$. Wir werden davon aber keinen Gebrauch machen.

§ 5. Die Invarianz der Cohomologiegruppe bei baryzentrischer Unterteilung.

Es sei wieder σK die baryzentrische Unterteilung des Komplexes K.

Jeder Kette c_p auf K war eine Unterteilung σc_p auf σK zugeordnet. Dual dazu definieren wir zu jeder Cokette g^p auf σK eine *Vergröberung* σg^p auf K durch

(1) $$(\sigma g^p, a_p) = (g^p, \sigma a_p)\,.$$

Die Vergröberung ist, wegen der Formeln (2) und (3) des § 2, automatisch eine alternierende Cokette.

Ebenso dualisieren wir die simpliziale Approximation, indem wir jeder auf K definierten Cokette f^p eine auf σK definierte Cokette τf^p durch

(2) $$(\tau f^p, b_p) = (f^p, \tau b_p)$$

zuordnen. Beide Zuordnungen sind mit der Corandbildung vertauschbar:

(3) $$\delta\sigma g^p = \sigma\delta g^p\,,$$

(4) $$\delta\tau f^p = \tau\delta f^p\,.$$

[6]) L. Pontrjagin: Ann. of Math. 35, p. 904 (1934).

Ferner gilt für alternierende Coketten f^p das *duale Pflasterlemma*

$$\sigma\tau f^p = f^p . \tag{5}$$

Zum Beweis bilde man

$$(\sigma\tau f^p, a_p) = (\tau f^p, \sigma a_p) = (f^p, \tau\sigma a_p) . \tag{6}$$

Nach dem Pflasterlemma (§ 2) ergibt $\tau\sigma a_p$ nach Weglassung ausgearteter Ketten die gleiche alternierende Kette wie a_p. Für alternierende f^p folgt daraus

$$(f^p, \tau\sigma a_p) = (f^p, a_p) . \tag{7}$$

Aus (6) und (7) erhält man

$$(\sigma\tau f^p, a_p) = (f^p, a_p)$$

und daraus (5).

Die Formel (5) gilt, wie das Pflasterlemma, für beliebige Unterteilungen, insbesondere für die n-mal wiederholte baryzentrische:

$$\sigma^n\tau f^p = f^p \qquad \text{für alternierende } f^p . \tag{8}$$

Dual zur unterteilten Verbindungskette θb_q definieren wir die *Coverbindungskette* $g^{p-1} = \theta g^p$ so:

$$(\theta g^p, b_{p-1}) = (g^p, \theta b_{p-1}) . \tag{9}$$

Formel (10) aus § 3 ergibt dann

$$(\theta\delta g^p, b_p) = (g^p, b_p) - (\tau\sigma g^p, b_p) - (\delta\theta g^p, b_p)$$

oder

$$\theta\delta g^p = g^p - \tau\sigma g^p - \delta\theta g^p \tag{10}$$

Ist speziell g^p ein Cozykel, so wird die linke Seite in (10) Null und man erhält

$$g^p \sim \tau\sigma g^p . \tag{11}$$

Die Vergröberung σ führt Cozykel in alternierende Cozykel und Coränder in Coränder von alternierenden Coketten, also Cohomologieklassen in alternierende Cohomologieklassen über. Aus (11) folgt nun, daß diese Zuordnung durch die Operation τ rückgängig gemacht werden kann. Somit bildet σ die Cohomologiegruppe von σK *isomorph* in die alternierende Cohomologiegruppe von K ab.

Geht man von der Cohomologiegruppe des n-mal unterteilten Komplexes $\sigma^n K$ aus und wendet n-mal hintereinander die Vergröberung σ an, so folgt, daß $H^p(\sigma^n K)$ durch σ^n isomorph in die alternierende Cohomologiegruppe $H^{*p}(K)$ abgebildet wird. Aus (8) folgt weiter, daß es sich um eine Abbildung *auf* $H^{*p}(K)$ handelt und daß τ die inverse Abbildung vermittelt. Damit haben wir den zu Satz 1 dualen

Satz 4. *Die alternierende Cohomologiegruppe H^{*p} des Komplexes K ist isomorph zur geordneten Cohomologiegruppe der Unterteilung $\sigma^n K$. Der Isomorphismus wird durch τ, der inverse Isomorphismus durch σ^n vermittelt.*

§ 6. Topologische Cohomologie.

Es sei T ein topologischer Raum und T^{p+1} das $(p+1)$-fache Produkt von T mit sich selbst, d. h. der Raum der geordneten Folgen $x^{p+1} = x_0 x_1 \ldots x_p$. Die *Diagonale* Δ von T^{p+1} besteht aus allen Folgen von gleichen Punkten $x^{p+1} = xx \ldots x$.

Es sei $\mathfrak{U}$ eine Überdeckung von T mit offenen Mengen U. Alle Folgen x^{p+1} derart, daß $x_0, \ldots, x_p$ in einer Menge U liegen, bilden eine Umgebung der Diagonale Δ. Jede Umgebung der Diagonale umfaßt eine Umgebung der eben beschriebenen Art; wir können uns daher auf diese speziellen Umgebungen von Δ beschränken.

Eine auf T^{p+1} definierte Funktion $\varphi^p(x^{p+1})$ heißt *lokal Null*, wenn sie in einer Umgebung der Diagonale Null ist. Zwei Funktionen heißen *lokal gleich*, wenn ihre Differenz lokal Null ist. Insbesondere heißen zwei Funktionen *gleich auf den Mengen* U oder kurz *gleich auf* $\mathfrak{U}$, wenn ihre Differenz Null ist für alle $x_0, \ldots, x_p$ in jeder Menge U.

Der *Corand* einer Funktion φ^p ist durch

$$(1) \qquad \delta\varphi^p(x^{p+2}) = \sum_0^{p+1} (-1)^i \varphi^p(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{p+1})$$

definiert. Offensichtlich ist $\delta\delta\varphi^p = 0$. Die Funktion φ^p heißt ein *Cozykel* (oder *geschlossen auf* $\mathfrak{U}$), wenn der Corand lokal Null (oder gleich Null auf $\mathfrak{U}$) ist. Die Cozykel bilden eine additive Gruppe $Z^p(T)$.

Die Funktionen, die lokal gleich Corändern sind, heißen *cohomolog Null*. Sie bilden eine Untergruppe $B^p(T)$ in $Z^p(T)$. Die Faktorgruppe

$$(2) \qquad H^p(T) = Z^p(T)/B^p(T)$$

heißt die *p-Cohomologiegruppe* des Raumes T. Sie ist, ihrer Definition nach, eine topologische Invariante des Raumes T.

§ 7. Feinheit von Überdeckungen und Triangulierungen.

Die Überdeckung $\mathfrak{U}$ eines Polyeders T heißt *fein in bezug auf die Triangulierung* K, wenn jede Menge U in einem offenen Simplexstern der baryzentrischen Unterteilung σK enthalten ist.

Es sei τ die in § 3 definierte Approximation, die jedem Punkt x von T eine Ecke $e = \tau x$ von K zuordnet. Dann gilt

Satz 5. *Ist* $\mathfrak{U}$ *fein in bezug auf* K *und sind* $x_0, \ldots, x_p$ *in einer Menge* U *enthalten, so sind* $\tau x_0, \ldots, \tau x_p$ *Ecken eines Simplex* X^q *von* K.

Beweis: Nach Voraussetzung ist U in einem offenen Simplexstern von σK enthalten. Das Zentrum s dieses Sternes ist Schwerpunkt eines bestimmten Simplex X^q. Alle τx_i sind nun Ecken von X^q.

Zusatz. Nimmt man für X^q ein Simplex kleinster Dimension so, daß der offene Stern seines Schwerpunktes s die Menge U umfaßt, so ist X^q eindeutig bestimmt, denn zwei verschiedene Sterne, die zu Mittelpunkten von Simplices gleicher Dimension gehören, sind zueinander fremd.

Durch die Angabe der Punkte $\tau x_0 \ldots \tau x_p$ und des Simplex X^q ist ein Term $a_p = \tau x^{p+1}$ bestimmt. Man kann also jeder Folge x^{p+1} in U den Term $a_p = \tau x^{p+1}$ als *simpliziale Approximation* zuordnen.

Eine Unterteilung $\sigma' K$ heißt *fein in bezug auf* $\mathfrak{U}$, wenn jedes Simplex von $\sigma' K$ in einer Menge U von $\mathfrak{U}$ enthalten ist. Wir wollen beweisen:

Satz 6. *Eine feine Unterteilung von K in bezug auf $\mathfrak{U}$ ist stets möglich*[7]).

Für endliche Komplexe K ist Satz 6 mit bekannten Methoden leicht zu beweisen. Unter den sukzessiven baryzentrischen Unterteilungen $\sigma^n K$ findet sich eine feine in bezug auf $\mathfrak{U}$, denn sonst gäbe es eine Folge von ineinandergeschachtelten Simplices $X_1, X_2, \ldots$ in $\sigma K, \sigma^2 K, \ldots$, von denen keines in einer Menge U enthalten wäre; aber der Grenzpunkt x der Folge ist in einer Menge U enthalten, was einen Widerspruch ergibt.

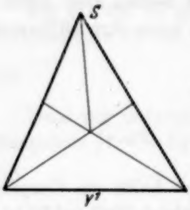

Fig. 1.
Unterteilung einer Pyramide.

Für unendliche K kann man mit den Ecken X^0 anfangen, die nicht unterteilt werden, dann die Kanten X^1 unterteilen usw. Hat man die X^{p-1} schon unterteilt und nimmt man ein Simplex X^p, so ist der Rand von X^p bereits unterteilt. Es handelt sich nun darum, das Simplex X^p fein zu unterteilen, ohne die Unterteilung des Randes zu verfeinern.

Man verbindet zunächst den Schwerpunkt s von X^p mit allen Simplices Y^{p-1} des unterteilten Randes durch Simplices X_1^p, die wir „Pyramiden" mit der „Spitze" s und „Basis" Y^{p-1} nennen. Diese Pyramiden werden beim nächsten Schritt baryzentrisch unterteilt, aber so, daß ihre Basis Y^{p-1} jeweils unzerlegt bleibt. Wie bei der gewöhnlichen baryzentrischen Unterteilung unterteilt man zunächst die Kanten von X_1^p, dann die zweidimensionalen Seiten durch Projektion von ihrem Schwerpunkt aus usw. bis X_1^p, wobei aber die Basisseiten immer unzerlegt bleiben. So erhält man eine Unterteilung von X^p in Teilsimplices X_2^p.

Jetzt wird das Verfahren wiederholt, und zwar immer so, daß diejenigen Seiten, die auf dem Rande von X^p liegen, unzerlegt bleiben.

Wir haben zu beweisen, daß bei genügend oftmaliger Wiederholung die Teilsimplices schließlich alle in Mengen U von $\mathfrak{U}$ enthalten sind.

Wäre das für ein X^p nicht der Fall, so könnte man eine Folge von ineinandergeschachtelten Teilsimplices $X_1^p, X_2^p, \ldots$ finden, von denen keines in einer Menge U enthalten ist. Wenn die Folge sich nach endlich vielen Schritten vom Rande von X^p löst, so sind alle weiteren Schritte gewöhnliche baryzentrische Unterteilungen, die Folge konvergiert gegen einen Grenzpunkt x und man erhält in der bekannten Weise einen Widerspruch. Löst die Folge sich nicht vom Rande, so enthalten die Simplices $X_1^p, X_2^p, \ldots$ Randseiten von anfangs vielleicht abnehmender, schließlich aber gleichbleibender Dimension q, etwa $X_n^q, X_{n+1}^q, \ldots$. Da diese Randseiten ungeteilt bleiben, müssen

[7]) Spanier bemerkt auf S. 422: Such a subdivision exists because K is locally finite. Die lokale Endlichkeit von K ist aber, wie wir sehen werden, unnötig.

sie alle gleich X_n^q sein. Die Simplices X_{n+k}^p haben alle die Seite X_n^q gemeinsam und konvergieren gegen X_n^q, da sie selbst und ihre nicht auf X_n^q gelegenen Seiten immer wieder baryzentrisch unterteilt werden. Nun liegt X_n^q in einer Menge U, da die festgehaltene Unterteilung des Randes von X^p bereits fein in bezug auf $\mathfrak{U}$ ist. Folglich liegen die X_{n+k}^p von einer gewissen Nummer $n+k$ an ebenfalls in U. So erhält man auch in diesem Fall einen Widerspruch.

§ 8. Isomorphie der kombinatorischen mit der topologischen Cohomologiegruppe.

Ein Polyeder T sei durch einen Komplex K trianguliert. Wir wollen zeigen, daß $H^{*p}(K)$ zu $H^p(T)$ isomorph ist.

Die offenen Simplexsterne S von σK bilden eine Überdeckung $\mathfrak{S}$ von K, die fein in bezug auf K ist. Liegen $x_0, \ldots, x_p$ alle in einem Stern S, so definiert die Folge $x^{p+1} = x_0 \ldots x_p$ nach § 7 eine bestimmte simpliziale Approximation $a^p = \tau x^{p+1}$ auf K. Also kann man zu jeder Cokette f^p des Komplexes K eine Funktion $\varphi^p = \tau f^p$ so definieren:

$$(1)\qquad \varphi^p(x^{p+1}) = f^p(\tau x^{p+1}), \quad \text{wenn } x^{p+1} \text{ in einem Stern } S, \\ = 0 \text{ sonst.}$$

Die Funktion $\varphi^p = \tau f^p$ ist auf dem Polyeder T „stückweise konstant": durchläuft ein x_i den offenen Simplexstern von σK, der zur Ecke $e_i = \tau x_i$ von K gehört, so ändert sich der Funktionswert $\varphi^p(x^{p+1})$ nicht. Beim Übergang von x_i auf einen benachbarten Simplexstern kann φ_p sich sprunghaft ändern.

Die Abbildung τ ist mit der Corandbildung vertauschbar:

$$(2)\qquad \delta\tau f^p = \tau\delta f^p \quad \text{auf den Sternen } S.$$

Ist f^p ein Cozykel, also $\delta f^p = 0$, so ist $\delta\tau f^p = 0$ auf $\mathfrak{S}$, also $\tau f^p = \varphi^p$ geschlossen auf $\mathfrak{S}$. Die Abbildung τ führt also Cozykel in Cozykel über.

Ist $f^p = \delta f^{p-1}$, so ist τf^p gleich $\delta\tau f^{p-1}$ auf $\mathfrak{S}$. Aus $f^p \sim 0$ folgt also $\tau f^p \sim 0$. Die Abbildung τ führt also Cohomologieklassen auf K in Cohomologieklassen auf T über.

Unser Ziel ist zu zeigen, daß τ einen Isomorphismus von $H^{*p}(K)$ auf $H^p(T)$ vermittelt. Dazu brauchen wir eine Unterteilungsoperation σ', die umgekehrt von $H^p(T)$ nach $H^{*p}(K)$ zurückführt.

Ein Cozykel φ^p sei gegeben; wir wollen dazu einen Cozykel f^p auf K konstruieren. Es sei $\delta\varphi^p = 0$ auf $\mathfrak{U}$. Wir können annehmen, daß $\mathfrak{U}$ fein in bezug auf K ist; sonst ersetzen wir die Mengen U durch ihre Durchschnitte mit den Sternen S. Nun bilden wir nach Satz 7 eine Unterteilung $\sigma' K$, die fein in bezug auf $\mathfrak{U}$ ist. Ist $b_p = x_0 x_1 \ldots x_p$ ein Term von $\sigma' K$, so liegen $x_0, \ldots, x_p$ alle in einer Menge U. Wir definieren nun eine Cokette $g^p = \varepsilon\varphi^p$ auf $\sigma' K$ durch

$$(3)\qquad g^p(b_p) = \varphi^p(x^{p+1}).$$

Wir nennen $g^p = \varepsilon\varphi^p$ die *Einschränkung von φ^p auf $\sigma' K$.*

Die Einschränkung ist offensichtlich mit der Corandbildung vertauschbar. Aus $\delta\varphi^p = 0$ auf $\mathfrak{U}$ folgt also $\delta g^p = 0$, d. h. g^p ist ein Cozykel.

Zu $g^p = \varepsilon\varphi^p$ kann man wie früher die Vergröberung $f^p = \sigma' g^p$ auf K definieren:

$$(\sigma' g^p, a_p) = (g^p, \sigma' a_p)\,. \tag{4}$$

Wendet man beide Operationen nacheinander an, so erhält man eine Operation $\sigma'\varepsilon$, die den Cozykel φ^p in den alternierenden Cozykel f^p überführt.

Ist f^p eine alternierende Cokette auf K und wendet man nacheinander τ und $\sigma'\varepsilon$ an, so erhält man wieder f^p:

$$\sigma'\varepsilon\tau f^p = f^p\,. \tag{5}$$

In der Tat ist $\varepsilon\tau f^p$, die auf $\sigma' K$ eingeschränkte Funktion τf^p, genau die Funktion, die in § 5 durch (2) definiert wurde und für die (8) § 5 gilt. Das ergibt (5).

Aus (5) folgt

Satz 7. *τ bildet $H^{*p}(K)$ isomorph in $H^p(T)$ ab.*

Es sei nämlich f^p ein reduzierter Cozykel auf K und $\tau f^p \sim 0$, d. h.

$$\tau f^p = \delta\varphi^{p-1} \tag{6}$$

auf einer Überdeckung $\mathfrak{U}$. Übt man auf beide Seiten von (6) die Operation $\sigma'\varepsilon$ aus, die natürlich mit δ vertauschbar ist, so ergibt sich wegen (5)

$$f^p = \delta\sigma'\varepsilon\varphi^{p-1}\,,$$

also $f^p \sim 0$, womit Satz 7 bewiesen ist.

Um zu beweisen, daß τ eine Abbildung *auf* $H^p(T)$ vermittelt, benutzen wir eine Abbildung τ' des Raumes T auf die Ecken des unterteilten Komplexes $\sigma' K$. Die Abbildung τ' wird mit Hilfe von $\sigma' K$ genauso definiert wie τ mit Hilfe von K: sie bildet jeden Punkt x auf eine Ecke $e' = \tau' x$ von $\sigma' K$ ab, deren abgeschlossener baryzentrischer Stern den Punkt x enthält. Eine Cokette g^{p-1} auf $\sigma' K$ ergibt dabei eine Funktion $\varphi^{p-1} = \tau' g^{p-1}$, und der Rand $\delta\tau' g^{p-1}$ ist lokal gleich $\tau'\delta g^{p-1}$.

Das Ineinanderspiel der Abbildungen τ, τ', σ' und ε wird durch das folgende Schema veranschaulicht.

$$\begin{tikzcd}
f^p\,(\text{auf } K) \arrow[dr, "\tau"] & \\
g^p\,(\text{auf } \sigma' K) \arrow[u, "\sigma'"] \arrow[r, shift right, "\tau'"'] & \varphi^p\,(\text{auf } T) \arrow[l, shift right, "\varepsilon"']
\end{tikzcd}$$

Satz 8. *Ist φ^p geschlossen auf $\mathfrak{U}$ und ist $\sigma' K$ fein in bezug auf $\mathfrak{U}$, so ist*

$$\tau'\varepsilon\varphi^p \sim \varphi^p\,. \tag{7}$$

Zum Beweis dient die von SPANIER angegebene Deformationscokette $\varphi^{p-1} = D\varphi^p$. Sie wird so definiert:

$$D\varphi^p(x_0, \ldots, x_{p-1}) = \sum_0^{p-1} (-1)^i\, \varphi^p(\tau' x_0, \ldots, \tau' x_i, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{p-1})\,. \tag{8}$$

Bildet man den Corand von $D\varphi^p$, so erhält man

$$\delta D\varphi^p = \varphi^p - \tau'\varepsilon\varphi^p - D\delta\varphi^p\,, \tag{9}$$

wobei $D\delta\varphi^p$ in gleicher Weise gebildet ist wie $D\varphi^p$:

(10) $$D\delta\varphi^p(x^{p+1}) = \sum_0^p (-1)^i\, \delta\varphi^p(\tau' x_0, \ldots, \tau' x_i, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_p)\,.$$

Zu jedem Punkt x gibt es eine Umgebung V derart, daß, wenn $x_0, \ldots, x_p$ in V liegen, alle Punkte $x_0, \ldots, x_p$ und $\tau' x_0, \ldots, \tau' x_p$ zusammen in einer Menge U liegen. Jeder Punkt x ist nämlich innerer Punkt eines Simplex X^q von $\sigma' K$. Dieses Simplex X^q ist in einer Menge U enthalten. Es sei s der Schwerpunkt von X^q und S der Stern von s in der baryzentrischen Unterteilung von $\sigma' K$. Dann ist der Durchschnitt von U mit S eine Umgebung V der verlangten Art. Liegen nämlich $x_0, \ldots, x_p$ in V, so liegen sie auch in U, und $\tau' x_0, \ldots, \tau' x_p$ sind Ecken von X^q, also ebenfalls in U enthalten.

Nun ist $\delta\varphi^p = 0$ auf jeder Menge U, also ist die rechte Seite von (10) Null für $x_0, \ldots, x_p$ in V, mithin ist $D\delta\varphi^p$ lokal Null. Aus (9) folgt nun die Behauptung (7).

Jetzt kommt der letzte Schritt.

Satz 9. *τ bildet $H^{*p}(K)$ auf $H^p(T)$ ab.*

Beweis. Es sei φ^p ein Cozykel des Raumes T, also $\delta\varphi^p = 0$ auf den Mengen U einer Überdeckung $\mathfrak{U}$. Wir können wieder annehmen, daß $\mathfrak{U}$ fein in bezug auf K und $\sigma' K$ fein in bezug auf $\mathfrak{U}$ ist. Wir setzen $\varepsilon\varphi^p = g^p$. Dann ist nach (11) § 5

(11) $$\varepsilon\varphi^p = g^p \sim \varepsilon\tau\sigma' g^p\,,$$

denn $\varepsilon\tau$, die Einschränkung von τ auf $\sigma' K$, ist dieselbe Abbildung, die damals τ hieß. Aus (11) folgt

(12) $$\varepsilon(\varphi^p - \tau\sigma' g^p) \sim 0\,.$$

Wenn wir zeigen können, daß aus (12) folgt

$$\varphi^p - \tau\sigma' g^p \sim 0\,,$$

so folgt $\varphi^p \sim \tau\sigma' g^p$ und wir sind fertig. Wir haben also zu zeigen, daß aus $\varepsilon\psi^p \sim 0$ folgt $\psi^p \sim 0$. Dazu dient Satz 8. Die Voraussetzung $\varepsilon\psi^p \sim 0$ bedeutet $\varepsilon\psi^p = \delta g^{p-1}$. Daraus folgt

(13) $$\tau' \varepsilon\psi^p = \tau' \delta g^{p-1}\,.$$

Die linke Seite von (13) ist nach Satz 8 cohomolog zu ψ^p. Die rechte Seite ist lokal gleich $\delta\tau' g^{p-1}$, also ~ 0. Somit erhält man $\psi^p \sim 0$, womit Satz 9 bewiesen ist.

Durch Satz 7 und Satz 9 ist die Isomorphie

$$H^{*p}(K) \cong H^p(T)$$

vollständig bewiesen. Die Abbildung von $H^{*p}(K)$ auf $H^p(T)$ wird durch τ, die inverse Abbildung nach (5) durch $\sigma'\varepsilon$ vermittelt.

(Eingegangen am 18. Juni 1955.)

BÜCHI, J. R., and J. B. WRIGHT
Math. Annalen, Bd. 130, S. 102—108 (1955).

The Theory of Proportionality as an Abstraction of Group Theory.

By

J. RICHARD BÜCHI and JESSE B. WRIGHT in Ann Arbor, Michigan.

In this paper we present an axiomatic theory denoted by T which is an abstraction of group theory in the sense that projective geometry is an abstraction of affine geometry. Extending to group theory, F. KLEIN's idea, that a geometry is determined by its group of automorphisms, we describe T as the theory whose group of automorphisms is generated by the automorphisms and translations of group theory. In axiomatic terms the relationship between the two theories is characterized by the fact that from T we can arrive at group theory by distinguishing an element, i. e., by introducing a name for the group identity. This situation is analogous to that in geometry, where affine geometry is derived from projective geometry by the introduction of a name for the lines at infinity.

The theory T is of interest because it turns out to be an axiomatization of the notion of proportionality. Furthermore, this paper represents a step in our current investigation of a more or less familiar metamathematical concept which we will call abstraction. The relation between T and group theory is studied here because it affords a useful example of the process of abstraction. In section 4 we put forward a series of notes suggested by this and other instances of abstraction.

1. A Characterizing Invariant of the Holomorph of a Group.

Because group multiplication is not invariant under translations, it clearly does not belong to the theory T. It is our first task to find, in group theory, a notion which is invariant under group automorphisms and group translations and which is invariant only under transformations which are composed of group automorphisms and group translations.

Let A be a set and let $x, y, z, \ldots$ be variables ranging over A. Let $x \cdot y$, $\dot{x}$ and e denote the product, inverse and identity of a group $\bar{A} = [A, \cdot, \dot{}, e]$ on A.

Definition 1: The group H of transformations of A generated by the automorphisms and translations of a group $\bar{A}$ is called the holomorph of $\bar{A}$. The elements of H are called holomorphisms.

Definition 2: The quaternary relation π on A, defined by:

$$\pi(x, y, u, v) \quad \equiv \quad x \cdot \dot{y} = u \cdot \dot{v},$$

is called the proportionality relation of the group $\bar{A}$.

Theorem 1: *The proportionality relation π of a group $\bar{A}$ is an invariant of the holomorph H of $\bar{A}$, and every transformation of A which has the invariant π is a holomorphism of $\bar{A}$.*

Proof: It is easily seen that π is invariant under automorphisms as well as translations. This proves the first part of Theorem 1.

Next suppose F is a transformation of A, which has the invariant π. Now, if $x \cdot y = z$, then $\pi(x, e, z, y)$ and because π is an invariant of F, $\pi(Fx, Fe, Fz, Fy)$. If $Fe = e$ it follows, $Fx \cdot Fy = Fz$. Thus F is an automorphism of $\bar{A}$. If $Fe = a$ we define S by, $Sx = \dot{a} \cdot Fx$. Then S obviously has the invariant π and $Se = e$. It therefore is an automorphism of $\bar{A}$. But $Fx = a \cdot Sx$.

We conclude, every transformation F of A, which has π as an invariant is a holomorphism. Q.E.D.

By further analysis of this proof we get:

Theorem 2: *Every holomorphism of a group $\bar{A}$ is of the form LS, where L is a left translation of $\bar{A}$ and S is an automorphism of $\bar{A}$. Every holomorphism of $\bar{A}$ which leaves e fixed is an automorphism of $\bar{A}$. The proportionality relation π of a group $\bar{A}$ together with its identity e are characterizing invariants for the group of automorphisms of $\bar{A}$.*

Geometric intuition about the relation π can be gained by considering a parallelogram in the affine plain with an origin 0. The vectors drawn from the origin to the four vertices of the parallelogram are in relation π. This example will also provide an intuitive background to the next section.

2. Characterizing Properties of the Proportionality Relation.

In this section we will find necessary and sufficient conditions for a quaternary relation ϱ on a set A to be the proportionality relation of some group $\bar{A}$ on A. Because of our intuition about the notion of proportionality it becomes evident that the proportionality relation of a group on A has the following properties:

(1) $$\varrho(x, y, x, y)$$

(2) $$\varrho(x, y, u, v) \rightarrow \varrho(u, v, x, y)$$

(3) $$\varrho(x, y, u, v) \wedge \varrho(u, v, p, q) \rightarrow \varrho(x, y, p, q)$$

(4) $$\varrho(x, x, y, y)$$

(5) $$\varrho(x, y, u, v) \rightarrow \varrho(y, x, v, u)$$

(6) $$\varrho(x, y, u, v) \wedge \varrho(y, z, v, w) \rightarrow \varrho(x, z, u, w)$$

(7) $$\varrho(x, x, y, x) \rightarrow x = y$$

(8) $$(\mathrm{E}u)\ \varrho(x, y, u, v)$$

The relation between (x, y) and (u, v) which holds in case $\varrho(x, y, u, v)$, is by (1), (2) and (3) an equivalence relation on $A \times A$. Similarly a second equivalence relation arises in connection with (4), (5) and (6). Also, note that the duality between $x \cdot y$ and $y \cdot x$ is reflected in a duality of ϱ.

Definition 3: A relation ϱ on the set A which satisfies the conditions (1) to (6) is called a bi-equivalence on A. If ϱ also satisfies (7) and (8), it is called a regular bi-equivalence.

Lemma: If ϱ is a regular bi-equivalence on the set A and if x, e and y are any elements of A, then there exists exactly one element z of A, such that $\varrho(x, e, z, y)$.

Proof: That such a z exists follows from (8). Suppose now, $\varrho(x, e, z, y)$ and $\varrho(x, e, z' y)$. Then by (2), $\varrho(z, y, x, e)$ and by (3), $\varrho(z, y, z', y)$. By (1), $\varrho(y, z, y, z)$. Thus by (6) it follows, $\varrho(z, z, z', z)$, and by (7), $z = z'$. Q.E.D.

Theorem 3: *A quaternary-relation ϱ on a set A is the proportionality relation of some group $\bar{A}$ on A, if and only if ϱ is a regular bi-equivalence.*

Proof: The "only if" can be shown by obvious computations in a group $\bar{A}$. We now assume that ϱ is a regular bi-equivalence on A, and we choose an element e in A. By the lemma, to any pair x, y of elements of A, there exists exactly one z in A, such that $\varrho(x, e, z, y)$. We define this z to be $x \cdot y$. Also by the lemma, to any element x in A there exists exactly one element y in A, such that $\varrho(x, e, e, y)$. We define this y to be $\dot{x}$. Now let $\bar{A}$ be the algebraic structure $[A, \cdot, \dot{}, e]$. To end the proof of Theorem 3 we have to show first, $\bar{A}$ is a group, and second, ϱ is the proportionality relation of $\bar{A}$.

By (5) and (6), $\varrho(v, e, r, w)$ and $\varrho(p, e, q, w)$ implies $\varrho(p, v, q, r)$, and by (3), $\varrho(u, e, p, v)$ and $\varrho(p, v, q, r)$ implies $\varrho(u, e, q, r)$. Thus, $\varrho(u, e, p, v)$ and $\varrho(p, e, q, w)$ and $\varrho(v, e, r, w)$ implies $\varrho(u, e, q, r)$. Translated according to our definition this means, $p = u \cdot v$ and $q = p \cdot w$ and $r = v \cdot w$ implies $q = u \cdot r$, or, $(u \cdot r) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$. Thus, the operation $x \cdot y$ is associative. The remaining group-axioms are easily established for $\bar{A}$.

Now suppose $\varrho(x, y, u, v)$. Then by (3), $\varrho(z, e, x, y)$ implies $\varrho(z, e, u, v)$. By our definition this means, $z \cdot y = x$ implies $z \cdot v = u$, or, because $\bar{A}$ is a group, $z = x \cdot \dot{y} = u \cdot \dot{v}$. Next, suppose $x \cdot \dot{y} = u \cdot \dot{v}$. Because $\bar{A}$ is a group it follows that there is a z, such that $x = z \cdot y$ and $u = z \cdot v$. By our definition this means, $\varrho(z, e, x, y)$ and $\varrho(z, e, u, v)$. By (2) and (3) we conclude, $\varrho(x, y, u, v)$. Thus, $\varrho(x, y, u, v)$ is equivalent with $x \cdot \dot{y} = u \cdot \dot{v}$. Q.E.D.

The significance of theorem 3 becomes more evident if we summarize it as follows: *The conditions* (1) *to* (8) *provide an axiomatic characterization of the notion of proportionality.*

3. The Relationship Between Group Theory and the Theory of Regular Bi-equivalences.

Here it is our aim to re-interpret the results of sections one and two. We will discuss the relationship between group theory and the theory of regular bi-equivalences. This relationship can be perceived more clearly only when each of the subject matters is presented as an applied first order functional calculus. However, we hope that the informal presentation which follows suffices to convey the fundamental ideas.

For later convenience, let us introduce the notation "$(\mu z) \ldots$" to stand for "the z for which $\ldots$". Furthermore, let (a) and (b) be the following formulas:

(a) $$\varrho(x, y, u, v) \equiv x \cdot \dot{y} = u \cdot \dot{v}$$

(b) $$x \cdot y = (\mu z)\, \varrho(x, e, z, y)$$
$$\dot{x} = (\mu z)\, \varrho(x, e, e, z).$$

Now it is easy to verify:

I. If T_1 is an applied first order functional calculus with the primitives $A, \cdot, ', e$ and a conventional set of axioms for group theory, and if ϱ is defined by (a), then ϱ satisfies the axioms for a regular bi-equivalence, and moreover the statements (b) become theorems of T_1.

Conversely, by an analysis of the proof to Theorem 3 one verifies:

II. Let T_2 be an applied first order functional calculus with the primitives A, ϱ, e, which has as axioms the statements which make ϱ a regular bi-equivalence on A together with the statement that e belongs to A. If $\cdot$ and $'$ are defined by (b), then $A, \cdot, ', e$ satisfy the group axioms, and moreover, (a) becomes a theorem of T_2.

Although it is difficult to define equivalence of logical systems in general, it will be recognized that I and II are sufficient for T_1 and T_2 to be called equivalent. Thus, in the light of I and II, T_2 can be regarded as an unconventional formulation of group theory.

From the point of view of models the equivalence of T_1 and T_2 expresses itself in the fact that every model of one theory is a model of the other theory. Finally, the equivalence of T_1 and T_2 is reflected in the fact that a transformation of A is an automorphism of T_1 if and only if it is an automorphism of T_2. This is part of theorem 2.

Now let T be the applied first order functional calculus with the primitives A and ϱ, which has as axioms the statements making ϱ into a regular bi-equivalence on A. I and II show that T_1 and T_2 have the same expressive power. However, the expressive power of T is weaker than that of T_2, because there is no primitive constant of the type of individuals in T nor can such a constant be defined in T. (If such a constant e could be defined in T it would be an invariant of every automorphism of T, but this contradicts theorem 1.) Therefore, from the equivalence of T_1 and T_2 it follows that T is weaker than T_1, and in particular no constants $\cdot$ and $'$ can be defined in T. From Theorem 1 it follows that T is weaker than T_1, also from the standpoint of groups of transformations.

The series of steps which leads from group theory T_1 to the theory T of regular bi-equivalences is a typical example of what we call the process of abstraction. To better understand this process we considered a new formulation T_2 of group theory. T might be called a direct abstraction of T_2.

4. Some Notes on the Process of Abstraction.

In the preceding sections we introduced the theory of regular bi-equivalences as an abstraction of group theory. There is a need for a systematic metamathematical theory which will explain the characteristics of this example as well as the characteristics of other examples of abstraction. The purpose of this section is to present in the form of informal notes some of the problems, conjectures and examples concerned with the notion of abstraction. A precise definition of abstraction can be given only as part of a metamathematical theory of the relationships between mathematical subject matters.

Note 1: The hierarchy of geometries affords the classical examples of abstraction. In the introduction we have already pointed out the close analogy between the relationship of affine to projective geometry and that of group theory to regular bi-equivalences. But the field of geometry still has room for new theories. One of us has formulated the abstraction of projective geometry whose automorphisms are the colineations and correlations [4].

Note 2: In the light of section 3 we may say that the theory of regular bi-equivalences differs from group theory only in its vocabulary, i. e., in its expressive power. From the formal point of view the weakening of the expressive power is characteristic for the relationship between subject matters which interests us. Our use of the term abstraction should be considered in this light.

Note 3: Abstraction can also be studied with reference to automorphisms. One of the characteristics of the process of abstraction is that the automorphism group is enlarged. Our investigations started with a consideration of the holomorph H, a super group of the automorphism group G of group theory. The fact that an invariant of H automatically is an invariant of G together with the fact that H is definable in group theory suggests that there is a characterizing invariant of H definable in group theory. This consideration leads to the discovery of the proportionality relation ϱ in section one. The fruitfulness of the automorphism approach to the theory of regular bi-equivalences suggests its use in defining and investigating other problems of abstraction.

Note 4: Although it is not true that the models of the theory of regular bi-equivalences and the models of group theory are exactly the same, nevertheless, every model of the abstracted theory can be extended to a model of the stronger theory by a slight variation, and every model of the stronger theory is an extention of a model of the abstracted theory. This suggests a third way of defining the concept of abstraction.

Note 5: The equivalence of theories T_1 and T_2 was discussed in section 3. An adequate metamathematics must provide a rigorous definition of the concept of equivalence. It should be noted that the equivalence and non-equivalence of two theories is not determined until their logical frameworks are specified. For example, let us consider the situation which arises in section 3 if in the logical frame the description operator μ is replaced by a full power selection operator. Now we can define a constant of the type of individuals in T. As a matter of fact, many such constants can be defined in T and T_1 and the two theories become equivalent and of much stronger expressive power. There are many examples which demonstrate that this situation is not brought about by any peculiar properties of the operators in question.

Note 6: we used heuristically the principle that whatever is an invariant of the automorphism group of a formal theory must be definable in that theory. In section 3 we used the converse of this principle. These metamathematical propositions should be rigorously formulated and their valididy investigated.

Note 7: Besides the theory of regular bi-equivalences other abstractions of group theory arise if other extentions G' of the group G of group automorphisms are considered. We hope to present in another paper the theory whose group G' consists of the automorphisms and anti-automorphisms of group theory.

Note 8: Let ϱ be a regular bi-equivalence on the set A and let e be an element of A. Then by Theorem 3 we have a group $\bar{A}$ on A which has ϱ as its proportionality relation and e as its identity. An element e' different from e will give rise to a different group A' with the same parallelogram relation. However, $\bar{A}$ and A' clearly are isomorphic. Because this situation also appears in the case of affine and projective geometry and many other instances of abstraction the question arises whether or not it should be taken as characteristic for the notion of abstraction.

Note 9: It is possible to subject a regular bi-equivalence to further symmetry conditions. If ϱ is a regular bi-equivalence on A we define, *ϱ to be Abelian* if $\varrho(x, y, u, v) \to \varrho(x, u, y, v)$, and, *$\varrho$ is Boolean* if $\varrho(x, y, u, v) \to$ $\to \varrho(x, v, u, y)$. The theory of Abelian regular bi-equivalences is an abstraction of the theory of commutative groups and the theory of Boolean regular bi-equivalences is an abstraction of the theory Boolean groups (groups in which $x = \dot{x}$ identically). It might be noted that in the Boolean case ϱ is completely symmetric and therefore Abelian.

Note 10: Like the proportionality relation, also the ternary operation $f(x, y, z) = x \cdot \dot{y} \cdot z$ is a characterizing invariant for the holomorph. The operator f has been studied by J. Certaine [2], who however is not careful in making the separation between group theory and the abstracted theory. R. Baer [1] also made use of the operator f, the paper in question contains many interesting ideas concerning a theory of general invariants.

Note 11: We are interested in regular bi-equivalences primarily because of their relationship to groups and in particular to proportionality. Nevertheless, the intrinsic theory of bi-equivalences shows many interesting features of which we mention but one.

All significant ideas connected with subgroups and in particular normal subgroups can without difficulty be reformulated in the theory of regular bi-equivalences. Moreover these ideas take an especially attractive form in the abstracted theory. For example, let $\underline{P}$ be the partition of A generated by a normal subgroup N. From the group point of view $\underline{P}$ has a preferred element N. However, the proportionality relation π of the group is a regular bi-equivalence on every co-set of N, furthermore, all these co-sets are π-isomorphic to N. Thus, in the theory of regular bi-equivalences every such partition $\underline{P}$ is homogeneous.

Note 12: There are models of regular bi-equivalences which are not groups. For example, the set A of correlations of projective geometry is not a group under composition, however, the proportionality relations of composition is a regular bi-equivalence on A. A similar remark holds for any co-set A of a subgroup of a group.

Affine geometry affords another example. The relation $\pi(x, y, u, v)$, defined by $xy \parallel uv \wedge xu \parallel yv$, is an Abelian regular bi-equivalence on the set of all points. Since it is an important feature of affine geometry that no point is preferred, it follows from the discussion in section 3 that in affine geometry it is impossible to define a group of which π is the proportionality relation. However, if an origin is added an affine geometry becomes a vector space and π becomes the proportionality relation of the vector addition.

Note 13: Let ϱ be a regular bi-equivalence on A. As in proportionality theory we then define ratios as follows: $(xy) \equiv (uv)$ defined by $\varrho(x, y, u, v)$ is an equivalence relation on $A \times A$. Let $\underline{L}$ be the corresponding partitioning into equivalence classes $\overline{xy}$. Now $\underline{L}$ is a group under the operation $\overline{xy} \cdot \overline{yz} = \overline{xz}$, the inverse of $\overline{xy}$ is $\overline{yx}$ and the identity is $\overline{xx}$. The class $\overline{xy}$ might be called the left ratio of x and y.

Also, the concept of a group translation can be defined already in the abstracted theory. A transformation T of A is called a left translation if $\varrho(x, Tx, y, Ty)$ holds for all x and y in A. Note that if a translation is regarded as a set of pairs, the group $\underline{L}$ defined before turns out to be the group of left translations. Clearly, the group $\underline{L}$ is isomorphic to the group $[A, \varrho, e]$ which arises from ϱ if an element e of A is distinguished.

Although a group structure isomorphic to $[A, \varrho, e]$ has been defined within the theory of regular bi-equivalences, it must be realized that this does not imply the equivalence of the theory of regular bi-equivalences with group theory. On the basis of our construction of $\underline{L}$ one might attempt to set up a translation of the theory T_1 in section 3 into the theory T. However, in trying to formulate the analogs to I and II in section 3, one will run into difficulties with logical types.

Bibliography.

[1] R. Baer: Zur Einführung des Scharbegriffes. Crelles J. **160**, 199—207 (1929). — [2] J. Certaine: The ternary operation $(abc) = ab^{-1}c$ of a group. Bull. Amer. Math. Soc. **49**, 869—877 (1943). — [3] A. A. Grau: Ternary Boolean algebra. Bull. Amer. Math. Soc. **53**, 567—572 (1947). — [4] J. B. Wright: Quasi projective geometry. Mich. Math. J. **2**, 115—122 (1953/4).

(Eingegangen am 3. Oktober 1954.)

Krumhaar, H.
Math. Annalen, Bd. 130, S. 109—136 (1955).

Zur Theorie der gewöhnlichen selbstadjungierten Differentialoperatoren gerader Ordnung*.

Von

Hans Krumhaar in Göttingen.

Einleitung.

Die Theorie der selbstadjungierten Differentialoperatoren $Du = \frac{1}{k} L(u)$ der Ordnung $2m$, die sich von der Differentialgleichung

$$L(u) = \sum_{\nu=0}^{m} (p_\nu(x)\, u^{(m-\nu)}(x))^{(m-\nu)} = \lambda\, k(x)\, u(x), \qquad a < x < b$$

herleiten, wurde von I. M. Glasman in [4] und unabhängig davon von K. Kodaira in [10] entwickelt. E. A. Coddington hingegen untersuchte in [1] Differentialoperatoren gerader und ungerader Ordnung.

Es ist nun das Anliegen der vorliegenden Arbeit, einige der Ergebnisse, die F. Rellich in [13] und u. a. auch in [14] über die Stelle der Bestimmtheit und in [15] über die Halbbeschränktheit bei Differentialoperatoren der Ordnung 2 dargelegt hat, für Differentialoperatoren jeder geraden Ordnung zu verallgemeinern. Wir schließen uns dabei eng an die Kodairaschen Ausführungen an.

In § 1 wird kurz über die ersten fünf Paragraphen der Kodairaschen Arbeit referiert, soweit das für das Folgende erforderlich ist. Der § 2 geht noch einmal auf die (getrennten) Randbedingungen ein. Während E. A. Coddington auf Grund der v. Neumannschen Theorie, also auf dem Wege über die absolut-quadratisch integrierbaren Lösungen von $L(u) \pm i k u = 0$, die Menge aller Räume, in denen der Operator D selbstadjungiert ist, untersucht und durch gekoppelte Randbedingungen charakterisiert, betrachtet K. Kodaira nur solche Räume, die durch je ein System von reellen, selbstadjungierten Randbedingungen bei $x = a$ und bei $x = b$ beschrieben werden können. Die Randbedingungen werden von K. Kodaira mit reellen Funktionen formuliert, deren Existenz gesichert ist, ohne daß jedoch eine konkrete Methode, solche Funktionen zu finden, angegeben wird. Nun muß man sich bei näherer Diskussion des Operators D sowieso über das Verhalten der Lösungen von $L(u) - \lambda k u = 0$, $Im(\lambda) \neq 0$ an den Intervallenden orientieren. Auf den von diesen $2m$ Lösungen aufgespannten Funktionenraum können wir uns nun bei der Suche nach derartigen Funktionen beschränken, denn es läßt sich zeigen:

---

* Diese Arbeit wurde von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Göttingen als Dissertation angenommen.

Über Teile dieser Arbeit habe ich am 24. 6. 1953 und am 8. 7. 1953 im Mathematischen Institut der Universität Göttingen vorgetragen.

Zu jedem System Kodairascher Randbedingungen kann man ein äquivalentes System angeben, das mit Lösungen von $L(u) - \lambda k u = 0$ gebildet ist. Unter gewissen Voraussetzungen, die stets erfüllt sind, falls das betrachtete Intervallende eine „Stelle der Bestimmtheit" ist, kann die Voraussetzung $Im(\lambda) \neq 0$ fortfallen. Anschließend werden die von F. Rellich geprägten Begriffe „Anfangszahlen" und „genormtes Fundamentalsystem" sinngemäß erweitert und dabei letzterer durch das „genormte Lösungssystem" ersetzt. Ein bei $x = a$ genormtes Lösungssystem ist, ganz grob gesagt, eine Basis modulo einem für die Randbedingungen bei $x = a$ uninteressanten Teilraum. Die Anfangszahlen einer Funktion $u(x)$ in bezug auf dieses System sind dann gerade die Koordinaten von $u(x)$ in bezug auf diese Basis, sie sind von λ unabhängig. Die Randbedingungen lassen sich dann durch lineare Gleichungen für die Anfangszahlen ersetzen. Unter gewissen Voraussetzungen sind die Eigenwerte die Nullstellen einer aus Lösungen zusammengesetzten Determinante. Mit Hilfe der Anfangszahlen sind wir dann auch in der Lage, einen Überblick über sämtliche Systeme reeller, selbstadjungierter Randbedingungen bei $x = a$ und bei $x = b$ zu geben.

In § 3 wird der Definitionsbereich des selbstadjungierten Operators D eingeengt durch die zusätzliche Forderung, daß die Funktionen in individuellen Umgebungen der Intervallenden identisch verschwinden. Dadurch werden die Schwierigkeiten, die durch das Singulärwerden der Koeffizienten an den Intervallenden entstehen, umgangen. Es ergibt sich, daß der so eingeengte Operator genau dann noch „wesentlich selbstadjungiert" ist, falls $L(u) - iku = 0$ keine absolut-quadratisch integrierbaren Lösungen besitzt.

Der § 4 befaßt sich mit einigen Fragen der Halbbeschränktheit. Zunächst wird gezeigt, daß im regulären Fall auch für $2m > 2$ die Seite, nach der der Operator halbbeschränkt ist, allein vom Vorzeichen von $p_0(x)$ abhängt. Danach werden einige Sätze von F. Rellich verallgemeinert, die aus der Halbbeschränktheit nach unten an beiden Intervallenden auf die Halbbeschränktheit des Operators selbst zu schließen gestatten. Dabei wird vor allem ein Satz über Operatoren mit endlichen Defektindizes herangezogen, wie er von E. Heinz in [8] aufgestellt ist. Zum Schluß dieses Paragraphen wird ein Zusammenhang zwischen m-fachen Nullstellen von Lösungen der Differentialgleichung für reelles λ in der Nähe von $x = a$ und Nichthalbbeschränktheit an diesem Ende aufgezeigt. Diese Aussagen sind für $2m = 2$ äquivalent mit einem Satz aus [15] über oszillatorische Lösungen und Nichthalbbeschränktheit (siehe auch Ph. Hartman u. A. Wintner [6]). In § 6 wird dieser Satz auf Operatoren der Ordnung 4 angewandt.

In den Paragraphen 5 und 6 wenden wir uns den besonderen Verhältnissen an einer Stelle der Bestimmtheit $x = a$ zu: Nach Aufzählung einiger Grundbegriffe der in [3] dargestellten Frobeniusschen Theorie wird kurz untersucht, unter welchen Voraussetzungen für $k(x)$ die von G. Frobenius angegebenen Lösungen ganze Funktionen in λ sind. In § 6 wird gezeigt, daß die charakteristischen Exponenten in der komplexen Zahlenebene symmetrisch liegen zu einem reellen Punkt. Bis auf einen Ausnahmefall liegen die Exponenten auch

symmetrisch in bezug auf die durch diesen Punkt gehende Parallele zur imaginären Achse, die wir im folgenden daher stets kurz „Symmetriegerade" nennen werden. Auf Grund dieser Symmetrieeigenschaften werden die den Weylschen Sätzen über Grenzpunktfall und Grenzkreisfall (siehe [18]) entsprechenden Sätze für eine Stelle der Bestimmtheit unabhängig von der Glasman-Kodairaschen Theorie neu bewiesen. Dabei gewinnen wir auch für *reelles* λ Aussagen über die Anzahl der nach links absolut-quadratisch integrierbaren Lösungen. Es ergibt sich weiter: Müssen bei $x = a$ Randbedingungen gestellt werden, so ist das charakteristische Polynom und damit auch die charakteristischen Exponenten von λ unabhängig, die Frobeniusschen Lösungen sind ganze Funktionen in λ. Wir können dann genau angeben, welche Frobeniusschen Lösungen für die Formulierung der Randbedingungen bei $x = a$ in Frage kommen; diese Lösungen gehören gleichzeitig zu einem genormten Lösungssystem. Unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß Halbbeschränktheit nach unten vorliegt, alle Lösungen von $L(u) - \lambda k u = 0$ nach links absolut-quadratisch integrierbar sind und daß die Symmetriegerade frei von charakteristischen Exponenten ist, wird bewiesen: Die Randbedingungen, die mit den m Lösungen gebildet sind, die zu den rechts der Symmetriegeraden liegenden Exponenten gehören, stellen das „ausgezeichnete" System von Randbedingungen bei $x = a$ dar (siehe K. Friedrichs [2]), d. h. das System, bei dem, kurz gesagt, das Spektrum am weitesten nach rechts verschoben ist. — Zum Abschluß wenden wir uns noch einmal kurz der Frage nach der Halbbeschränktheit an einer Stelle der Bestimmtheit zu. Für $2m = 2$ liegt nach [15] (siehe auch Ph. Hartman [5]) dort genau dann Halbbeschränktheit vor, falls für *ein* reelles λ alle (zwei) charakteristischen Exponenten reell sind. Für $2m > 2$ wird diese Aussage falsch, wie an einem Gegenbeispiel gezeigt wird. Weitere Beispiele machen die Vermutung wahrscheinlich, daß für Nichthalbbeschränktheit das Auftreten nicht-reeller charakteristischer Exponenten auf der Symmetriegeraden eine notwendige Voraussetzung ist.

Herrn Professor Rellich möchte ich hier meinen Dank für die Anregung zu der vorliegenden Arbeit und für fördernden Rat bei ihrer Durchführung aussprechen.

§ 1. Kurze Einführung in die Kodairasche Theorie.

Wir betrachten im folgenden auf dem von K. Kodaira in [10] aufgezeigten Wege das zur Differentialgleichung

$$(1.1)\qquad L(u) = \sum_{\nu=0}^{m} (p_\nu(x)\, u^{(m-\nu)}(x))^{(m-\nu)} = \lambda\, k(x)\, u(x), \qquad a < x < b$$

gehörende Eigenwertproblem. Das Intervall kann sich nach $+\infty$ bzw. nach $-\infty$ erstrecken, die Koeffizienten $p_\nu(x)$ und $k(x)$ können an den Intervallenden beliebige Singularitäten aufweisen. Es werden aber durchweg folgende Voraussetzungen für die Koeffizienten verabredet:

(1.2)
1. $p_\nu(x), \ldots, p_\nu^{(m-\nu-1)}(x)$ reell und stetig in $a < x < b$, $p_\nu^{(m-\nu)}(x)$ stückweise stetig in $a < x < b$, $\nu = 0, \ldots, m-1$,
2. $p_m(x)$, $k(x)$ reell und stückweise stetig in $a < x < b$,
3. $p_0(x) \neq 0$, $k(x) > 0$ in $a < x < b$.

Ist (a, b) ein endliches Intervall und sind die Voraussetzungen (1.2) mit Einschluß der Intervallenden erfüllt, so spricht man von einem „regulären Problem“.

Wegen (1.1) ist für Funktionen $u(x)$ und $v(x)$, deren $(2m-1)$-te Ableitung in $a < x < b$ totalstetig ist, durch

$$(1.3) \qquad \int_y^x (L(u)\,v - u\,L(v))\,dt = [u, v](x) - [u, v](y)$$

eine schiefsymmetrische Bilinearform $[u, v](x)$ definiert; es ist

$$(1.4) \qquad [u, v](x) = \sum_{\nu,\mu=0}^{2m-1} B_{\nu\mu}(x)\, u^{(\nu)}(x)\, v^{(\mu)}(x)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m-1} \sum_{\mu=0}^{m-\nu-1} (-1)^{m-\nu-\mu-1} \left((p_\nu u^{(m-\nu)})^{(\mu)} v^{(m-\nu-\mu-1)} - (p_\nu v^{(m-\nu)})^{(\mu)} u^{(m-\nu-\mu-1)}\right),$$

$$B_{\nu\mu}(x) = 0 \text{ für } \nu + \mu \geqq 2m, \quad B_{\nu\mu}(x) = (-1)^{\nu-1} p_0(x) \text{ für } \nu + \mu = 2m - 1.$$

Sind $u(x)$ und $v(x)$ Lösungen derselben Differentialgleichung (1.1), so ist $[u, v](x)$ von x unabhängig. Aus (1.2) und (1.4) folgt $\det(B_{\nu\mu}(x)) \neq 0$, $\nu, \mu = 0, \ldots, 2m-1$. Daher ist

$$(1.5) \qquad \det([u_\nu, u_\mu](x)) \neq 0, \qquad \nu, \mu = 1, \ldots, 2m,$$

falls $u_1(x), \ldots, u_{2m}(x)$ ein Fundamentalsystem von (1.1) bilden.

Mit $\mathfrak{H}$ wird der Hilbert-Raum aller komplexwertigen Funktionen $f(x)$ bezeichnet, für die im Sinne von LEBESGUE $\int_a^b |f(x)|^2 k(x)\,dx < \infty$ ausfällt, und in dem das innere Produkt durch $(f, g) = \int_a^b f(x)\,\overline{g(x)}\,k(x)\,dx$ erklärt ist.

In Analogie zu den Sätzen von H. WEYL über „Grenzpunktfall“ und „Grenzkreisfall“ bei einer Differentialgleichung zweiter Ordnung (siehe [18] Satz 2 und Satz 4) ist in [10] gezeigt, daß es für jedes λ mit $Im(\lambda) \neq 0$ stets m linear unabhängige Lösungen von (1.1) gibt, für die mit $a < c < b$ gilt $\int_a^c |u(x)|^2 k(x)\,dx < \infty$. Wir wollen dafür abkürzend sagen „die links in $\mathfrak{H}$ liegen“. Ferner ist bewiesen: Gibt es für *ein* λ_0 mit $Im(\lambda_0) \neq 0$ genau $m + \tau_a$ linear unabhängige Lösungen von (1.1), die links in $\mathfrak{H}$ liegen, so gibt es für *jedes* λ mit $Im(\lambda) \neq 0$ genau $m + \tau_a$ derartige Lösungen von (1.1). Darüber hinaus kann man wie im Falle $2m = 2$ leicht zeigen: Liegen für *ein* reelles oder komplexes λ_0 alle Lösungen von (1.1) links in $\mathfrak{H}$, so liegen für *alle* reellen und komplexen λ sämtliche Lösungen links in $\mathfrak{H}$. I. M. GLASMAN hat in [4] diese Sätze über die Anzahl der links in $\mathfrak{H}$ liegenden Lösungen mit Hilfe einer abstrakten Operatorenmethode hergeleitet und zusätzlich bewiesen, daß die Anzahl der zu reellem λ gehörenden, links in $\mathfrak{H}$ liegenden linear unabhängigen Lösungen nicht die Anzahl der entsprechenden zu nicht-reellem λ gehörenden Lösungen übersteigen kann.

Entsprechende Aussagen gelten für das rechte Ende $x = b$. An die Stelle des τ_a links tritt rechts ein τ_b. Die durch

$$\tau = \tau_a + \tau_b \tag{1.6}$$

definierte Zahl τ gibt die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen von (1.1) mit $Im(\lambda) \neq 0$ an, die in $\mathfrak{H}$ liegen.

Es sei nun $\mathfrak{D}$ die Menge der Funktionen $u(x)$, für die

$$\mathfrak{D}: \quad \begin{array}{l} 1.\ u(x), \ldots, u^{(2m-1)}(x) \text{ totalstetig in } a < x < b, \\ 2.\ u(x) \text{ aus } \mathfrak{H}, \frac{1}{k} L(u) \text{ aus } \mathfrak{H} \end{array} \tag{1.7}$$

ist. Ferner sei D der auf alle $u(x)$ aus $\mathfrak{D}$ anwendbare Differentialoperator

$$D u = \frac{1}{k} L(u). \tag{1.8}$$

Bei D werden wir jeweils den gerade zu benutzenden Definitionsbereich, der gegebenenfalls enger als $\mathfrak{D}$ ist, mitangeben. D in $\mathfrak{D}$ ist ein abgeschlossener, reeller Operator[1]).

Der Greenschen Formel (1.3) zufolge existieren für alle $u(x)$ und $v(x)$ aus $\mathfrak{D}$ die Limites $\lim\limits_{x \to a} [u, v](x) = [u, v](a)$, $\lim\limits_{x \to b} [u, v](x) = [u, v](b)$; beide sind ebenfalls schiefsymmetrische Bilinearformen.

Für jedes λ mit $Im(\lambda) \neq 0$ gibt es dann stets mindestens ein Fundamentalsystem $w_1(x, \lambda), \ldots, w_{2m}(x, \lambda)$ von (1.1), bei dem die $w_1(x, \lambda), \ldots, w_m(x, \lambda)$ links in $\mathfrak{H}$ und die $w_{m+1}(x, \lambda), \ldots, w_{2m}(x, \lambda)$ rechts in $\mathfrak{H}$ liegen und bei dem

$$[w_\nu, w_\mu](x) = 0 \quad \text{für } \nu, \mu = 1, \ldots, m \quad \text{und} \quad \text{für } \nu, \mu = m+1, \ldots, 2m \tag{1.9}$$

ausfällt. Durch

$$\begin{aligned} G(x, y, \lambda) = G(y, x, \lambda) &= \sum_{\nu=1, \mu=m+1}^{m} \sum^{2m} F_{\nu\mu}(\lambda)\, w_\mu(x, \lambda)\, w_\nu(y, \lambda) \quad \text{für } x \geqq y, \\ (F_{\nu\mu}(\lambda)) &= ([w_\nu, w_\mu](x))^{-1}, \qquad \nu, \mu = 1, \ldots, 2m \end{aligned} \tag{1.10}$$

wird eine Greensche Funktion $G(x, y, \lambda)$ eingeführt, die von der Wahl des Fundamentalsystems abhängt. Es gelten wegen (1.10), wegen der Schiefsymmetrie von $[u, v](x)$ und wegen (1.9) und (1.5) die Gleichungen

$$\begin{aligned} &F_{\nu\mu}(\lambda) = -F_{\mu\nu}(\lambda), \ \det(F_{\nu\mu}(\lambda)) \neq 0, \qquad \nu, \mu = 1, \ldots, 2m, \\ &F_{\nu\mu}(\lambda) = 0 \ \text{für} \quad \nu, \mu = 1, \ldots, m \ \text{und für} \ \nu, \mu = m+1, \ldots, 2m. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Mit Hilfe der Greenschen Funktion $G(x, y, \lambda)$ ist nun für alle λ mit $Im(\lambda) \neq 0$ durch

$$\begin{aligned} G(\lambda) f(x) &= \int_a^b G(x, y, \lambda) f(y) k(y)\, dy \\ &= \sum_{\nu=1, \mu=m+1}^{m} \sum^{2m} F_{\nu\mu}(\lambda) \Big(w_\mu(x, \lambda) \int_a^x w_\nu(y, \lambda) f(y) k(y)\, dy + \\ &\qquad + w_\nu(x, \lambda) \int_x^b w_\mu(y, \lambda) f(y) k(y)\, dy \Big) \end{aligned} \tag{1.12}$$

---

[1]) Eine Definition der Begriffe „abgeschlossener Operator“ und „reeller Operator“ findet man z. B. in [12], S. 28 bzw. 40.

ein Integraloperator $G(\lambda)$ in ganz $\mathfrak{H}$ definiert, es gilt $\|G(\lambda)\| \leqq |Im(\lambda)|^{-1}$. [2])
Die durch $G(\lambda)\, f(x)$ definierte Funktion $u(x)$ liegt in $\mathfrak{D}$, es ist

$$u^{(n)}(x) = \sum_{\nu=1,}^{m} \sum_{\mu=m+1}^{2m} F_{\nu\mu}(\lambda)\Big(w_\mu^{(n)}(x,\lambda)\int_a^x w_\nu(y,\lambda)\, f(y)\, k(y)\, dy +$$

$$(1.13) \qquad + w_\nu^{(n)}(x,\lambda)\int_x^b w_\mu(y,\lambda)\, f(y)\, k(y)\, dy\Big)$$

$$+ \frac{f(x)\, k(x)}{p_0(x)}\cdot \delta_{2m}^n; \quad n = 0, \ldots, 2m;$$

und

$$(1.14) \qquad (L - \lambda k)\, G(\lambda)\, f(x) = k(x)\, f(x).$$

Zu jeder Funktion $v(x)$ aus $\mathfrak{D}$ gibt es dann eine Funktion $f(x)$ aus $\mathfrak{H}$ und eine in $\mathfrak{D}$ liegende Lösung $w(x, \lambda)$ von (1.1) (die gegebenenfalls $\equiv 0$ ist), so daß gilt

$$(1.15) \qquad v(x) = G(\lambda)\, f(x) + w(x, \lambda).$$

Wir merken an, daß sich im Falle $\tau_a = \tau_b = m$ die Greensche Funktion $G(x, y, \lambda)$ und der Operator $G(\lambda)$ auch für reelles λ gemäß (1.9) bis (1.12) erklären lassen. $G(\lambda)$ ist dann sogar ein Operator von beschränkter Norm[3]), es gelten auch hier die Formeln (1.13) bis (1.15).

Der Operator D in $\mathfrak{D}$ ist im allgemeinen nicht hermitesch. Bezeichnen wir mit D_{ab} den Operator D mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{D}_{ab}$ aller Funktionen $u(x)$ mit

$$\mathfrak{D}_{ab}: \begin{array}{l} 1.\ u(x) \text{ aus } \mathfrak{D}, \\ 2.\ [u, v](a) = [u, v](b) = 0 \text{ für alle } v(x) \text{ aus } \mathfrak{D}, \end{array}$$

so ist D_{ab} ein hermitescher, abgeschlossener, reeller Operator. D_{ab} ist die Adjungierte von D in $\mathfrak{D}$ und umgekehrt. Der Operator D_{ab} besitzt daher wegen (1.6) die Defektindizes[4]) (τ, τ). $\mathfrak{D}$ läßt sich dann auch in der Form $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_{ab} + \mathfrak{E}(i) + \mathfrak{E}(-i)$ darstellen, wobei $\mathfrak{E}(\pm i)$ der von den in $\mathfrak{D}$ liegenden Lösungen von $L(u) \pm i k u = 0$ aufgespannte τ-dimensionale Raum ist[5]).

Für $\tau = 0$ ist D_{ab} bereits selbstadjungiert. Im Falle $\tau > 0$ ist $\mathfrak{D}_{ab}$ um τ linear unabhängige Elemente zu erweitern und D_{ab} in den so erweiterten Raum hinein fortzusetzen, um zu einem selbstadjungierten Operator zu gelangen. Dieser Fortsetzungsprozeß wird in [10] § 4 folgendermaßen durchgeführt: Zunächst werden durch

$$(1.16) \qquad \mathfrak{D}_a: \begin{array}{l} 1.\ u(x) \text{ aus } \mathfrak{D}, \\ 2.\ [u, v](a) = 0 \text{ für alle} \\ \quad v(x) \text{ aus } \mathfrak{D}, \end{array} \qquad \mathfrak{D}_b: \begin{array}{l} 1.\ u(x) \text{ aus } \mathfrak{D}, \\ 2.\ [u, v](b) = 0 \text{ für alle} \\ \quad v(x) \text{ aus } \mathfrak{D}, \end{array}$$

zwei reelle Räume[6]) $\mathfrak{D}_a$ und $\mathfrak{D}_b$ eingeführt, für die folgende Gleichungen bestehen:

$$(1.17) \qquad \mathfrak{D}_{ab} = \mathfrak{D}_a \cap \mathfrak{D}_b, \ \dim(\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_a) = 2\tau_a, \ \dim(\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_b) = 2\tau_b.$$

[2]) Zur Definition von $\|G(\lambda)\|$ siehe z. B. [12], S. 11.
[3]) Siehe dazu z. B. [17], S. 66 und 101.
[4]) Definition der Defektindizes siehe z. B. [12], S. 38.
[5]) Siehe z. B. [10] (3.33) oder [12], S. 38.
[6]) Ein Funktionenraum $\mathfrak{A}$ soll „reell" heißen, wenn mit $u(x)$ auch $\overline{u(x)}$ in $\mathfrak{A}$ liegt.

Es gibt also $2\tau_a$ Funktionen ${}^a\psi_1(x), \ldots, {}^a\psi_{2\tau_a}(x)$ aus $\mathfrak{D}$, die insbesondere reell gewählt werden können, die $\bmod(\mathfrak{D}_a)$ linear unabhängig sind, d. h. für die gilt

$$\sum_{\nu=1}^{2\tau_a} c_\nu {}^a\psi_\nu(x) \text{ nicht aus } \mathfrak{D}_a, \text{ falls } \sum_{\nu=1}^{2\tau_a} |c_\nu|^2 \neq 0.$$

Ein derartiges System von Funktionen wollen wir eine „Basis $\bmod(\mathfrak{D}_a)$" nennen. Die Basis soll „reell" heißen, falls $[{}^a\psi_\nu, {}^a\psi_\mu](a) = [{}^a\psi_\nu, \overline{{}^a\psi_\mu}](a)$, $\nu, \mu = 1, \ldots, 2\tau_a$ gilt. Wir merken an, daß $2\tau_a$ Funktionen ${}^a\psi_1(x), \ldots, {}^a\psi_{2\tau_a}(x)$ aus $\mathfrak{D}$ genau dann eine Basis $\bmod(\mathfrak{D}_a)$ bilden, falls gilt:

$$\text{(1.18)} \qquad \det([{}^a\psi_\nu, {}^a\psi_\mu](a)) \neq 0, \qquad \nu, \mu = 1, \ldots, 2\tau_a.$$

Jede Funktion $u(x)$ aus $\mathfrak{D}$ läßt sich dann wegen (1.17) mit geeigneten Zahlen u_ν in der Form

$$\text{(1.19)} \qquad u(x) = \sum_{\nu=1}^{2\tau_a} u_\nu {}^a\psi_\nu(x) \bmod(\mathfrak{D}_a)$$

darstellen, wobei sich die u_ν wegen (1.18) eindeutig aus dem Gleichungssystem

$$\text{(1.20)} \qquad [{}^a\psi_\mu, u](a) = \sum_{\nu=1}^{2\tau_a} u_\nu [{}^a\psi_\mu, {}^a\psi_\nu](a), \qquad \mu = 1, \ldots, 2\tau_a$$

berechnen lassen. — Entsprechend liegen die Verhältnisse am rechten Ende.

In $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_a$ bzw. $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_b$ bilden $[u, v](a)$ bzw. $[u, v](b)$ schiefsymmetrische, nichtausgeartete Bilinearformen.

Unter Systemen reeller, selbstadjungierter Randbedingungen bei $x = a$ bzw. $x = b$ versteht K. Kodaira Randbedingungen für $u(x)$ aus $\mathfrak{D}$ der Form:

$$\text{(1.21a)} \quad \text{I. } [{}^a\Phi_\nu, u](a) = 0, \ \nu = 1, \ldots, \tau_a, \quad \text{II. } [{}^b\Phi_\nu, u](b) = 0, \ \nu = 1, \ldots, \tau_b,$$

wobei die ${}^a\Phi_\nu(x)$ bzw. die ${}^b\Phi_\nu(x)$ reelle Funktionen aus $\mathfrak{D}$ sind, die $\bmod(\mathfrak{D}_a)$ bzw. $\bmod(\mathfrak{D}_b)$ linear unabhängig sind und für die folgende Gleichungen bestehen:

$$\text{(1.21b)} \quad \text{I. } [{}^a\Phi_\nu, {}^a\Phi_\mu](a) = 0, \ \nu, \mu = 1, \ldots, \tau_a, \quad \text{II. } [{}^b\Phi_\nu, {}^b\Phi_\mu](b) = 0, \ \nu, \mu = 1, \ldots, \tau_b.$$

(1.17) zufolge genügt eine Funktion $u(x)$ aus $\mathfrak{D}$ genau dann den Bedingungen (1.21a I), wenn mit geeigneten Zahlen a_ν gilt $u(x) = \sum_{\nu=1}^{\tau_a} a_\nu {}^a\Phi_\nu(x) \bmod(\mathfrak{D}_a)$.

Für die Randbedingungen bei $x = a$ ist nur das Verhalten der Funktionen in der Umgebung von $x = a$ von Belang. Wir wollen daher jetzt insbesondere darauf verzichten, daß die zur Formulierung von Randbedingungen bei $x = a$ benutzten Funktionen auch rechts in $\mathfrak{H}$ liegen und reell sind und vereinbaren: Es gebe ein c mit $a < c < b$, so daß die Funktionen $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_{\tau_a}(x)$ in $\mathfrak{D}$ liegen und $\bmod(\mathfrak{D}_a)$ linear unabhängig sind, falls man das bei der Beschreibung von $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_a$ auftretende Intervall $a < x < b$ durch $a < x \leqq c$ ersetzt. Dann wollen wir die τ_a Bedingungen $[\alpha_\nu, u](a) = 0$, $\nu = 1, \ldots, \tau_a$ für $u(x)$ aus $\mathfrak{D}$ ebenfalls ein System reeller, selbstadjungierter Randbedingungen bei $x = a$ nennen, falls sie einem System der Form (1.21 I) äquivalent sind. Das

ist offenbar genau dann der Fall, wenn

$$[\alpha_\nu, \alpha_\mu](a) = [\alpha_\nu, \overline{\alpha_\mu}](a) = 0, \qquad \nu, \mu = 1, \ldots, \tau_a \tag{1.22}$$

ist. Zwei derartige Systeme $[\alpha_\nu, u](a) = 0$, $\nu = 1, \ldots, \tau_a$ und $[\beta_\nu, u](a) = 0$, $\nu = 1, \ldots, \tau_a$ von reellen, selbstadjungierten Randbedingungen bei $x = a$ sind genau dann äquivalent, falls gilt

$$[\alpha_\nu, \beta_\mu](a) = 0, \qquad \nu, \mu = 1, \ldots, \tau_a. \tag{1.23}$$

Entsprechendes gilt für das rechte Intervallende.

Der Operator D mit dem Definitionsbereich

$$\mathfrak{D}({}^a\Phi_1, \ldots, {}^a\Phi_{\tau_a} \mid {}^b\Phi_1, \ldots, {}^b\Phi_{\tau_b}): \quad \begin{array}{l} 1.\ u(x) \text{ aus } \mathfrak{D} \\ 2.\ u(x) \text{ genügt (1.21)} \end{array}$$

ist dann selbstadjungiert und reell[7]).

In [10] § 5 ist ausgeführt, daß es zu den Randbedingungen (1.21) für jedes λ mit $Im(\lambda) \neq 0$ mindestens ein Fundamentalsystem $w_1(x, \lambda), \ldots, w_{2m}(x, \lambda)$ von (1.1) gibt mit

$$\begin{aligned} &\text{I. } \int_a^c |w_\nu(x, \lambda)|^2 k(x)\, dx < \infty, \quad \int_c^b |w_{m+\nu}(x, \lambda)|^2 k(x)\, dx < \infty, \quad \nu = 1, \ldots, m \\ &\qquad\qquad a < c < b, \\ &\text{II. } [{}^a\Phi_\mu, w_\nu](a) = 0,\ \mu = 1, \ldots, \tau_a,\ [{}^b\Phi_\mu, w_{m+\nu}](b) = 0,\ \mu = 1, \ldots, \tau_b,\ \nu = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Wegen (1.24 II) gilt dann auch (1.9). Der mit einem derartigen Fundamentalsystem gemäß (1.12) gebildete Operator $G(\lambda)$ ist dann die Reziproke von $(D - \lambda)$ in $\mathfrak{D}({}^a\Phi_1, \ldots, {}^a\Phi_{\tau_a} \mid {}^b\Phi_1, \ldots, {}^b\Phi_{\tau_b})$:

$$\begin{aligned} (D - \lambda)^{-1} f(x) = \sum_{\nu=1,}^{m} \sum_{\mu=m+1}^{2m} F_{\nu\mu}(\lambda) \Big(& w_\mu(x, \lambda) \int_a^x w_\nu(y, \lambda) f(y)\, k(y)\, dy + \\ & + w_\nu(x, \lambda) \int_x^b w_\mu(y, \lambda) f(y)\, k(y)\, dy \Big). \end{aligned} \tag{1.25}$$

§ 2. Randbedingungen, Anfangszahlen, genormtes Lösungssystem.

In [10] sind, wie im vorangehenden Paragraphen ausgeführt, die Randbedingungen an den Intervallenden mit reellen Funktionen ${}^a\Phi_1, \ldots, {}^a\Phi_{\tau_a}$ und ${}^b\Phi_1, \ldots, {}^b\Phi_{\tau_b}$ formuliert, von denen man zunächst nur weiß, daß es derartige Funktionen gibt. Wie findet man nun solche Funktionen, wie verschafft man sich einen Überblick über sämtliche (getrennten) Randbedingungen? Wir sind von der Ordnung $2m = 2$ her gewohnt, Randbedingungen, die schließlich zu einem selbstadjungierten Differentialoperator zweiter Ordnung führen, mit Hilfe von Lösungen der Differentialgleichung $L(u) - iku = 0$ zu formulieren. Im folgenden soll zunächst gezeigt werden, daß allgemein für $2m \geq 2$ die Randbedingungen (1.21) durch äquivalente Randbedingungen ersetzt werden können, die mit geeigneten Lösungen von $L(u) - \lambda ku = 0$ formuliert sind.

---

[7]) Über die Gesamtheit der selbstadjungierten Fortsetzungen von D_{ab} siehe [17], Kap. X oder [1].

Wir wollen die Verhältnisse am linken Ende $x = a$ untersuchen. Entsprechendes gilt dann für das rechte Ende. Wir setzen zu Beginn $\tau_b = m$ voraus. Ferner setzen wir voraus, daß $\tau_a > 0$ ist und daß für $\lambda = \lambda_0$ die Gleichung (1.1) $m + \tau_a$ linear unabhängige Lösungen in $\mathfrak{D}$ besitzt. (Diese letzte Voraussetzung ist dann stets erfüllt, falls $Im(\lambda_0) \neq 0$ oder $\tau_a = m$ ist oder falls bei $x = a$ eine Stelle der Bestimmtheit vorliegt, siehe § 1 und § 6.) Es sei nun $h_1(x), \ldots, h_{2m}(x)$ ein Fundamentalsystem von $L(u) - \lambda_0 k u = 0$, das so ausgewählt und numeriert ist, daß gilt:

$$h_1(x), \ldots, h_{m+\tau_a}(x) \text{ aus } \mathfrak{D}. \tag{2.1}$$

Wegen (1.17) können höchstens $2\tau_a$ Lösungen davon mod$(\mathfrak{D}_a)$ linear unabhängig sein. Durch geeignete Linearkombination kann man also erreichen, daß mindestens $m - \tau_a$ der Lösungen (2.1) in $\mathfrak{D}_a$ liegen. Wir denken uns die Auswahl der Lösungen (2.1) bereits so vorgenommen, daß $h_{2\tau_a+1}, \ldots, h_{m+\tau_a}$ in $\mathfrak{D}_a$ liegen. Nach (1.16) ist daher

$$[h_\nu, h_\mu](x) = [h_\mu, h_\nu](x) = 0 \text{ für } \nu = 2\tau_a + 1, \ldots, m + \tau_a,\ \mu = 1, \ldots, m + \tau_a. \tag{2.2}$$

Die Annahme, daß

$$\det([h_\nu, h_\mu](x)) \neq 0, \quad \nu, \mu = 1, \ldots, 2\tau_a \tag{2.3}$$

falsch sei, führt mit (2.2) zum Widerspruch zu (1.5). Nach (1.18) sind daher $h_1, \ldots, h_{2\tau_a}$ mod$(\mathfrak{D}_a)$ linear unabhängig, bilden also eine Basis mod $(\mathfrak{D}_a)$. Nach (1.19) gibt es daher komplexe Zahlen $c_{\nu\mu}$, so daß für die Funktionen ${}^a\Phi_\nu(x)$ aus (1.21 I)

$${}^a\Phi_\nu(x) = \sum_{\mu=1}^{2\tau_a} c_{\nu\mu}\, h_\mu\,(x) \bmod (\mathfrak{D}_a), \qquad \nu = 1, \ldots, \tau_a$$

wird. Setzen wir noch

$$w_\nu(x, \lambda_0) = \sum_{\mu=1}^{2\tau_a} c_{\nu\mu}\, h_\mu(x), \qquad \nu = 1, \ldots, \tau_a,$$

so spannen die Lösungen $w_1(x, \lambda_0), \ldots, w_{\tau_a}(x, \lambda_0)$ von $L(u) - \lambda_0 k u = 0$ mod$(\mathfrak{D}_a)$ den gleichen τ_a-dimensionalen Raum auf wie die ${}^a\Phi_1(x), \ldots, {}^a\Phi_{\tau_a}(x)$. Wegen (1.21b I) ist $[w_\nu, {}^a\Phi_\mu](a) = 0$, $\nu, \mu = 1, \ldots, \tau_a$ und

$$[w_\nu, w_\mu](x) = [w_\nu, \overline{w}_\mu](a) = 0, \qquad \nu, \mu = 1, \ldots, \tau_a. \tag{2.4}$$

Nach (1.23) ist daher das System der Randbedingungen

$$[w_\nu, u](a) = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, \tau_a,\ u(x) \text{ aus } \mathfrak{D} \tag{2.5}$$

äquivalent zu (1.21 I). — Das Umgekehrte, nämlich daß für jedes System von Randbedingungen (2.4), (2.5), bei dem die $w_\nu(x, \lambda_0)$ linear unabhängig mod$(\mathfrak{D}_a)$ sind, ein äquivalentes System (1.21 I) existiert, ist bereits bei (1.22) angeführt.

Wir erhalten gleichzeitig: Wählt man von den $m + \tau_a$ Lösungen (2.1) irgendwelche m Lösungen aus, so sind darunter mindestens τ_a linear unabhängig mod$(\mathfrak{D}_a)$.

Damit ist auch der folgende Satz bewiesen, bei dem wir nun auf die Voraussetzung $\tau_b = m$ verzichten können:

Satz 2.1: *Es sei $\tau_a > 0$. Für $\lambda = \lambda_0$ besitze* (1.1) *$m + \tau_a$ linear unabhängige Lösungen, die links in $\mathfrak{H}$ liegen. Dann gibt es stets τ_a links in $\mathfrak{H}$ liegende Lösungen von $L(u) - \lambda_0 k u = 0$, die* (2.4) *genügen und in der Form* (2.5) *ein zu einem vorgegebenen System* (1.21 I) *äquivalentes System von reellen, selbstadjungierten Randbedingungen bei $x = a$ bilden. — Umgekehrt gibt es zu jedem derartigen System* (2.4), (2.5) *ein äquivalentes System* (1.21 I). — *Entsprechendes gilt für das rechte Intervallende*[8]).

Nun sei λ_0 kein Eigenwert des mit den Randbedingungen (1.21) selbstadjungierten Operators D. $L(u) - \lambda_0 k u = 0$ besitze $m + \tau_a$ linear unabhängige Lösungen, die links in $\mathfrak{H}$ liegen, und $m + \tau_b$ linear unabhängige Lösungen, die rechts in $\mathfrak{H}$ liegen ($\tau_a \geqq 0$, $\tau_b \geqq 0$). Durch Hinzunahme der $m - \tau_a$ Lösungen und der $m - \tau_b$ Lösungen, die links bzw. rechts in $\mathfrak{H}$ liegen und bei $x = a$ bzw. $x = b$ allen Randbedingungen genügen (s. o.), zu den durch Satz 2.1 garantierten $\tau_a + \tau_b$ Lösungen erhält man $2m$ Lösungen $w_1(x, \lambda_0), \ldots, w_{2m}(x, \lambda_0)$ von $L(u) - \lambda_0 k u = 0$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $w_1, \ldots, w_m$ liegen links, $w_{m+1}, \ldots, w_{2m}$ liegen rechts in $\mathfrak{H}$,
2. $w_{\tau_a+1}, \ldots, w_m$ genügen bei $x = a$, $w_{m+\tau_b+1}, \ldots, w_{2m}$ genügen bei $x = b$ allen Randbedingungen,

(2.6)
3. $[w_\nu, w_\mu](x) = [w_\nu, \overline{w_\mu}](a) = [w_{m+\nu}, w_{m+\mu}](x) = [w_{m+\nu}, \overline{w_{m+\mu}}](a) = 0$, $\nu, \mu = 1, \ldots, m$,
4. die Randbedingungen $[w_\nu, u](a) = 0$, $\nu = 1, \ldots, \tau_a$, $[w_\mu, u](b) = 0$, $\mu = m + 1, \ldots, m + \tau_b$ sind äquivalent zu (1.21).

Diese $2m$ Lösungen bilden ein Fundamentalsystem, denn anders wäre λ_0 doch ein Eigenwert.

Ist zusätzlich $Im(\lambda_0) \neq 0$ oder $\tau_a = \tau_b = m$ (im letzteren Fall liegt ein reines diskretes Spektrum vor), so stellt der mit diesem Fundamentalsystem gemäß (1.12) gebildete Operator $G(\lambda_0)$ die Reziproke von $(D - \lambda_0)$ in $\mathfrak{D}({}^a\Phi_1, \ldots, {}^a\Phi_{\tau_a} \mid {}^b\Phi_1, \ldots, {}^b\Phi_{\tau_b})$ dar. (Für nicht-reelles λ_0 siehe hierzu (1.25), für reelles λ_0 siehe (1.4), (1.13), (1.14), (1.15) und die (1.15) folgende Bemerkung.)

Im folgenden formulieren wir die Definitionen und Sätze wieder nur für das linke Intervallende. Entsprechendes gilt dann für das rechte Ende.

Wie im Falle $2m = 2$[9]) kann man nun, anknüpfend an (1.19), für $2m \geqq 2$ „Anfangszahlen" definieren:

Definition 2.1: *Die Funktionen ${}^a\psi_1(x), \ldots, {}^a\psi_{2\tau_a}(x)$ mögen eine Basis* mod$(\mathfrak{D}_a)$ *bilden. Ist $u(x)$ eine Funktion aus $\mathfrak{D}$, so sollen die durch* (1.19) *eindeutig bestimmten Zahlen $u_1, \ldots, u_{2\tau_a}$ die „Anfangszahlen von $u(x)$ in bezug auf die Basis ${}^a\psi_1(x), \ldots, {}^a\psi_{2\tau_a}(x)$" genannt werden.*

---

[8]) Für nicht-reelles λ_0 ist Satz 2.1 und auch die folgenden Aussagen (2.6) bis auf die Tatsache, daß die Randbedingungen $[w_\nu, u](a) = 0$, $\nu = 1, \ldots, \tau_a$, $[w_{m+\nu}, u](b) = 0$, $\nu = 1, \ldots, \tau_b$ äquivalent zu (1.21) sind, in (1.24), also in [10] enthalten.

[9]) Siehe [13], [14] und [15].

Mit Hilfe der so definierten Anfangszahlen kann man die Randbedingungen bei $x = a$ übersichtlich formulieren: $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_{\tau_a}(x)$ liegen in $\mathfrak{D}$, für $u(x)$ aus $\mathfrak{D}$ sei

$$[\alpha_\nu, u](a) = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, \tau_a \tag{2.7}$$

ein System reeller, selbstadjungierter Randbedingungen bei $x = a$. $a_{\nu 1}, \ldots, a_{\nu 2\tau_a}$, $\nu = 1, \ldots, \tau_a$ seien die Anfangszahlen der Funktionen $\alpha_\nu(x)$ in bezug auf die Basis ${}^a\psi_1(x), \ldots, {}^a\psi_{2\tau_a}(x)$. Dann genügt $u(x)$ genau dann den Bedingungen (2.7), falls die zugehörigen Anfangszahlen u_μ (in bezug auf dieselbe Basis) das Gleichungssystem

$$\sum_{\varkappa,\mu=1}^{2\tau_a} a_{\nu\varkappa} u_\mu [{}^a\psi_\varkappa, {}^a\psi_\mu](a) = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, \tau_a \tag{2.8}$$

befriedigen. Zwei derartige Systeme (2.7) $[\alpha_\nu, u](a) = 0$, $\nu = 1, \ldots, \tau_a$ und $[\beta_\nu, u](a) = 0$, $\nu = 1, \ldots, \tau_a$ sind nach (1.23) offenbar genau dann äquivalent, wenn die beiden von den τ_a Vektoren $(a_{\nu 1}, \ldots, a_{\nu 2\tau_a})$, $\nu = 1, \ldots, \tau_a$ bzw. $(b_{\nu 1}, \ldots, b_{\nu 2\tau_a})$, $\nu = 1, \ldots, \tau_a$ aufgespannten τ_a-dimensionalen Unterräume des $2\tau_a$-dimensionalen Vektorraumes übereinstimmen.

Ist insbesondere $x = a$ ein reguläres Ende, so bilden $2m$ Funktionen ${}^a\psi_\nu(x)$ aus $\mathfrak{D}$, für die in einer Umgebung von $x = a$ gilt ${}^a\psi_\nu(x) = (x-a)^{\nu-1}$, $\nu = 1, \ldots, 2m$, eine reelle Basis (siehe dazu (1.4)). Für die Anfangszahlen u_ν einer Funktion $u(x)$ aus $\mathfrak{D}$ in bezug auf diese Basis gilt dann $u_\nu = \frac{1}{(\nu-1)!} u^{(\nu-1)}(a)$, $\nu = 1, \ldots, 2m$.

Wegen (1.22) erhalten wir den folgenden Satz, der uns einen Überblick über sämtliche reellen, selbstadjungierten Randbedingungen bei $x = a$ gibt:

Satz 2.2: *Genau dann ist* (2.7) *bzw.* (2.8) *ein System reeller, selbstadjungierter Randbedingungen bei $x = a$, falls für die Anfangszahlen $a_{\nu 1}, \ldots, a_{\nu 2\tau_a}$ der Funktionen $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_{\tau_a}(x)$ in bezug auf eine Basis ${}^a\psi_1(x), \ldots, {}^a\psi_{2\tau_a}(x)$* mod$(\mathfrak{D}_a)$ *die folgenden Gleichungen bestehen:*

$$\sum_{i,k=1}^{2\tau_a} a_{\nu i} a_{\mu k} [{}^a\psi_i, {}^a\psi_k](a) = \sum_{i,k=1}^{2\tau_a} a_{\nu i} \overline{a_{\mu k}} [{}^a\psi_i, \overline{{}^a\psi_k}](a) = 0, \qquad \nu, \mu = 1, \ldots, \tau_a,$$

$$\operatorname{Rang}(a_{\nu i}) = \tau_a, \quad \nu = 1, \ldots, \tau_a, \quad i = 1, \ldots, 2\tau_a.$$

Anmerkung: Im Falle, daß die Basis ${}^a\psi_\nu(x)$ reell ist, d. h. daß $[{}^a\psi_\nu, {}^a\psi_\mu](a) = [{}^a\psi_\nu, \overline{{}^a\psi_\mu}](a)$, $\nu, \mu = 1, \ldots, 2\tau_a$ gilt, erhält man bereits alle reellen, selbstadjungierten Randbedingungen bei $x = a$, wenn man in diesem Satz nur reelle Anfangszahlen $a_{\nu i}$ in Betracht zieht.

Für den Rest dieses Paragraphen soll $\tau_b = m$ vorausgesetzt werden.

Besitzt für $\lambda = \lambda_0$ die Gleichung (1.1) $m + \tau_a$ linear unabhängige Lösungen $s_1(x, \lambda_0), \ldots, s_{m+\tau_a}(x, \lambda_0)$ aus $\mathfrak{D}$[10]), so können dieselben stets, wie oben gezeigt, so ausgewählt werden, daß die $s_1(x, \lambda_0), \ldots, s_{m-\tau_a}(x, \lambda_0)$ in $\mathfrak{D}_a$ liegen und die $s_{m+1-\tau_a}(x, \lambda_0), \ldots, s_{m+\tau_a}(x, \lambda_0)$ eine Basis mod$(\mathfrak{D}_a)$ bilden. Ist dann

[10]) Diese Bedingung ist für nicht-reelles λ_0 stets erfüllt.

$y(x, \lambda_0)$ eine in $\mathfrak{D}$ liegende Lösung derselben Differentialgleichung, so gilt mit geeigneten komplexen Zahlen y_ν: $y(x, y_0) = \sum_{\nu=1}^{m+\tau_a} y_\nu\, s_\nu(x, \lambda_0)$. Die $y_{m+1-\tau_a}, \ldots, y_{m+\tau_a}$ sind dann die Anfangszahlen von $y(x, \lambda_0)$ in bezug auf diese Basis. Die Anfangszahlen einer festen Funktion $u(x)$ aus $\mathfrak{D}$ in bezug auf eine derartige Basis werden im allgemeinen von λ_0 abhängen.

Definition 2.2: *Für alle λ, für die* (1.1) $m + \tau_a$ *linear unabhängige, in* $\mathfrak{D}$ *liegende Lösungen besitzt, seien* $s_1(x, \lambda), \ldots, s_{m+\tau_a}(x, \lambda)$ *linear unabhängige Lösungen von* (1.1) *aus* $\mathfrak{D}$, *wobei die* $s_1(x, \lambda), \ldots, s_{m-\tau_a}(x, \lambda)$ *in* $\mathfrak{D}_a$ *liegen und die* $s_{m+1-\tau_a}(x, \lambda), \ldots, s_{m+\tau_a}(x, \lambda)$ *eine Basis* mod$(\mathfrak{D}_a)$ *bilden. Für jedes feste* $u(x)$ *aus* $\mathfrak{D}$ *seien die Anfangszahlen in bezug auf diese Basis von* λ *unabhängig. Dann sollen die* $s_1(x, \lambda), \ldots, s_{m+\tau_a}(x, \lambda)$ *ein „bei* $x = a$ *genormtes Lösungssystem" genannt werden.*

Die Existenz derartiger genormter Lösungssysteme ist nach dem oben Gesagten evident: Ist nämlich λ_0 ein zulässiger λ-Wert, haben $s_1(x, \lambda_0), \ldots, s_{m+\tau_a}(x, \lambda_0)$ die oben angeführten Eigenschaften, so hat man, wenn λ_1 ein weiterer zulässiger λ-Wert ist, $s_1(x, \lambda_1), \ldots, s_{m+\tau_a}(x, \lambda_1)$ nur so zu wählen, daß gilt

$$s_\nu(x, \lambda_1) = s_\nu(x, \lambda_0) \bmod (\mathfrak{D}_a), \qquad \nu = 1, \ldots, m + \tau_a. \tag{2.9}$$

Für $\tau_a < m$ sind die Lösungen $s_\nu(x, \lambda)$ durch (2.9) noch nicht eindeutig festgelegt, man kann ja jeweils noch eine in $\mathfrak{D}_a$ liegende Lösung hinzufügen. Wir können aber die $s_\nu(x, \lambda)$, $\nu = 1, \ldots, m + \tau_a$ so auswählen, daß sie regulär-analytisch von λ abhängen, wie jetzt näher präzisiert und ausgeführt werden soll. Für $\tau_a < m$ soll dabei $Im(\lambda)\, Im(\lambda_0) > 0$ vorausgesetzt werden. Dann gibt es stets $m + \tau_a$ in $\mathfrak{D}$ liegende Lösungen $s_\nu(x, \lambda)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $s_\nu(x, \lambda) = s_\nu(x, \lambda_0) \bmod (\mathfrak{D}_a)$, $\qquad \nu = 1, \ldots, m + \tau_a$,
2. für $\tau_a = m$ sind die $s_\nu^{(n)}(x, \lambda)$, $n = 0, \ldots, 2m - 1$ ganze Funktionen in λ, es gibt Funktionen $\varphi_{\nu\mu}(x, \lambda_0)$ aus $\mathfrak{D}$, $\mu = 0, \ldots$, so daß
$$s_\nu^{(n)}(x_0, \lambda) = \sum_{\mu=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^\mu\, \varphi_{\nu\mu}^{(n)}(x_0, \lambda_0), \qquad \nu = 1, \ldots, m + \tau_a \tag{2.10}$$
gilt für alle x_0 aus $a < x_0 < b$.
3. für $\tau_a < m$ sind die $s_\nu^{(n)}(x, \lambda)$, $n = 0, \ldots, 2m - 1$ regulär-analytisch in λ in der Halbebene (oberen oder unteren), in der λ_0 liegt. Es gelten dort für $|\lambda - \lambda_0| < |Im(\lambda_0)|$ die gleichen Potenzreihenentwicklungen wie unter 2.

Zum Beweis von (2.10) verschaffen wir uns ein Fundamentalsystem $w_1(x, \lambda), \ldots w_{2m}(x, \lambda)$ von (1.1) mit folgenden Eigenschaften:

(2.11)
1. $w_1(x, \lambda), \ldots, w_{m+\tau_a}(x, \lambda)$ aus $\mathfrak{D}$,
2. $w_1(x, \lambda), \ldots, w_{\tau_a}(x, \lambda)$, $w_{m+1}(x, \lambda), \ldots, w_{m+\tau_a}(x, \lambda)$ linear unabhängig mod$(\mathfrak{D}_a)$,
3. $w_{\tau_a+1}(x, \lambda), \ldots, w_m(x, \lambda)$ aus $\mathfrak{D}_a$,
4. $[w_\nu, w_\mu](x) = 0$ für $\nu, \mu = 1, \ldots, m$ und für $\nu, \mu = m + 1, \ldots, 2m$

Dann ist auch $[w_\nu, w_\mu](x) = 0$ für $\nu = \tau_a + 1, \ldots, m$, $\mu = 1, \ldots, m + \tau_a$, und in Verbindung mit (1.10) und (2.11) folgt daraus:

$$F_{\nu\mu}(\lambda) = 0 \quad \begin{matrix} \text{für } \nu, \mu = 1, \ldots, m, & \text{für } \nu, \mu = m+1, \ldots, 2m \\ \text{und für } \nu = 1, \ldots, \tau_a, & \mu = m + \tau_a + 1, \ldots, 2m. \end{matrix} \tag{2.12}$$

Wegen (1.13), (1.15), (2.11) und (2.12) gibt es dann zu jedem $u(x)$ aus $\mathfrak{D}$ ein $f(x)$ aus $\mathfrak{H}$ und Konstante $u_1, \ldots, u_{m+\tau_a}$ dergestalt, daß gilt:

$$\begin{aligned} u^{(n)}(x) = \sum_{\nu=1}^{m+\tau_a} u_\nu w_\nu^{(n)}(x,\lambda) + \delta_{2m}^n \frac{f(x)\,k(x)}{p_0(x)} + \\ + \sum_{\nu=1,}^{m} \sum_{\mu=m+1}^{m+\tau_a} F_{\nu\mu}(\lambda)\Big(w_\mu^{(n)}(x,\lambda) \int_a^x w_\nu(y,\lambda)\, f(y)\, k(y)\, dy - \\ - w^{(n)}(x,\lambda) \int_a^x w_\mu(y,\lambda)\, f(y)\, k(y)\, dy \Big) + \\ + \sum_{\nu=\tau_a+1,}^{m} \sum_{\mu=m+\tau_a+1}^{2m} F_{\nu\mu}(\lambda)\Big(w_\mu^{(n)}(x,\lambda) \int_a^x w_\nu(y,\lambda)\, f(y)\, k(y)\, dy + \\ + w_\nu^{(n)}(x,\lambda) \int_x^b w_\mu(y,\lambda)\, f(y)\, k(y)\, dy \Big), \\ n = 0, \ldots, 2m. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Für alle $f(x)$ aus $\mathfrak{H}$ und für alle λ (wobei weiterhin $Im(\lambda) \neq 0$ im Falle $\tau_a < m$ vorausgesetzt ist) wird durch

$$\begin{aligned} F(\lambda)\, f(x) = \sum_{\nu=1,}^{m} \sum_{\mu=m+1}^{m+\tau_a} F_{\nu\mu}(\lambda)\Big(w_\mu(x,\lambda) \int_a^x w_\nu(y,\lambda)\, f(y)\, k(y)\, dy - \\ - w_\nu(x,\lambda) \int_a^x w_\mu(y,\lambda)\, f(y)\, k(y)\, dy \Big) + \\ + \sum_{\nu=\tau_a+1,}^{m} \sum_{\mu=m+\tau_a+1}^{2m} F_{\nu\mu}(\lambda)\Big(w_\mu(x,\lambda) \int_x^x w_\nu(y,\lambda)\, f(y)\, k(y)\, dy + \\ + w_\nu(x,\lambda) \int_x^b w_\mu(y,\lambda)\, f(y)\, k(y)\, dy \Big) \end{aligned} \tag{2.14}$$

ein Operator $F(\lambda)$ definiert, der, wie ein Vergleich mit $G(\lambda)$ lehrt, beschränkt ist. Es bestehen die Beziehungen:

(2.15) $(L - \lambda k)\, F(\lambda)\, f(x) = k(x)\, f(x)$, $F(\lambda)\, f(x)$ aus $\mathfrak{D}_a$ für alle $f(x)$ aus $\mathfrak{H}$,

wie leicht aus (1.4), (2.11) und (2.13) einzusehen ist.

Wir wenden nun eine bekannte Schlußkette[11]) an: Für $|\lambda - \lambda_0| < \|F(\lambda_0)\|^{-1}$ bewirkt der Operator $(1 - (\lambda - \lambda_0)\, F(\lambda_0))$ eine eineindeutige Abbildung der $m + \tau_a$ in $\mathfrak{D}$ liegenden Lösungen von $L(u) - \lambda k u = 0$ auf die entsprechenden Lösungen von $L(u) - \lambda_0 k u = 0$. Der Operator

$$(1 - (\lambda - \lambda_0)\, F(\lambda_0))^{-1} = 1 + (\lambda - \lambda_0)\, F(\lambda_0) \sum_{\mu=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^\mu F(\lambda_0)^\mu$$

[11]) Siehe z. B. [10], S. 514ff., insbesondere auch Lemma 3.1.

leistet das Umgekehrte. Zu $s_\nu(x, \lambda_0)$ gibt es also eine Lösung $s_\nu(x, \lambda)$ aus $\mathfrak{D}$ von $L(u) - \lambda k u = 0$, so daß, zunächst nur im Sinne der Hilbertschen Metrik, die Gleichung

$$s_\nu(x, \lambda) = s_\nu(x, \lambda_0) + (\lambda - \lambda_0) F(\lambda_0) \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^\mu F(\lambda_0)^\mu s_\nu(x, \lambda_0) \right)$$

besteht. Rechts und links vom Gleichheitszeichen stehen nun wegen (2.15) Funktionen aus $\mathfrak{D}$, also gilt diese Gleichung auch punktweise. Dann ist $s_\nu(x, \lambda) \equiv s_\nu(x, \lambda_0) \bmod(\mathfrak{D}_a)$. Indem wir nun die bei Anwendung von $F(\lambda_0)$ auf $\sum_{\mu=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^\mu F(\lambda_0)^\mu s_\nu(x, \lambda_0)$ auftretenden vier Integrale als innere Produkte in den Hilbert-Räumen über den Intervallen $a < y \leqq x$ bzw. $x \leqq y < b$ auffassen, die Stetigkeit des inneren Produktes ausnutzen, $F(\lambda_0)^\mu s_\nu(x, \lambda_0) = \varphi_{\nu\mu}(x, \lambda_0)$ setzen und (2.13) berücksichtigen, erhalten wir (2.10) für $|\lambda - \lambda_0| < \|F(\lambda_0)\|^{-1}$. Für $\tau_a = m$ kann man nun in die ganze komplexe λ-Ebene fortsetzen, für $\tau_a < m$ in die betreffende ganze Halbebene.

Nun habe auch für alle reellen λ die Gleichung (1.1) $m + \tau_a$ linear unabhängige Lösungen aus $\mathfrak{D}$[12]). $s_1(x, \lambda), \ldots, s_{m+\tau_a}(x, \lambda)$ sei ein gemäß Definition 2.2 bei $x = a$ genormtes Lösungssystem, das so ausgewählt ist, daß die Randbedingungen $[s_\nu(x, \lambda_0), u(x)](a) = 0$, $\nu = m - \tau_a + 1, \ldots, m$ äquivalent sind zu dem bei $x = a$ vorliegenden System von reellen, selbstadjungierten Randbedingungen. Dann ist die Gesamtheit der in $\mathfrak{D}$ liegenden Lösungen von (1.1), die diesen Randbedingungen bei $x = a$ genügen, die Menge der Linearkombinationen $y(x, \lambda) = \sum_{\nu=1}^{m} y_\nu s_\nu(x, \lambda)$. Die reellen, selbstadjungierten Randbedingungen bei $x = b$ liefern m homogene Gleichungen für die $y_1, \ldots, y_m$. Die λ-Werte, für die die Determinante dieses Gleichungssystems verschwindet, sind dann die Eigenwerte des betrachteten selbstadjungierten Operators.

§ 3. Wesentliche Selbstadjungiertheit.

Es ist naheliegend[13]), die Schwierigkeiten, die sich durch das Singulärwerden der Koeffizienten von (1.1) an den Intervallenden bzw. infolge eines unbeschränkten Intervalles ergeben, dadurch zu umgehen, daß man den Operator D zunächst nur in dem engeren Raum

$\mathfrak{D}(.|.)$: 1. $u(x)$ aus $\mathfrak{D}$,
2. $u(x) = 0$ in individuellen Umgebungen von $x = a$ und $x = b$

betrachtet. Es ist zu untersuchen, inwieweit durch das Verhalten von D in $\mathfrak{D}(.|.)$ die selbstadjungierten Fortsetzungen von D_{ab} bestimmt sind. Hier soll nur festgestellt werden, unter welchen Voraussetzungen D in $\mathfrak{D}(.|.)$ „wesentlich selbstadjungiert" ist[14]). Zu diesem Zweck beweisen wir einen Hilfssatz, der auch im folgenden nützlich sein wird:

[12]) Diese Bedingung ist sicher erfüllt, falls $\tau_a = m$ ist oder falls $x = a$ eine Stelle der Bestimmtheit und zusätzlich $0 < \tau_a$ ist.

[13]) Siehe hierzu [15], § 1.

[14]) Ein in $\mathfrak{A}$ hermitescher Operator A heißt dort „wesentlich selbstadjungiert", falls sich A in $\mathfrak{A}$ durch Abschließen zu einem selbstadjungierten Operator fortsetzen läßt.

Hilfssatz 3.1: *Setzt man den Operator D in $\mathfrak{D}(.|.)$ durch Abschließen fort, so erhält man den Operator D_{ab}*[15]).

Beweis: D in $\mathfrak{D}(.|.)$ ist hermitesch. Da $\mathfrak{D}(.|.)$ in $\mathfrak{D}_{ab}$ liegt und $(D_{ab} - i)^{-1}$ beschränkt ist, langt es zu zeigen, daß $(D_{ab} - i)\,\mathfrak{D}(.|.)$ dicht in $(D_{ab} - i)\,\mathfrak{D}_{ab}$ liegt. Sind $\widetilde{w}_1(x, i), \ldots, \widetilde{w}_\tau(x, i)$ die τ in $\mathfrak{H}$ liegenden linear unabhängigen Lösungen von (1.1) für $\lambda = i$, so ist $(D_{ab} - i)\,\mathfrak{D}_{ab}$ der Unterraum aller $f(x)$ aus $\mathfrak{H}$ mit $\int_a^b f(y)\,\widetilde{w}_\nu(y, i)\,k(y)\,dy = 0$, $\nu = 1, \ldots, \tau$[16]).

Wir bestimmen nun $(D_{ab} - i)\,\mathfrak{D}(.|.)$. Sei $v(x)$ aus $\mathfrak{D}(.|.)$. $v(x)$ genügt daher allen Randbedingungen (1.21). Wir wählen für eine feste Randbedingung (1.21) gemäß (1.24) ein Fundamentalsystem $w_1(x,i), \ldots, w_{2m}(x,i)$ von (1.1) für $\lambda = i$. Dann gibt es nach (1.25) ein $g(x)$ aus $\mathfrak{H}$, so daß die Gleichungen

$$(3.1)\qquad \begin{aligned} v(x) &= \sum_{\nu=1,}^{m} \sum_{\mu=m+1}^{2m} F_{\nu\mu}(i) \Bigl(w_\mu(x, i) \int_a^x w_\nu(y, i)\, g(y)\, k(y)\, dy \,+ \\ &\qquad + w_\nu(x, i) \int_x^b w_\mu(y, i)\, g(y)\, k(y)\, dy \Bigr), \\ & L(v) - ikv = kg \end{aligned}$$

bestehen. Da $v(x)$ in $\mathfrak{D}(.|.)$ liegt und $k(x) > 0$ ist, folgt aus (3.1):

$$(3.2)\qquad g(x) = 0 \quad \text{für } a < x < a(v) \text{ und für } b(v) < x < b.$$

(3.1) und (3.2) liefern dann:

$$(3.3)\qquad \begin{aligned} 0 &= \sum_{\nu=1,}^{m} \sum_{\mu=m+1}^{2m} F_{\nu\mu}(i)\, w_\nu(x, i) \int_a^b w_\mu(y, i)\, g(y)\, k(y)\, dy \quad \text{für } a < x < a(v), \\ 0 &= \sum_{\nu=1,}^{m} \sum_{\mu=m+1}^{2m} F_{\nu\mu}(i)\, w_\mu(x, i) \int_a^b w_\nu(y, i)\, g(y)\, k(y)\, dy \quad \text{für } b(v) < x < b. \end{aligned}$$

(1.11) und die lineare Unabhängigkeit der Funktionen $w_1(x, i), \ldots, w_{2m}(x, i)$ führen dann von (3.3) zu

$$(3.4)\qquad \int_a^b w_\nu(y, i)\, g(y)\, k(y)\, dy = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, 2m.$$

Umgekehrt, erfüllt $g(x)$ aus $\mathfrak{H}$ die Bedingungen (3.2) und (3.4), so liegt die durch (3.1) definierte Funktion $v(x)$ in $\mathfrak{D}(.|.)$. Der Teilraum $(D_{ab} - i)\,\mathfrak{D}(.|.)$ von $\mathfrak{H}$ wird also durch (3.2) und (3.4) charakterisiert. Ergänzt man nun $\widetilde{w}_1(x, i), \ldots, \widetilde{w}_\tau(x, i)$ zu einem Fundamentalsystem $\widetilde{w}_1(x, i), \ldots, \widetilde{w}_{2m}(x, i)$, so ist

$$(3.5)\qquad \sum_{\nu=\tau+1}^{2m} c_\nu \widetilde{w}_\nu(x, i) \text{ nicht aus } \mathfrak{H} \text{ für } \sum_{\nu=\tau+1}^{2m} |c_\nu|^2 \neq 0.$$

---

15) Siehe hierzu auch die Bemerkungen von E. Heinz [8], S. 1. Dieser Hilfssatz findet sich auch bei E. A. Coddington, siehe [1], Theorem 2. Wir geben hier einen anderen Beweis.

Zusatz bei der Korrektur (am 26. 8. 55): Nachträglich entnehme ich dem Referat von E. A. Coddington (Math. Rev. **14**, 277 (1953)), daß in der Arbeit von M. A. Neumark „Über die Defektindizes linearer Differentialoperatoren" (Doklady Akad. Nauk SSSR N.S. **82**, 517—520 (1952)) ein entsprechender Satz steht.

16) Siehe [17] Theorem 9.5 oder [12], S. 38 oder [10], Theorem 3.5.

Man kann nun $(D_{ab}-i)\,\mathfrak{D}(.|.)$ auch folgendermaßen beschreiben:

$$(3.6)\qquad (D_{ab}-i)\,\mathfrak{D}(.|.):\quad \begin{array}{l} 1.\ g(x) \text{ aus } (D_{ab}-i)\,\mathfrak{D}_{ab}, \\ 2.\ g(x)=0 \text{ in individuellen Umgebungen von } x=a \\ \quad \text{und } x=b, \\ 3.\ \int_a^b g(y)\,\tilde{w}_\nu(y,i)\,k(y)\,dy=0,\ \nu=\tau+1,\ldots,2m. \end{array}$$

Durch eine leichte Abwandlung eines von H. O. CORDES stammenden Beweises[17]) können wir nun zeigen, daß $(D_{ab}-i)\,\mathfrak{D}(.|.)$ dicht in $(D_{ab}-i)\,\mathfrak{D}_{ab}$ liegt. Denn wäre diese Behauptung falsch, so gäbe es ein $f \neq 0$ aus $(D_{ab}-i)\mathfrak{D}_{ab}$ dergestalt, daß

$$(3.7)\qquad \int_a^b f(x)\,\overline{g(x)}\,k(x)\,dx=0 \quad \text{für alle } g(x) \text{ aus } (D_{ab}-i)\,\mathfrak{D}(.|.)$$

wäre. Ist nun Δ ein abgeschlossenes, in $a<x<b$ liegendes Intervall, dann liegen alle $g(x)$ aus $\mathfrak{H}$ mit $g(x)=0$ außerhalb Δ und $\int_\Delta g(x)\,\tilde{w}_\nu(x,i)\,k(x)\,dx=0$, $\nu=1,\ldots,2m$ in $(D_{ab}-i)$ $\mathfrak{D}(.|.)$. Nach (3.6) und (3.7) ist daher $f(x)=$ $=\sum_{\nu=1}^{2m} c_\nu\overline{\tilde{w}_\nu(x,i)}$ für alle x aus Δ. Der linearen Unabhängigkeit der $\tilde{w}_\nu(x,i)$ zufolge sind die c_ν von der speziellen Wahl von Δ unabhängig, es ist also $f(x)=$ $=\sum_{\nu=1}^{2m} c_\nu\,\overline{\tilde{w}_\nu(x,i)}$ für alle x aus $a<x<b$. Wegen (3.5) schließen wir auf $c_{\tau+1}=\cdots=c_{2m}=0$. Da aber f in $(D_{ab}-i)$ $\mathfrak{D}_{ab}$ liegt, ist dann auch $c_1=\cdots=c_\tau=0$, also $f=0$, Widerspruch!

Da nun D_{ab} genau dann selbstadjungiert ist, falls die Defektindizes (τ,τ) gleich 0 sind, ergibt sich auf Grund des soeben bewiesenen Hilfssatzes der

Satz 3.1: *Der Operator D in $\mathfrak{D}(.|.)$ ist genau dann wesentlich selbstadjungiert, falls $\tau=0$ ist*[18]).

Anmerkung: Man kann leicht zeigen, daß der Hilfssatz 3.1 und der Satz 3.1 richtig bleiben, wenn man $\mathfrak{D}(.|.)$ durch den engeren Raum $\tilde{\mathfrak{D}}(.|.)$ ersetzt, der aus $\mathfrak{D}(.|.)$ durch die zusätzliche Forderung, daß $u^{(2m)}(x)$ stückweise stetig in $a<x<b$ sein soll, entsteht.

§ 4. Einige Sätze über Halbbeschränktheit.

Wir verallgemeinern den Satz 4 aus [15] und beweisen den

Satz 4.1: *Es sei B in $\mathfrak{B}$ eine selbstadjungierte Fortsetzung von D_{ab}. B in $\mathfrak{B}$ ist genau dann nach unten halbbeschränkt*[19]), *falls D in $\mathfrak{D}(.|.)$ nach unten halbbeschränkt ist.*

Beweis: Wir benutzen die Schlußweise, die in [8] für den Fall $2m=2$ angewandt ist: Wegen Hilfssatz 3.1 ist D_{ab} genau dann nach unten halb-

[17]) Siehe [14], S. 49.

[18]) Siehe [15], Satz 1.

[19]) Ein in $\mathfrak{A}$ hermitescher Operator A heißt „nach unten halbbeschränkt", falls ein γ existiert, so daß $(Au,u)\geqq\gamma(u,u)$ gilt für alle u aus $\mathfrak{A}$.

beschränkt, falls D in $\mathfrak{D}(.|.)$ nach unten halbbeschränkt ist. D_{ab} besitzt endliche Defektindizes. Nach [8] Satz 1 ist damit alles bewiesen.

Speziell für den regulären Fall gilt der

Satz 4.2: *Es liege der reguläre Fall vor. Dann ist D in $\mathfrak{D}(.|.)$ genau dann nach unten halbbeschränkt, falls $(-1)^m p_0(x) > 0$ in $a \leqq x \leqq b$ gilt.*

Beweis[20]): Wir können uns auf den Fall $a = 0$, $b = 1$ beschränken. Es sei $(-1)^m p_0(x) > 0$. Für $u(x)$ aus $\mathfrak{D}(.|.)$ erhalten wir durch partielle Integration $(D_{01}u, u) = \sum\limits_{\nu=0}^{m} (-1)^{m-\nu} \int\limits_0^1 p_\nu(x)\, |u^{(m-\nu)}(x)|^2 dx$. Es gibt dann Konstante K, M, N, so daß die Ungleichungen $(-1)^m p_0(x) \geqq K > 0$, $|p_\nu(x)| \leqq M$, $\nu = 1, \ldots, m$ und $0 < k(x) \leqq N$ für $0 \leqq x \leqq 1$ bestehen. Unter Benutzung des Wirtingerschen Lemmas $\int\limits_0^1 |u^{(n)}(x)|^2 dx \geqq \int\limits_0^1 |u^{(n-1)}(x)|^2 dx$, $n = 1, \ldots, m$ erhalten wir dann

$$(D_{01}u, u) \geqq K \int\limits_0^1 |u^{(m)}(x)|^2 dx - m M \int\limits_0^1 |u^{(m-1)}(x)|^2 dx.$$

Mehrfache Anwendung der Schlußkette: partielle Integration, Schwarzsche Ungleichung, Wirtingersches Lemma liefert dann die Halbbeschränktheit nach unten von D in $\mathfrak{D}(.|.)$. Da D in $\mathfrak{D}(.|.)$ dann gewiß nicht nach oben halbbeschränkt ist, ist gezeigt, daß $(-1)^m p_0(x) > 0$ für Halbbeschränktheit nach unten nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig ist.

Für den Rest des Paragraphen machen wir die Voraussetzung $(-1)^m p_0(x) > 0$ in $a < x < b$.

Es gilt nun der folgende, eine Verallgemeinerung von Satz 2 d aus [15] darstellende

Satz 4.3: *D in $\mathfrak{D}(.|.)$ ist genau dann nach unten halbbeschränkt, falls D sowohl am rechten als auch am linken Ende nach unten halbbeschränkt ist.*

Beweis: Wir erinnern uns: D heißt „am linken Ende nach unten halbbeschränkt", falls es ein c_1 mit $a < c_1 < b$ gibt dergestalt, daß D in

$$\mathfrak{D}(a; c_1): \begin{array}{l} 1.\ u(x) \text{ aus } \mathfrak{D}(.|.), \\ 2.\ u(x) = 0 \text{ in } c_1 \leqq x < b \end{array}$$

nach unten halbbeschränkt ist. Man kann dann c_1 durch ein beliebiges c_1' mit $a < c_1' < c_1$ ersetzen. Entsprechend ist die Halbbeschränktheit nach unten am rechten Ende definiert.

Es sei D an beiden Enden nach unten halbbeschränkt. Wir betrachten D zunächst in dem engeren Teilraum

$$\mathfrak{D}(.c_1 \mid c_2.): \begin{array}{l} 1.\ u(x) \text{ aus } \mathfrak{D}(.\,|\,.), \\ 2.\ u(c_\nu) = \cdots = u^{(2m-1)}(c_\nu) = 0, \qquad a < c_1 < c_2 < b, \quad \nu = 1, 2. \end{array}$$

Nach Satz 4.2 und wegen der Voraussetzung ist dann D in $\mathfrak{D}(.c_1|c_2.)$ nach unten halbbeschränkt. Wir bestimmen die Adjungierte C in $\mathfrak{C}$ von D in $\mathfrak{D}(.c_1|c_2.)$ und finden:

[20]) Der Beweis stammt zum Teil von Herrn J. Moser.

$\mathfrak{C}$:
1. $g(x)$ aus $\mathfrak{H}$,
2. $g(x)$ besitzt jeweils in den Intervallen $a < x \leqq c_1, c_1 \leqq x \leqq c_2, c_2 \leqq x < b$ totalstetige Ableitungen bis zur Ordnung $(2m-1)$,
3. $\frac{1}{k} L(g)$ aus $\mathfrak{H}$

und $Cg = \frac{1}{k} L(g)$. C in $\mathfrak{C}$ besitzt i zum $(\tau_a + m + 2m + \tau_b + m)$-fachen Eigenwert. Der (reelle) Operator D in $\mathfrak{D}(.c_1|c_2.)$ besitzt also endliche Defektindizes. Nach [8] Satz 1 ist damit die Halbbeschränktheit nach unten von D in $\mathfrak{D}(.|.)$ nachgewiesen. — Ist D in $\mathfrak{D}(.|.)$ nach unten halbbeschränkt, so ist die Halbbeschränktheit an beiden Enden evident. Damit ist der Satz bewiesen.

Über Nichthalbbeschränktheit an einem Ende gibt der folgende Satz, der als Verallgemeinerung von [15] Satz 2b anzusehen ist, einige Auskunft:

Satz 4.4: *Zu jedem c aus $a < c < b$ und zu jedem $\alpha = \bar{\alpha}$ gebe es ein $\lambda < \alpha$, so daß die Differentialgleichung $L(u) - \lambda k u = 0$ eine Lösung $z(x, \lambda) \not\equiv 0$ besitzt, die in $a < x < c$ mindestens zwei Nullstellen m-ter Ordnung aufweist. Dann ist D nicht am linken Ende nach unten halbbeschränkt.*

Der Beweis verläuft analog dem in [15]. Für die dort auftretende Funktion $\xi(x)$ kann man hier ein Polynom $(6m-2)$-ten Grades in x heranziehen.

Um in einem konkreten Fall festzustellen, ob die Voraussetzungen von Satz 4.4 erfüllt sind, kann man folgendermaßen vorgehen: Man verschafft sich ein Fundamentalsystem $w_1(x, \lambda), \ldots, w_{2m}(x, \lambda)$ von $L(u) - \lambda k u = 0$. Genau dann gibt es offenbar eine derartige Lösung $z(x, \lambda) = a_1 w_1(x, \lambda) + \cdots + a_{2m} w_{2m}(x, \lambda)$, falls es für die Determinante

$$
\begin{aligned}
&\Delta(x, y, \lambda) = \det(d_{\nu\mu}(x, y, \lambda)), && \nu, \mu = 1, \ldots, 2m,\\
(4.1)\quad &d_{\nu\mu}(x, y, \lambda) = w_\mu^{(\nu-1)}(x, \lambda), && \nu = 1, \ldots, m,\ \mu = 1, \ldots, 2m,\\
&d_{\nu\mu}(x, y, \lambda) = w_\mu^{(\nu-m-1)}(y, \lambda), && \nu = m+1, \ldots, 2m,\ \mu = 1, \ldots, 2m
\end{aligned}
$$

zu jedem c aus $a < c < b$ und zu jedem $\alpha = \bar{\alpha}$ ein $\lambda < \alpha$ und ein Paar x_0, y_0 mit $a < x_0 < y_0 < 0$ gibt, so daß $\Delta(x_0, y_0, \lambda) = 0$ ausfällt.

§ 5. Grundbegriffe bei einer Stelle der Bestimmtheit.

Wir wollen im folgenden die besonderen Verhältnisse untersuchen, die auftreten, falls ein Intervallende, etwa $x = a$, eine Stelle der Bestimmtheit der Differentialgleichung (1.1) ist[21]). O.B.d.A. können wir $a = 0$ voraussetzen. Bei $x = 0$ liegt genau dann eine Stelle der Bestimmtheit vor, falls ein $\delta > 0$ existiert dergestalt, daß für $0 < x < \delta$ die Koeffizienten von (1.1) eine Entwicklung der Form

$$
(5.1)\quad p_\nu(x) = x^{\sigma-2\nu} \sum_{\mu=0}^{\infty} p_{\nu\mu} x^\mu, \quad \nu = 0, \ldots, m, \quad k(x) = x^{\sigma-2m} \sum_{\mu=0}^{\infty} k_\mu x^\mu,
$$
$$
p_{00} \neq 0, \quad \sigma = \bar{\sigma}
$$

[21]) Siehe [3] oder [7] oder [9].

besitzen. Bildet man $L(u) - \lambda ku$ für $u(x) = x^t$ und bezeichnet man den Koeffizienten der dabei auftretenden Potenz $x^{t-2m+\sigma}$ mit $P(t;\lambda)$, so ergibt sich:

$$P(t;\lambda) = \sum_{\nu=0}^{m-1} p_{\nu 0}\, t(t-1)\ldots(t-m+\nu+1)(t+\sigma-m-\nu)\ldots(t+\sigma-2m+1) + \\ + p_{m0} - \lambda k_0. \tag{5.2}$$

$P(t;\lambda)$ heißt das „charakteristische Polynom", es besitzt den Grad $2m$, seine Wurzeln nennt man die „charakteristischen Exponenten". Ist die durch

$$k_q \neq 0, \quad k_\mu = 0 \qquad \text{für } \mu < q \tag{5.3}$$

definierte Zahl q größer als Null, so ist $P(t;\lambda)$ und insbesondere die charakteristischen Exponenten von λ unabhängig.

Sind $t_0, \ldots, t_r$ Wurzeln[22]) von $P(t;\lambda)$ mit $t_s - t_{s+1} =$ ganze Zahl $\geqq 0$, $s = 0, \ldots, r-1$, die mit keinen anderen Wurzeln von $P(t;\lambda)$ ganzzahlige Differenzen bilden — und solche $r+1$-Wurzeln nennt man kurz eine „Wurzelgruppe Γ" — so gibt es nach G. Frobenius durch (1.1) bestimmte Funktionen $g_\mu(t;\lambda)$, $\mu = 0, \ldots$, die bei festem λ in einem die Punkte $t_0, \ldots, t_r$ enthaltenden Gebiet der t-Ebene regulär sind und die für $q > 0$ bei festem t Polynome in λ sind. Sie können so bestimmt werden, daß sie für reelles λ und reelles t selbst reell sind, was hier und im folgenden stets der Fall sein soll[23]). Nach G. Frobenius sind dann durch

$$\begin{aligned} g_0(x, t_0, \lambda) &= x^{t_0} \sum_{\mu=0}^{\infty} g_\mu(t_0, \lambda)\, x^\mu, \quad g_0(t_0, \lambda) \neq 0, \\ g_1(x, t_1, \lambda) &= x^{t_1} \sum_{\mu=0}^{\infty} g_\mu^{(1)}(t_1, \lambda)\, x^\mu + x^{t_1} \sum_{\mu=0}^{\infty} g_\mu(t_1, \lambda)\, x^\mu (\ln x), \\ &\vdots \\ g_r(x, t_r, \lambda) &= x^{t_r} \sum_{\mu=0}^{\infty} g_\mu^{(r)}(t_r, \lambda)\, x^\mu + \binom{r}{1} x^{t_r} \sum_{\mu=0}^{\infty} g_\mu^{(r-1)}(t_r, \lambda)\, x^\mu (\ln x) + \cdots \\ &\quad + \binom{r}{r} x^{t_r} \sum_{\mu=0}^{\infty} g_\mu(t_r, \lambda)\, x^\mu (\ln x)^r \;{}^{24)} \end{aligned} \tag{5.4}$$

in $0 < x < \delta$ gerade $r+1$ linear unabhängige Lösungen von (1.1) gegeben. Dabei kommt in $g_s(x, t_s, \lambda)$ die Potenz x^{t_s} auch wirklich vor, gegebenenfalls multipliziert mit einer Potenz von $(\ln x)$. Ist t_s eine $\varkappa$-fache Wurzel ($\varkappa > 0$) und $t_s = t_{s+1} = \cdots = t_{s+\varkappa-1}$, so wird für $x \to 0$:

$$\frac{(\ln x)\, g_{s+\gamma}(x, t_{s+\gamma}, \lambda)}{g_{s+\gamma+1}(x, t_{s+\gamma+1}, \lambda)} = O(1), \qquad \gamma = 0, \ldots, \varkappa - 2 \;{}^{25)}. \tag{5.5}$$

Die $2m$ charakteristischen Exponenten zerfallen in eine oder mehrere derartige Wurzelgruppen Γ, zu jedem Γ gehören entsprechende Lösungen (5.4), alle zusammen bilden ein Fundamentalsystem von (1.1) in $0 < x < \delta$ [26]).

---

[22]) Wobei jede Wurzel ihrer Vielfachheit entsprechend oft vorkommt.

[23]) Diese Voraussetzung dient nur der bequemeren Ausdrucksweise.

[24]) Dabei ist $g_\mu^{(s)}(t_\varrho, \lambda) = \left(\frac{\partial^s}{\partial t^s}(g_\mu(t, \lambda))\right)_{t = t_\varrho}$.

[25]) Mit O ist das Landau-Symbol gemeint.

[26]) Über die Gewinnung eines Fundamentalsystems durch Potenzreihenansatz siehe [7].

Aus der Frobeniusschen Darstellung folgt leicht, daß für $q > 0$ die Funktionen $g_0(t, \lambda), \ldots, g_{q-1}(t, \lambda)$ von λ unabhängig sind.

Satz 5.1: *Es sei $q > 0$. Dann sind die Lösungen (5.4) und ihre Ableitungen nach x ganze Funktionen in λ. (1.1) besitzt dann in $0 < x < b$ ein Fundamentalsystem $u_1(x, \lambda), \ldots, u_{2m}(x, \lambda)$, wobei die $u_\nu^{(\mu)}(x, \lambda)$, $\nu = 1, \ldots, 2m$, $\mu = 0, \ldots, 2m-1$ ganze Funktionen in λ sind und für $\mu = 0$ in $0 < x < \delta$ mit entsprechenden Lösungen (5.4) übereinstimmen.*[27])

Beweis: $P(t; \lambda)$ und die charakteristischen Exponenten sind von λ unabhängig. Daher kann man den Frobeniusschen Beweis leicht verschärfen und zeigen, daß $\sum\limits_{\mu=0}^{\infty} g_\mu(t, \lambda)\, x^\mu$ auch in jedem beschränkten Gebiet der λ-Ebene gleichmäßig in λ konvergiert. Daraus und aus den oben beschriebenen Eigenschaften der $g_\mu(t, \lambda)$ folgt, daß die Funktionen $\sum\limits_{\mu=0}^{\infty} g_\mu^{(\varrho)}(t_s, \lambda)\, x^\mu$, $s = 0, \ldots, r$, $\varrho = 0, \ldots$ für jedes x aus $0 \leqq x < \delta$ ganze Funktionen in λ sind. — Die zweite Behauptung folgt aus der ersten und aus der Tatsache, daß eine Lösung $u(x, \lambda)$ von (1.1), für die an einem Punkte a_1 mit $0 < a_1 < b$ die Größen $u(a_1, \lambda), \ldots, u^{(2m-1)}(a_1, \lambda)$ ganze Funktionen in λ sind, mitsamt ihren Ableitungen bis zur Ordnung $(2m-1)$ für alle x aus $0 < x < b$ eine ganze Funktion in λ ist.

Um weitere Aussagen machen zu können, die den Operator D betreffen, müssen wir $P(t; \lambda)$ und insbesondere die Zahl q etwas näher betrachten. Diesen Fragen wollen wir uns im folgenden Paragraphen zuwenden.

§ 6. Einige Eigenschaften der charakteristischen Exponenten.

Der Darstellung (5.2) von $P(t; \lambda)$ entnimmt man sofort die Gleichung:

$$P(t; \lambda) = P(2m - 1 - \sigma - t; \lambda). \tag{6.1}$$

$P(t; \lambda)$ ist also symmetrisch in bezug auf den Punkt $t = \frac{2m-1-\sigma}{2}$. Insbesondere liegen auch die Wurzeln von $P(t; \lambda)$ symmetrisch in bezug auf diesen Punkt, mit t ist auch $2m - 1 - \sigma - t$ eine Wurzel. Ist der Punkt $t = \frac{2m-1-\sigma}{2}$ selbst Wurzel, so ist ihre Vielfachheit eine gerade Zahl. Ist λ reell oder ist $q > 0$, so ist $P(t; \lambda)$ auch symmetrisch zur reellen Achse und damit auch symmetrisch in bezug auf die durch den Punkt $\frac{2m-1-\sigma}{2}$ gehende Parallele zur imaginären Achse (der t-Ebene). Diese Parallele wollen wir im folgenden stets kurz „Symmetriegerade" nennen.

Für die Wurzeln $t_1, \ldots, t_{2m}$ von $P(t; \lambda)$ $(t_j = t_j(\lambda))$ setzen wir $\mathrm{Re}(t_j) = r_j$, $j = 1, \ldots, 2m$, und wir wollen in diesem Paragraphen die Numerierung so vornehmen, daß gilt:

$$r_j \geqq r_{j+1}, \qquad j = 1, \ldots, 2m-1. \tag{6.2}$$

[27]) Siehe auch [11], S. 48. Wir machen hier keine Voraussetzungen über die Differenzen der charakteristischen Exponenten.

Dann ist wegen (6.1)

$$(6.3)\quad r_j \geqq \frac{2m-1-\sigma}{2},\ j=1,\ldots,m,\ r_j \leqq \frac{2m-1-\sigma}{2},\ j=m+1,\ldots,2m.$$

Für x^t wird (5.1) und (5.3) zufolge genau dann $\int_0^\delta x^{t+\bar{t}} k(x)\,dx < \infty$, falls

$$(6.4)\qquad \mathrm{Re}(t) > \frac{2m-1-\sigma-q}{2}$$

ist. Daran ändern auch etwa zu x^t hinzutretende Faktoren, die Potenzen von $(\ln x)$ sind, nichts. Die Anzahl der linear unabhängigen, links in $\mathfrak{H}$ liegenden Lösungen von (1.1) ist, da sich durch Linearkombinationen von Lösungen (5.4), deren charakteristische Exponenten im Realteil übereinstimmen, keine weiteren links in $\mathfrak{H}$ liegenden Lösungen ergeben (siehe dazu auch (5.5)), daher gegeben durch die Anzahl der t_j, die (6.4) befriedigen.

Unabhängig von der Glasman-Kodairaschen Theorie erhalten wir nun: Für $q=0$ gibt es wegen (6.3) höchstens m der Ungleichung (6.4) genügende t_j. Da für $q=0$ und für λ mit $Im(\lambda) \neq 0$ die Gleichung $P(t;\lambda)=0$ keine Lösung t mit $\mathrm{Re}(t) = \frac{2m-1-\sigma}{2}$ besitzt (für derartiges t ist nämlich, wie sofort aus (5.2) folgt, $P(t;\lambda) - \lambda k_0$ reell), schließen wir, daß dann genau m links in $\mathfrak{H}$ liegende Lösungen vorhanden sind. Aus $q=0$ folgt also $\tau_0 = 0$. — Hat hingegen (1.1) für *ein* reelles oder komplexes $\lambda = \lambda_0$ genau $m + \bar{\tau}_0(\lambda_0) > m$ linear unabhängige, links in $\mathfrak{H}$ liegende Lösungen, so ist nach (6.3) und (6.4) notwendig $q > 0$. Dann aber sind die charakteristischen Exponenten von λ unabhängig, (1.1) besitzt dann für *jedes* reelle oder komplexe λ genau $m + \bar{\tau}_0(\lambda_0)$ linear unabhängige, links in $\mathfrak{H}$ liegende Lösungen[27a]). Zusammenfassend erhalten wir den

Satz 6.1: *Die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen von* (1.1), *die links in $\mathfrak{H}$ liegen, ist gegeben durch die Anzahl der charakteristischen Exponenten t_j, die* (6.4) *genügen. Gibt es für ein $\lambda = \lambda_0$ genau $m + \bar{\tau}_0(\lambda_0) > m$ linear unabhängige, links in $\mathfrak{H}$ liegende Lösungen, so gibt es für jedes reelle oder komplexe λ genau $m + \bar{\tau}_0(\lambda_0)$ derartige Lösungen, es ist $\bar{\tau}_0(\lambda_0) = \tau_0$. — Aus $q = 0$ folgt $\tau_0 = 0$*[28]).

Der Fall $\tau_0 > 0$ ist für uns von besonderem Interesse, denn dann müssen bei $x = 0$ ja τ_0 Randbedingungen gestellt werden. In diesem Fall ist auch $q > 0$. Es ist dann angenehm, von vornherein zu wissen, welche Lösungen für die Formulierung der Randbedingungen bei $x = 0$ in Frage kommen. Um darüber Aussagen machen zu können, brauchen wir eine Abschätzung der Zahl q nach unten. Wegen (6.4) ist

$$(6.5)\qquad q > 2m-1-\sigma-2r_j,\qquad j=1,\ldots,m+\tau_0.$$

[27a]) *Zusatz bei der Korrektur (am 1. 9. 1955):* Nachträglich stelle ich fest, daß Johannes Nitsche im Abschnitt 7 seiner Arbeit „Über Systeme kanonischer Differentialgleichungen und das zugehörige singuläre Eigenwertproblem", Wiss. Zeitschr. d. Universität Leipzig, Jahrgang 1951/52, 193—226, kurz auf die Fälle $\tau_0 = 0$ und $\tau_0 = m$ eingeht und analoge Schlüsse durchführt. Jedoch weicht die dort angegebene Symmetrie der charakteristischen Exponenten, an die diese Schlüsse anknüpfen, von der aus (6.1) folgenden ab.

[28]) Aus $\tau_0 = 0$ folgt nicht $q = 0$.

Setzen wir nun $r_j - r_{j+1} = d_j$, $j = 1, \ldots, 2m-1$, so berechnen sich die r_j wegen (6.1) und (6.2) aus den Gleichungen

$$r_j + r_{2m+1-j} = 2m - 1 - \sigma, \quad r_j - r_{2m+1-j} = d_j + \cdots + d_{2m-j}, \qquad j = 1, \ldots, m$$

zu

$$\left.\begin{aligned} 2r_j &= 2m - 1 - \sigma + d_j + \cdots + d_{2m-j}, \\ 2r_{2m+1-j} &= 2m - 1 - \sigma - d_j - \cdots - d_{2m-j}, \end{aligned}\right\} \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Setzen wir nun $r_{m+\tau_0}$ in (6.5) ein, so erhalten wir

$$q > r_{m+1-\tau_0} - r_{m+\tau_0}. \tag{6.6}$$

Damit beweisen wir den

Satz 6.2: *Es sei $\tau_0 > 0$ und $\tau_b = m$*[29]*). Die zu den $m + \tau_0$ charakteristischen Exponenten $t_1, \ldots, t_{m+\tau_0}$ (in der Bezeichnungsweise von (6.2)) gehörenden, in Satz 5.1 beschriebenen Lösungen bilden ein im Sinne von Definition 2.2 bei $x = 0$ genormtes Lösungssystem.*

Beweis: Nach Satz 6.1 ist $q > 0$. Die in Satz 5.1 angegebenen Lösungen kann man nun wegen (5.4), (6.1), (6.2) und (6.4) folgendermaßen gliedern:

$$u_j(x, \lambda) = x^{t_j}(\ldots), \qquad j = 1, \ldots, 2m, \quad 0 < x < \delta,$$

$$\begin{aligned} &\frac{2m - 1 - \sigma + q}{2} \leqq r_j, \quad j = 1, \ldots, m - \tau_0, \\ &\frac{2m - 1 - \sigma - q}{2} \geqq r_j, \quad j = m + \tau_0 + 1, \ldots, 2m, \\ &\frac{2m - 1 - \sigma - q}{2} < r_j < \frac{2m - 1 - \sigma + q}{2}, \quad j = m - \tau_0 + 1, \ldots, m + \tau_0. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Dabei steht $(\ldots)$ für Summen von Potenzreihen in x, die gegebenenfalls noch mit Potenzen von $(\ln x)$ multipliziert sind. Dann liegen die Lösungen $u_1(x, \lambda), \ldots, u_{m+\tau_0}(x, \lambda)$ in $\mathfrak{H}$. Wir betrachten diese Lösungen in bezug auf ihr Verhalten bei $x \to 0$. Es gibt ein $\eta > 0$, so daß gilt:

$$u_j^{(n)}(x, \lambda) = O\left(x^{\frac{2m-1-\sigma-q-2n+2\eta}{2}}\right), \quad \begin{aligned} &n = 0, \ldots, 2m-1, \\ &j = m - \tau_0 + 1, \ldots, m + \tau_0. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Mit diesem $\eta > 0$ ist dann wegen (6.7):

$$u_j^{(n)}(x, \lambda) = O\left(x^{\frac{2m-1-\sigma+q-2n-\eta}{2}}\right), \quad \begin{aligned} &n = 0, \ldots, 2m-1, \\ &j = 1, \ldots, m - \tau_0. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Unter Benutzung von (1.4), (5.1), (6.8) und (6.9) erhalten wir dann durch den Grenzübergang $x \to 0$:

$$[u_\nu, u_\mu](x) = 0, \quad \nu = 1, \ldots, m - \tau_0, \quad \mu = 1, \ldots, m + \tau_0. \tag{6.10}$$

Die Schlüsse von § 2, die von (2.2) ausgehend die Beziehung (2.3) folgerten, führen von (6.10) zu $\det([u_\nu, u_\mu](x)) \neq 0$, $\nu, \mu = m - \tau_0 + 1, \ldots, m + \tau_0$. Nach (1.18) bilden diese $2\tau_0$ Lösungen also eine Basis mod$(\mathfrak{D}_0)$. Daher liegen nach (6.10) die Lösungen $u_1(x, \lambda), \ldots, u_{m-\tau_0}(x, \lambda)$ in $\mathfrak{D}_0$. Um nun nachzuweisen, daß die Anfangszahlen eines beliebigen $u(x)$ aus $\mathfrak{D}$ in bezug auf die Basis

[29]) Die Voraussetzung $\tau_b = m$ wird nur gestellt, um Funktionen aus $\mathfrak{D}$ zu erhalten. Die Formeln (6.7) bis (6.11) gelten auch, wenn man diese Voraussetzung fallen läßt.

$u_{m-\tau_0+1}(x, \lambda), \ldots, u_{m+\tau_0}(x, \lambda)$ von λ unabhängig sind, benutzen wir die Gleichungen (1.20), aus denen sich die Anfangszahlen in bezug auf eine beliebige Basis berechnen lassen. Da nach § 5 die Funktionen $g_0(t, \lambda), \ldots, g_{\varrho-1}(t, \lambda)$ von λ unabhängig sind, folgt wegen (5.4) und (6.7), daß die mit λ behafteten Glieder von $u_j^{(n)}(x, \lambda)$, $n = 0, \ldots, 2m-1$, $j = m - \tau_0 + 1, \ldots, m + \tau_0$ in ihrem Verhalten bei der Annäherung $x \to 0$ durch

$$O\left(x^{\frac{2m-1-\sigma+\varrho-2n+2\eta}{2}}\right)$$

charakterisiert sind. Die Schlüsse, die soeben (6.10) lieferten, ergeben dann die Aussagen:

(6.11) $[u_\nu, u_\mu](x)$ und $[u_\nu, \overline{u}_\mu](0)$ sind unabhängig von λ, $m - \tau_0 + 1 \leqq \nu, \mu \leqq m + \tau_0$.

Indem wir nun noch $u(x)$ aus $\mathfrak{D}$ mod$(\mathfrak{D}_0)$ durch eine Linearkombination der Funktionen $u_{m-\tau_0+1}(x, 0), \ldots, u_{m+\tau_0}(x, 0)$ darstellen, sehen wir sofort, daß auch $[u_\nu, u](0)$, $\nu = m - \tau_0 + 1, \ldots, m + \tau_0$ von λ unabhängig sind. Daher sind die Anfangszahlen von $u(x)$ in bezug auf diese Basis durch ein von λ unabhängiges Gleichungssystem bestimmt und damit selbst unabhängig von λ. Somit ist der Satz bewiesen.

Mit Schlüssen, die den zu (6.10) führenden entsprechen, beweisen wir den

Satz 6.3: *Es sei* $\tau_0 > 0$. $P(t; \lambda)$ *besitze höchstens zwei Wurzeln mit* $\mathrm{Re}(t) = \frac{2m-1-\sigma}{2}$, *die dann aber reell sein sollen*[30]). $u_1(x, \lambda), \ldots, u_{2m}(x, \lambda)$ *sei ein in Satz 5.1 beschriebenes und gemäß* (6.2) *numeriertes Fundamentalsystem*[31]) *von* (1.1). *Dann stellen die Randbedingungen* $[u_\nu, u](0) = 0$, $\nu = m - \tau_0 + 1, \ldots, m$ *für* $u(x)$ *aus* $\mathfrak{D}$ *ein System reeller, selbstadjungierter Randbedingungen bei* $x = 0$ *dar, das von* λ *unabhängig ist.*

Beweis: Da es sich ja nur um das Verhalten der Funktionen am linken Ende handelt, können wir o.B.d.A. zusätzlich $\tau_b = m$ voraussetzen. Nach Voraussetzung und nach (6.3) gibt es ein $\varkappa > 0$, so daß

$$\frac{2m-1-\sigma+\varkappa}{2} \leqq \mathrm{Re}(t_\nu), \quad \nu = m - \tau_0 + 1, \ldots, m-1, \quad \frac{2m-1-\sigma}{2} \leqq \mathrm{Re}(t_m)$$

ist. Die Gleichungen

$$[u_\nu, u_\mu](0) = [u_\nu, \overline{u}_\mu](0) = 0, \qquad \nu, \mu = m - \tau_0 + 1, \ldots, m \tag{6.12}$$

---

[30]) Läßt man diese Voraussetzung fallen, so liegen auf der Symmetriegeraden $2n$ Wurzeln, es gilt (siehe den folgenden Beweis): $[u_\nu, u_\mu](0) = [u_\nu, \overline{u}_\mu](0) = 0$, $\nu = 1, \ldots, m - n$, $\mu = 1, \ldots, m + n$. Daher und wegen (1.5) ist dann $\det([u_\nu, u_\mu](0)) \neq 0$, $\nu, \mu = m - n + 1, \ldots, m + n$. Der von den $2n$ Lösungen $u_{m-n+1}(x, \lambda), \ldots, u_{m+n}(x, \lambda)$ aufgespannte Raum ist (siehe § 5) für $\lambda = \overline{\lambda}$ reell. Wegen (6.11) gibt es daher linear unabhängige Linearkombinationen $\tilde{u}_{m-n+1}(x, \lambda), \ldots, \tilde{u}_m(x, \lambda)$ dieser $2n$ Lösungen, für die $[\tilde{u}_\nu, \tilde{u}_\mu](0) = [\tilde{u}_\nu, \overline{\tilde{u}}_\mu](0) = 0$, $\nu, \mu = m - n + 1, \ldots, m$ ausfällt. Die τ_0 Randbedingungen $[u_\nu, u](0) = 0$, $\nu = m - \tau_0 + 1, \ldots, m - n$, $[\tilde{u}_\mu, u](0) = 0$, $\mu = m - n + 1, \ldots, m$ bilden dann bei $x = 0$ ein reelles, selbstadjungiertes System von Randbedingungen, das von λ unabhängig ist.

[31]) Ist $t_m = \frac{2m-1-\sigma}{2}$, so ist durch (6.2) bzw. Satz 5.1 nicht festgelegt, welche der beiden zu $t_m = t_{m+1} = \frac{2m-1-\sigma}{2}$ gehörenden Lösungen $u_m(x, \lambda)$ ist. Der Satz gilt, für welche der beiden Lösungen man sich auch entscheidet.

erhalten wir im Falle $\mathrm{Re}(t_m) > \frac{2m-1-\sigma}{2}$ sämtlich, im Falle $t_m = \frac{2m-1-\sigma}{2}$ bis auf $[u_m, u_m](0) = [u_m, \bar{u}_m](0) = 0$ nach den zu (6.10) führenden Schlüssen. Ist $t_m = \frac{2m-1-\sigma}{2}$, so gilt trivialerweise $[u_m, u_m](0) = 0$. Nach § 5 ist ferner $u_m(x, 0) = \overline{u_m(x, 0)}$, nach (6.11) ist dann auch $[u_m, \bar{u}_m](0) = 0$ für jedes λ gültig. Nach (6.12), Satz 6.2 und (1.22) liegt also ein reelles, selbstadjungiertes System von Randbedingungen bei $x = 0$ vor, das, ebenfalls nach Satz 6.2, von λ unabhängig ist.

Ist zusätzlich $\tau_0 = m$, ist D in $\mathfrak{D}(.|.)$ nach unten halbbeschränkt und ist die Symmetriegerade frei von charakteristischen Exponenten, so stellt das eben angeführte System von Randbedingungen die „ausgezeichnete Randbedingung bei $x = 0$" dar, wie der folgende Satz lehrt. Wir bedienen uns dabei der von F. RELLICH in [15] eingeführten Definitionen.

Satz 6.4: *Zusätzlich zu den in Satz 6.3 gestellten Voraussetzungen wird vorausgesetzt, daß $\tau_0 = m$ ist, D in $\mathfrak{D}(.|.)$ nach unten halbbeschränkt und die Symmetriegerade frei von charakteristischen Exponenten ist. Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Räume*

	1. $v(x)$ *aus* $\mathfrak{D}$,			1. $v(x)$ *aus* $\mathfrak{D}$,	
$\mathfrak{A}$:	2. $[u_j, v](0) = 0$,	$j = 1, \ldots, m$,	$\mathfrak{B}$:	2. $[{}^0\Phi_j, v](0) = 0$,	$j = 1, \ldots, m$,
	3. $[{}^b\Phi_j, v](b) = 0$,	$j = 1, \ldots, \tau_b$,		3. $[{}^b\Phi_j, v](b) = 0$,	$j = 1, \ldots, \tau_b$,

wobei die durch die Φ gestellten Bedingungen jeweils Systeme reeller, selbstadjungierter Randbedingungen bei $x = 0$ bzw. $x = b$ seien. Es sei A der Operator D in $\mathfrak{A}$, B der Operator D in $\mathfrak{B}$. Dann ist im Sinne der Rellichschen Definition ([15] § 6 Def. 1) $A \geqq B$.

Beweis: A und B sind selbstadjungierte Operatoren. Nach Satz 7 aus [15] haben wir noch zu zeigen, daß D in dem $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gemeinsamen Teilraum

1. $v(x)$ aus $\mathfrak{D}$,

$\mathfrak{T}$: 2. $v(x) = 0$ in einer individuellen Umgebung von $x = 0$,

3. $[{}^b\Phi_j, v](b) = 0$, $j = 1, \ldots, \tau_b$,

in dem trivialerweise $(v, Av) = (v, Bv)$ gilt, „hinreichend selbstadjungiert" (im Sinne von [15] § 6 Def. 3) ist und A seine „zugehörige selbstadjungierte Fortsetzung" darstellt. Wir haben also zu beweisen: Zu jedem $v(x)$ aus $\mathfrak{A}$ gibt es eine Folge $v_n(x)$ aus $\mathfrak{T}$ mit $\lim_{n\to\infty} \|v - v_n\| = 0$ und $\lim_{n,n'\to\infty} (v_n - v_{n'}, D(v_n - v_{n'})) = 0$.

Wir betrachten zunächst den Fall, in dem $Im(\lambda) \neq 0$ ist. Für den Raum $\mathfrak{A}$ wählen wir gemäß (2.6) ein Fundamentalsystem $w_1(x, \lambda), \ldots, w_{2m}(x, \lambda)$ von (1.1) mit $w_j(x, \lambda) = u_j(x, \lambda)$, $j = 1, \ldots, m$. Die $w_{m+1}(x, \lambda), \ldots, w_{2m}(x, \lambda)$ sind dann geeignete Linearkombinationen der $u_1(x, \lambda), \ldots, u_{2m}(x, \lambda)$. Da kein charakteristischer Exponent den Realteil $(2m - 1 - \sigma)/2$ besitzt und da $\tau_0 = m$ ist,

gibt es nach (6.3) und (6.4) ein $\eta > 0$, so daß für $x \to 0$ gilt:

$$\text{(6.13)}\quad \begin{aligned} w_j^{(s)}(x,\lambda) &= O\left(x^{\frac{2m-1-\sigma-2s+\eta}{2}}\right), \quad j = 1,\ldots,m, \\ w_j^{(s)}(x,\lambda) &= O\left(x^{\frac{2m-1-\sigma-2s+\eta-\varrho}{2}}\right), \quad j = m+1,\ldots,2m. \end{aligned} \qquad s = 0,\ldots,2m-1,$$

Nach (1.25) gibt es zu $v(x)$ aus $\mathfrak{A}$ ein $f(x)$ aus $\mathfrak{H}$ mit:

$$v^{(s)}(x) = \sum_{\nu=1,}^{m} \sum_{\mu=m+1}^{2m} F_{\nu\mu}(\lambda)\left(w_\mu^{(s)}(x,\lambda)\int_b^x w_\nu(y,\lambda)\,f(y)\,k(y)\,dy + {}'w_\nu^{(s)}(x,\lambda)\int_x^b w_\mu(y,\lambda)\,f(y)\,k(y)\,dy\right), \qquad s = 0,\ldots,2m-1.$$

Wegen (6.13) und (5.1) folgt daraus für $x \to 0$:

$$\text{(6.14)}\qquad v^{(s)}(x) = O\left(x^{\frac{2m-1-\sigma-2s+\eta}{2}}\right), \qquad s = 0,\ldots,2m-1.$$

Von (6.14) und (5.1) schließen wir auf

$$\text{(6.15)}\qquad \int_0^{b/2}\left(\sum_{\nu=0}^{m}|p_\nu(x)|\cdot|v^{(m-\nu)}(x)|^2\right)dx < \infty \text{ [32]}.$$

Nun definieren wir die Folge $v_n(x)$ durch

$$\text{(6.16)}\quad v_n(x):\ \begin{cases} = 0 \quad\text{in}\quad 0 < x < \frac{1}{n}, \\ = n^{2m}\left(x-\frac{1}{n}\right)^{2m}\sum\limits_{j=0}^{2m-1} a_j n^j\left(x-\frac{2}{n}\right)^j \sum\limits_{s=0}^{2m-1}\frac{1}{s!}\,v^{(s)}\left(\frac{2}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)^s \\ \qquad \text{in}\ \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \text{ [33]}, \\ = v(x) \quad\text{in}\quad \frac{2}{n} < x < b. \end{cases}$$

Dann liegt $v_n(x)$ in $\mathfrak{T}$. Wegen $\eta > 0$, (5.1) und (6.14) wird dann $\lim\limits_{n\to\infty}\|v - v_n\| = 0$.
Die Formeln (5.1), (6.14), (6.15) und (6.16) ergeben

$$\lim_{n,n'\to\infty}(v_n - v_{n'}, D(v_n - v_{n'})) = \lim_{n,n'\to\infty}\int_0^{b/2}\left(\sum_{\nu=0}^{m}(-1)^{m-\nu}\,p_\nu(x)\,|v_n^{(m-\nu)}(x) - v_{n'}^{(m-\nu)}(x)|^2\right)dx = 0.$$

Damit ist der Satz für alle nicht-reellen λ bewiesen. Nach Satz 6.3 sind die Randbedingungen $[u_j, v](0) = 0$, $j = 1,\ldots,m$ von λ unabhängig, also gilt der Satz auch für alle reellen λ.

Ist $x = 0$ ein reguläres Ende (in diesem Fall sind $2m-1,\ldots,0$ die charakteristischen Exponenten), so ist die ausgezeichnete Randbedingung bei $x = 0$ offenbar äquivalent mit den Bedingungen $v(0) = v^{(1)}(0) = \cdots = v^{(m-1)}(0) = 0$ (siehe dazu auch S. 119).

---

[32]) Siehe hierzu [15], S. 344.

[33]) Die a_j sind von n unabhängige Konstante, sie sind so gewählt, daß für $g(x) = (x-1)^{2m}\sum\limits_{j=0}^{2m-1} a_j(x-2)^j$ gilt: $g(2) = 1$, $g^{(s)}(2) = 0$, $s = 1,\ldots,2m-1$.

Wir wollen uns zum Abschluß noch kurz der Frage nach der Halbbeschränktheit an einer Stelle der Bestimmtheit zuwenden. Nach [15] Satz 2b und Hilfssatz 2 wissen wir: Für $2m = 2$ und $p_0(x) < 0$ ist der zu (1.1) und (5.1) gehörende Operator D genau dann bei $x = 0$ nicht nach unten halbbeschränkt, falls es zu jedem reellen α ein $\lambda < \alpha$ gibt, für welches $P(t; \lambda)$ nicht-reelle Wurzeln besitzt. Das kann nur dann eintreten, falls $k_0 = 0$ ist, wenn also $q > 0$ ist und damit die charakteristischen Exponenten von λ unabhängig sind, wie man leicht der Gleichung $P(t; \lambda) = 0$ entnimmt. Hat $P(t; \lambda)$ dann nicht-reelle Wurzeln, so liegen diese auf der Symmetriegeraden.

Die folgenden Ausführungen sollen für den Fall $2m > 2$, $(-1)^m p_0(x) > 0$, $q > 0$ [34]) zeigen, daß allein das Auftreten nicht-reeller charakteristischer Exponenten für Nicht-Halbbeschränktheit bei $x = 0$ nicht hinreichend ist, sie sollen als wahrscheinlich erscheinen lassen, daß die Existenz nicht-reeller charakteristischer Exponenten auf der Symmetriegeraden für Nicht-Halbbeschränktheit eine notwendige Voraussetzung ist.

Zunächst beweist man durch partielle Integration, Schwarzsche Ungleichung und Induktion für $u(x)$ aus $\mathfrak{D}(.|.)$:

$$\text{(6.17)}\quad \frac{((1-\sigma)(3-\sigma)\dots(2n-1-\sigma))^2}{4^n}\int_0^b x^\sigma \frac{|u(x)|^2}{x^{2n}}\,dx \leqq \int_0^b x^\sigma\, |u^{(n)}(x)|^2\,dx\ {}^{35)},$$

$$n = 1, \dots, m.$$

Für $\sigma = 1, 3, \dots, 2n-1$ ist die damit gemachte Aussage leer. Man kann zeigen, daß die für $u(x)$ aus $\mathfrak{D}(.|.)$ geltende, bei der Herleitung von (6.17) mehrfach zu benutzende Ungleichung

$$\text{(6.18)}\quad \int_0^b x^\sigma \frac{|u^{(\nu)}(x)|\,|u^{(\nu+1)}(x)|}{x^{2n-2\nu-1}}\,dx \leqq \left(\int_0^b x^\sigma \frac{|u^{(\nu)}(x)|^2}{x^{2n-2\nu}}\,dx \int_0^b x^\sigma \frac{|u^{(\nu+1)}(x)|^2}{x^{2n-2\nu-2}}\,dx\right)^{1/2}$$

$$\nu = 0, \dots, n-1,\quad n = 1, \dots, m.$$

für $\sigma = 0$ „scharf" ist. Das soll heißen: Fügt man der linken Seite von (6.18) einen Faktor $(1+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ hinzu, so gibt es zu vorgegebenem $c > 0$ ein $v(x)$ aus $\mathfrak{D}(.|.)$ mit $v(x) = 0$ in $c \leqq x < b$, für welches die Ungleichung (6.18) dann falsch wird. Daraus folgt, daß auch (6.17) in diesem Sinne „scharf" ist.

Wir betrachten nun den zur Differentialgleichung

$$\text{(6.19)}\quad L(u) = (-1)^m u^{(2m)}(x) + \frac{p_{m0}}{x^{2m}}\,u(x) = \lambda\, u(x), \qquad 0 < x \leqq 1,\ p_{m0} = \text{const}$$

gehörenden Differentialoperator. Wir setzen zur Abkürzung $-\dfrac{(1\cdot 3\cdots(2m-1))^2}{4^m} = Q$. Aus (6.17) folgt dann (hier ist $\sigma = 0$), daß der Operator $Du = L(u)$ in $\mathfrak{D}(.|.)$ für $p_{m0} \geqq Q$ nach unten halbbeschränkt ist. Da (6.17) scharf ist, wird D in $\mathfrak{D}(.|.)$ für $p_{m0} < Q$ nach unten nicht-halbbeschränkt.

[34]) Ist $2m > 2$, $(-1)^m p_{0\sigma} > 0$ und $q = 0$, so kann man mit Hilfe der Ungleichung (6.17) für $\sigma \neq 1, 3, \dots, 2m-1$ auf einem Wege, der dem zum Beweis von Satz 4.2 benutzten entspricht, zeigen, daß D bei $x=0$ nach unten halbbeschränkt ist. An die Stelle des dort benutzten Wirtingerschen Lemmas tritt hier die Ungleichung (6.17) bzw. entsprechende Ungleichungen.

[35]) Siehe dazu auch [16], S. 99.

Wie hängt nun dieser Sachverhalt mit den zugehörigen charakteristischen Exponenten, d. h. den Wurzeln von $P(t;\lambda) = (-1)^m t(t-1)\ldots(t-2m+1) + p_{m0} = 0$ zusammen? Indem man die Substitution $t = s + (2m-1)/2$ durchführt, prüft man leicht folgendes nach: Für $p_{m0} > Q$ besitzt $P(t;\lambda)$ auf der Symmetriegeraden $\operatorname{Re}(t) = \frac{2m-1}{2}$ keine Nullstellen. Für hinreichend große p_{m0} und gerades m gibt es keine reellen Nullstellen. Ist $p_{m0} = Q$, so hat $P(t;\lambda)$ auf der Symmetriegeraden nur die doppelte Nullstelle $t_m = t_{m+1} = (2m-1)/2$. Für $p_{m0} < Q$, und genau dann liegt ja Nicht-Halbbeschränktheit vor, gibt es auf der Symmetriegeraden außer zwei einfachen, nicht-reellen Wurzeln $t_m = \frac{2m-1}{2} + i\varrho$, $t_{m+1} = \frac{2m-1}{2} - i\varrho$ keine weiteren Wurzeln.

Ersetzt man in (6.19) die Konstante p_{m0} durch eine in $0 \leq x \leq 1$ konvergente Potenzreihe $p_{m0} + p_{m1}x + \cdots$, so folgt aus dem oben Gesagten mit Hilfe von Satz 4.3 leicht, daß der zugehörige Operator D in $\mathfrak{D}(.|.)$ für $p_{m0} > Q$ nach unten halbbeschränkt, für $p_{m0} < Q$ nicht nach unten halbbeschränkt ist.

Für die Ordnung $2m = 4$ können wir etwas allgemeinere Aussagen über Nicht-Halbbeschränktheit des Operators $Du = \frac{1}{k(x)}\big((p_0(x)\,u^{(2)}(x))^{(2)} + (p_1(x)\,u^{(1)}(x))^{(1)} + p_2(x)\,u(x)\big)$ bei $x = 0$ auf Grund von Satz 4.4 machen, wobei wir (siehe Satz 4.2) die Voraussetzung $p_0(x) > 0$ verabreden. Ferner wollen wir voraussetzen, daß $q > 0$[36]) ist und daß es genau zwei reelle charakteristische Exponenten gibt. Die anderen beiden, nicht-reellen Exponenten liegen dann auf der Geraden $\operatorname{Re}(t) = \frac{3-\sigma}{2}$, die t_j haben also die Form:

$$t_1 = \frac{3-\sigma}{2} + \alpha,\quad t_2 = \frac{3-\sigma}{2} + i\beta,\quad t_3 = \bar{t}_2,\quad t_4 = \frac{3-\sigma}{2} - \alpha,\quad \alpha \geq 0,\ \beta > 0.$$

Da die Lösung $z(x,\lambda)$ und die Funktion $x^{-(3-\sigma)/2}z(x,\lambda)$ in $0 < x < b$ die gleichen Nullstellen (einschließlich Vielfachheit) besitzen, können wir o.B.d.A. annehmen, daß für $\lambda = \bar{\lambda}$ ein Fundamentalsystem der Form

$$y_1 = x^\alpha(1+\cdots),\quad y_2 = x^{i\beta}(1+\cdots),\quad y_3 = \overline{y_2},\quad y_4 = x^{-\alpha}(1+\cdots) + \gamma\, y_1(\ln x)\ ^{37)}$$

vorliegt. Wir betrachten die Fälle $\alpha > 0$ und $\alpha = 0$ gesondert:

$\alpha > 0$: Wir gehen zu reellen Lösungen über und erhalten für $x \to 0$:

$$\begin{aligned}
w_1 &= x^\alpha + O(x^{\alpha+1}), & w_1^{(1)} &= \alpha\, x^{\alpha-1} + O(x^\alpha),\\
w_2 &= \cos(\beta\ln x) + O(x), & w_2^{(1)} &= -\beta\, x^{-1}\sin(\beta\ln x) + O(1),\\
w_3 &= \sin(\beta\ln x) + O(x), & w_3^{(1)} &= \beta\, x^{-1}\cos(\beta\ln x) + O(1),\\
w_4 &= x^{-\alpha} + O(x^{-\alpha+1/2}), & w_4^{(1)} &= -\alpha\, x^{-\alpha-1} + O(x^{-\alpha-1/2}),
\end{aligned}$$

Für die unter (4.1) angegebene Determinante erhält man dann

$$\begin{aligned}
xy\,\Delta(x,y,\lambda) = &-4\alpha\beta + (\beta^2-\alpha^2)(x^\alpha y^{-\alpha} - x^{-\alpha}y^\alpha)\sin\left(\beta\ln\frac{x}{y}\right) +\\
&+ 2\alpha\beta(x^\alpha y^{-\alpha} + x^{-\alpha}y^\alpha)\cos\left(\beta\ln\frac{x}{y}\right) +\\
&+ O(x^{1/2}) + O(y^{1/2}) + O(x^\alpha)\,O(y^{-\alpha+1/2}) + O(x^{-\alpha+1/2})\,O(y^\alpha) +\\
&+ O(x^{\alpha+1})\,O(y^{-\alpha}) + O(x^{-\alpha})\,O(y^{\alpha+1}).
\end{aligned}$$

[36]) Ist $q = 0$, also $k_0 > 0$, so sind für negative λ mit hinreichend großem Absolutbetrag alle Exponenten nicht-reell, keiner liegt auf der Symmetriegeraden, wie man leicht nachprüft.

[37]) Ist $\gamma \neq 0$ und $\alpha > 0$, so ist notwendig $\alpha \geq 1/2$.

$\alpha = 0$: Wir gehen wieder zu reellen Lösungen über und erhalten durch geeignete Linearkombinationen für $x \to 0$:

$$\begin{aligned} w_1 &= 1 + O(x), & w_1^{(1)} &= O(1),\\ w_2 &= \ln x + O(x^{1/2}), & w_2^{(1)} &= x^{-1} + O(x^{-1/2}),\\ w_3 &= \cos(\beta \ln x) + O(x), & w_3^{(1)} &= -\beta\, x^{-1} \sin(\beta \ln x) + O(1),\\ w_4 &= \sin(\beta \ln x) + O(x), & w_4^{(1)} &= \beta\, x^{-1} \cos(\beta \ln x) + O(1) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x y\, \Delta(x, y, \lambda) = \beta \left(2 - 2 \cos\left(\beta \ln \frac{x}{y}\right) - \beta \left(\ln \frac{x}{y}\right) \sin\left(\beta \ln \frac{x}{y}\right)\right) + \\ + O(x^{1/2}) + O(y^{1/2}) + (\ln x)\, O(y) + (\ln y)\, O(x). \end{aligned}$$

In beiden Fällen kann man zu jedem $c > 0$ (und zu jedem reellen λ) ein x_0 und ein y_0 mit $0 < x_0 < y_0 < c$ finden dergestalt, daß $\Delta(x_0, y_0, \lambda) = 0$ wird. Nach Satz 4.3 liegt also Nicht-Halbbeschränktheit bei $x = 0$ vor.

Literatur.

[1] Coddington, E. A.: The spectral representation of ordinary self-adjoint differential operators. Ann. of Math., Second Ser. **60**, 192—211 (1954). — [2] Friedrichs, K.: Über die ausgezeichnete Randbedingung in der Spektraltheorie der halbbeschränkten gewöhnlichen Differentialoperatoren zweiter Ordnung. Math. Ann. **112**, 1—23 (1936). — [3] Frobenius, G.: Über die Integration linearer Differentialgleichungen durch Reihen. J. f. reine u. angew. Math. **76**, 214—235 (1873). — [4] Glasman, I. M.: On the Theory of Singular Differential Operators. (Uspehi Math. Nauk (N.S.), no. 6 (40), 102—135 (1950)); Amer. Math. Soc., Translation Number 96. — [5] Hartman, Ph.: Differential equations with non-oscillatory eigenfunctions. Duke Math. J. **15**, 697—709 (1948). — [6] Hartman, Ph., and A. Winter: On the orientation of unilateral spectra. Amer. J. of Math. **70**, 309—316 (1948). — [7] Heffter, L.: Einleitung in die Theorie linearer Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variablen. Leipzig 1894. — [8] Heinz, E.: Zur Theorie der Hermiteschen Operatoren des Hilbertschen Raumes. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen **1951**, Nr. 2. — [9] Horn, J.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Berlin 1948. — [10] Kodaira, K.: On ordinary differential equations of any even order and the corresponding eigenfunction expansions. Amer. J. of Math. **72**, 502—544 (1950). — [11] Meixner, J., u. F. W. Schäfke: Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen. Berlin 1954. — [12] Nagy, B. v. Sz.: Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes. Erg. Math. **5**, 414—496 (1942). — [13] Rellich, F.: Die zulässigen Randbedingungen bei den singulären Eigenwert-Problemen der mathematischen Physik (Gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung). Math. Z. **49**, 702—723 (1943—44). [14] Rellich, F.: Spectral-Theory of a Second Order Ordinary Differential Operator. Vorlesungsausarbeitung New York 1950. — [15] Rellich, F.: Halbbeschränkte gewöhnliche Differentialoperatoren zweiter Ordnung. Math. Ann. **122**, 343—368 (1951). — [16] Rellich, F.: New Results in the Perturbation Theory of Eigenvalue Problems. Proceedings of a symposium held August 23—25 1951 in Los Angeles, California, S. 95—99. [17] Stone, M. H.: Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis. New York 1932. — [18] Weyl, H.: Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen. Math. Ann. **68**, 220—269 (1910).

(Eingegangen am 5. März 1955.)

KLINGEN, H.
Math. Annalen, Bd. 130, S. 137—146 (1955).

Diskontinuierliche Gruppen in symmetrischen Räumen. II *).

Von
HELMUT KLINGEN in Göttingen.

Beispiele von diskontinuierlichen Gruppen.

Es werden die Bezeichnungen aus Teil I [3][1]) dieser Arbeit übernommen, die als bekannt vorausgesetzt wird. Dort wurden die ersten drei CARTANschen Typen von irreduziblen beschränkten symmetrischen Gebieten behandelt:

$$\mathfrak{H}_1 : \frac{1}{2i}(Z-\bar{Z}) > 0;\ \mathfrak{H}_2 : \frac{1}{2i}(Z-\bar{Z}) > 0,\ Z'Z = -E;\ \mathfrak{H}_3 : \frac{1}{2i}(Z-\bar{Z}) > 0,\ Z' = Z.$$

Wir bestimmten in Teil I die vollen Gruppen der eineindeutigen analytischen Abbildungen dieser Gebiete auf sich, führten eine Riemannsche Metrik ein, studierten die geometrischen Eigenschaften und betrachteten diskontinuierliche Gruppen von Abbildungen dieser Gebiete auf sich.

Das Verfahren aus Teil I, § 4 zur Untersuchung diskontinuierlicher Gruppen ist in konkreten Fällen nicht sehr fruchtbringend. Vor allem läßt sich die Frage, ob es sich um Gruppen der ersten Art handelt, nicht einfach entscheiden. Es ist daher wünschenswert, andere Methoden zur Behandlung diskontinuierlicher Gruppen zu kennen. Wir werden mit Hilfe der Theorie der Einheiten gewisser indefiniter Hermitescher Formen in einer imaginär-quadratischen Erweiterung eines endlichen total-reellen algebraischen Zahlkörpers für alle drei Typen einen Weg aufweisen. Im wesentlichen werden wir die volle Einheitengruppe dieser Hermiteschen Formen untersuchen. Sie liefert uns diskontinuierliche Gruppen für den ersten Typus. Indem wir diejenigen Untergruppen betrachten, die einen der Teilräume $\mathfrak{H}_2$ und $\mathfrak{H}_3$ auf sich abbilden, erhalten wir diskontinuierliche Gruppen für den zweiten und dritten Typus. Mit Hilfe der HUMBERTschen Reduktionstheorie der positiv definiten Formen in einem endlichen algebraischen Zahlkörper werden wir auf zahlentheoretische Weise einen Fundamentalbereich für unsere Gruppen angeben. Speziell sind die Modulgruppen unter den betrachteten Gruppen enthalten.

Satz 1: *Es sei $H^{(2n)}$ eine Hermitesche Matrix, $G^{(2n)}$ sei nichtsingulär und symmetrisch bzw. alternierend. Die Bedingung $\bar{H}\,\bar{G}^{-1}H = -G'$ ist notwendig und hinreichend für die Existenz einer Matrix C, für die*

$$H\{C\} = i\,I, \qquad G[C] = E \text{ bzw. } I.$$

Beweis: Für alternierendes G haben wir gerade Lemma 3 von C. L. SIEGEL [4]. Für symmetrische G müssen wir den Beweis auf eine andere Art erbringen. Trivialerweise ist die Bedingung notwendig. Wir zeigen, daß sie auch hinreichend ist. Man kann annehmen, daß $G = E$. Sei $H = S + i\,R$

*) Diese Arbeit enthält den zweiten Teil meiner Dissertation, die von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Göttingen angenommen wurde.

[1]) Siehe Literaturverzeichnis.

mit reellen Matrizen S und R. Da $H\bar{H} = -E$, gilt $RS = SR$. Es ist $|R| \neq 0$, denn sonst gäbe es eine reelle orthogonale Matrix O_1, so daß

$$R[O_1] = \begin{pmatrix} R_1^{(2r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad |R_1| \neq 0.$$

Wegen der Vertauschbarkeit von R und S hat $S[O_1]$ die Gestalt

$$S[O_1] = \begin{pmatrix} S_1^{(2r)} & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}.$$

Da $H\bar{H} = -E$, würde folgen: $S_2^2 = -E$. — Wir wollen zunächst zeigen, daß es eine reelle orthogonale Matrix O gibt, so daß

$$(1) \qquad R[O] = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}, \quad S[O] = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix}$$

mit einer positiv definiten Diagonalmatrix D und einer weiteren Diagonalmatrix D_1. Es gibt wegen der Vertauschbarkeit von R und S eine unitäre Matrix $U = (U_1^{(2n,n)} *)$, so daß

$$iR\bar{U} = \bar{U}\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & -D \end{pmatrix}, \quad S\bar{U} = \bar{U}\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix};$$

D_2 ist eine Diagonalmatrix, $D > 0$. Sei $\bar{U}_1 = X + iY$ mit reellen X und Y. Dann gilt

$$X'X + Y'Y = E, \qquad X'Y - Y'X = 0,$$
$$RX = YD, \qquad SX = XD_1,$$
$$RY = -XD, \qquad SY = YD_1.$$

Da $D > 0$, ist $O = \sqrt{2}\,(Y\ X)$ orthogonal, und es folgt (1). Wir können also annehmen, daß

$$H = \begin{pmatrix} D_1 & iD \\ -iD & D_1 \end{pmatrix}, \quad D^2 - D_1^2 = E.$$

Seien

$$A = 2^{-1/2}(E + D)^{1/2}, \qquad B = \frac{1}{2} D_1 A^{-1}, \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} -A & -iB \\ iB & -A \end{pmatrix},$$

dann ist

$$i\,I\{C^{-1}\} = \begin{pmatrix} 2AB & i(A^2 + B^2) \\ -i(A^2 + B^2) & 2AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & iD \\ -iD & D_1 \end{pmatrix} = H, \qquad C'C = E,$$

und es folgt Satz 1.

Es sei K ein total-reeller algebraischer Zahlkörper vom Grade h über dem Körper der rationalen Zahlen P. $K = K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots, K^{(h)}$ seien die Konjugierten von K über P. r sei eine total-positive ganze Zahl aus K, $K_0 = K(\sqrt{-r})$. Mit $\mathfrak{o}_{K_0}$ bezeichnen wir den Ring der ganzen Zahlen aus K_0.

H sei eine $2n$-reihige Hermitesche Matrix aus K_0 von der Signatur (n, n). Unter der Einheitengruppe $\Lambda(H)$ verstehen wir die Gesamtheit der ganzen Matrizen U aus K_0, für die

$$H\{U\} = H.$$

Ist zusätzlich noch eine nichtsinguläre symmetrische bzw. alternierende Matrix G aus K_0 gegeben, so daß

$$(2) \qquad \bar{H}G^{-1}H = -sG'$$

mit positivem skalarem s, so sei $\Lambda(H, G)$ die Untergruppe derjenigen U von $\Lambda(H)$, für die $G[U] = G$. Nach Satz 1 gibt es ein C, so daß

$$H\{C\} = i\,I,\; G[C] = s^{-1/2}E \quad \text{bzw.} \quad s^{-1/2}I.$$

Die Bedingungen $H\{U\} = H$ und $G[U] = G$ besagen für die Matrizen $M = C^{-1}UC$

$$I\{M\} = I \quad \text{und} \quad E[M] = E \quad \text{bzw.} \quad I[M] = I.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\Lambda_0(H) &= C^{-1}\Lambda(H)\,C \subset \Omega_1,\\
\Lambda_0(H,G) &= C^{-1}\Lambda(H, G)\,C \subset \Omega_2 \text{ für symmetrisches } G,\\
\Lambda_0(H,G) &= C^{-1}\Lambda(H, G)\,C \subset \Omega_3 \text{ für alternierendes } G.
\end{aligned}$$

Die entsprechenden Abbildungsgruppen seien $\Delta(H)$ und $\Delta(H, G)$. Die Matrix C ist eindeutig festgelegt bis auf einen beliebigen rechtsseitigen Faktor aus Ω_ν.

Wir werden uns im wesentlichen mit der vollen Einheitengruppe $\Lambda(H)$ Hermitescher Matrizen aus K_0 von der Signatur (n, n) beschäftigen. Für diejenigen H, die (2) genügen, betrachten wir $\Lambda(H, G)$. $\Delta(H, G)$ besteht auf Grund von Teil I, Satz 1 aus der Gesamtheit aller Elemente von $\Delta(H)$, die einen der Teilräume $\mathfrak{H}_2$ oder $\mathfrak{H}_3$ auf sich abbilden, je nachdem G symmetrisch oder alternierend ist.

Da aH, aG für natürliche Zahlen a die gleichen Gruppen liefern wie H, G, können wir annehmen, daß H, G ganz sind. Damit wir zu diskontinuierlichen Gruppen gelangen, machen wir die wesentliche Annahme, daß alle Konjugierten von H außer H und $\bar{H}$ positiv definit seien. $\Lambda(H)$ ist diskret; denn sonst gäbe es eine unendliche Folge verschiedener Matrizen $U^{(k)}$, deren Elemente beschränkt sind.

$$H_l\{U_l^{(k)}\} = H_l, \qquad \bar{H}_l\{\bar{U}_l^{(k)}\} = \bar{H}_l \qquad (l = 2, 3, \ldots, h).$$

Durch den unteren Index seien die Konjugierten gekennzeichnet. Da die hier auftretenden Konjugierten von H positiv definit sind, sind die $U_l^{(k)}$ beschränkt. Es gibt aber nur endlich viele ganze algebraische Zahlen in K_0, deren Konjugierte alle beschränkt sind. Wegen Teil I, Satz 11 sind $\Delta(H)$ und damit auch die Untergruppen $\Delta(H, G)$ diskontinuierlich.

Speziell sind die Modulgruppen unter den Gruppen $\Delta(H)$, $\Delta(H, G)$ enthalten. Wir setzen $K = P$, $H = \sqrt{-r}\,I$, $C = r^{-1/4}E$, dann ist $\Delta(\sqrt{-r}\,I) = \mathfrak{M}_1$ die Hermitesche Modulgruppe. Sei weiterhin $G = I$, $s = r$, so ist $\Delta(\sqrt{-r}\,I, I) = \mathfrak{M}_3$, die SIEGELsche Modulgruppe. Wenn schließlich $G = E$, $s = r$, so ist $\Delta(\sqrt{-r}\,I, E) = \mathfrak{M}_2$ die Modulgruppe für den zweiten Typus. $\mathfrak{M}_2$ und $\mathfrak{M}_3$ bestehen also genau aus den Elementen von $\mathfrak{M}_1$, die $\mathfrak{H}_2$ bzw. $\mathfrak{H}_3$ auf sich abbilden.

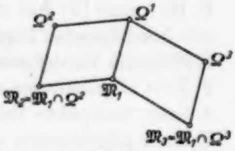

Fig. 1.

Wir nennen zwei Gruppen $\Delta_1, \Delta_2 \subseteq \Omega^\nu$ kommensurabel, wenn beide Untergruppen von endlichem Index enthalten, die konjugiert sind über Ω^ν. Die Frage nach der Kommensurabilität zweier Gruppen ist wichtig für die Untersuchung des Körpers der zugehörigen automorphen Funktionen. Offenbar ist die Relation „kommensurabel" eine Äquivalenzrelation. Wir zeigen zunächst

Satz 2: *H, G und H^*, G^* mögen die üblichen Voraussetzungen mit dem gleichen s (siehe Definition von $\Delta(H)$, $\Delta(H, G)$) erfüllen. Ferner sei*

$$H\{C_0\} = H^* \text{ bzw. } H\{C_0\} = H^* \text{ und } G[C_0] = G^* \text{ mit } C_0 \in K_0.$$

Dann sind $\Delta(H)$ und $\Delta(H^*)$ bzw. $\Delta(H, G)$ und $\Delta(H^*, G^*)$ kommensurabel.

Beweis: Es gibt ein ganzes rationales q, so daß $q\,C_0$ *und* $q\,C_0^{-1}$ ganz sind. Λ_1 sei die Untergruppe aller U aus $\Lambda(H)$, für die $U \equiv E \pmod{q^2}$. Der Index $[\Lambda(H):\Lambda_1]$ ist endlich. Λ_2 sei die Untergruppe aller U aus $\Lambda(H)$, für die $C_0^{-1}U\,C_0 = U^*$ ganz ist. Da $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$, ist der Index von Λ_2 endlich. Sei $\Lambda_2^* = C_0^{-1}\Lambda_2 C_0$; dann ist Λ_2^* die Untergruppe aller Elemente U^* von $\Lambda(H^*)$, für die $C_0 U^* C_0^{-1} = U$ ganz ist. Wie vorhin folgt, daß $[\Lambda(H^*):\Lambda_2^*]$ endlich ist.

$$\Delta_0(H) = C^{-1}\Lambda(H)\,C,\ \Delta_0(H^*) = C^{*-1}\,\Lambda(H^*)\,C^* \text{ mit } C^* = C_0^{-1}\,C.$$

$C^{-1}\Lambda_2 C = C^{*-1}\,\Lambda_2^*\,C^*$ ist eine gemeinsame Untergruppe von $\Delta_0(H)$ und $\Delta_0(H^*)$ von endlichem Index. — Die Gleichungen bleiben richtig, wenn man $\Delta_0(H)$ durch $\Delta_0(H, G)$ und $\Lambda(H)$ durch $\Lambda(H, G)$ ersetzt. Durch Identifikation aller Matrizen, die sich nur um eine Einheitswurzel aus K_0 als Faktor unterscheiden, folgt die Behauptung.

Wir wollen nun einen Fundamentalbereich für die Gruppen $\Delta(H)$ und $\Delta(H, G)$ angeben. Das wesentliche Hilfsmittel ist die Reduktionstheorie der positiv definiten Formen in einem endlichen algebraischen Zahlkörper nach P. Humbert [2]. Wir betrachten h positiv definite Hermitesche $2\,n$-reihige Matrizen $T_a (a = 1, 2, \ldots, h)$. Bekanntlich gibt es eine eineindeutige Darstellung $T_a = P_a\{Q_a\}$, die kanonische Darstellung, mit einer positiv definiten reellen Diagonalmatrix $P_a = [p_1^{(a)}, \ldots, p_{2n}^{(a)}]$ und einer Dreiecksmatrix $Q_a = \begin{pmatrix} 1 & & q_{kl}^{(a)} \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$. $\mathfrak{U}$ sei die Gruppe der unimodularen Matrizen U aus K_0; U_a sei die zu U konjugierte Matrix in $K_0^{(a)}$. Die Elemente von $T_1, T_2, \ldots, T_h$ fassen wir auf als Koordinaten eines Punktes im euklidischen $4\,n^2h$-dimensionalen Raum. Mit $\mathfrak{P}$ bezeichnen wir den Raum der positiv definiten Matrizen T_a. Die Abbildung $T_a \to T_a\{U_a\}$ mit einer Matrix $U \in \mathfrak{U}$ führt $\mathfrak{P}$ in sich über. Die Gruppe dieser Abbildungen ist isomorph zur Faktorgruppe $\mathfrak{U}/\mathfrak{C} = \mathfrak{U}_0$, wobei $\mathfrak{C}$ aus allen Matrizen der Form aE mit einer Einheitswurzel a aus K_0 besteht. P. Humbert [2] hat einen Fundamentalbereich $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{U}_0$ in $\mathfrak{P}$ angegeben mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\mathfrak{R}$ ist die Vereinigung von endlich vielen Pyramiden,
2. $\mathfrak{R}$ ist abgeschlossen relativ zu $\mathfrak{P}$,
3. jeder kompakte Bereich aus $\mathfrak{P}$ wird von endlich vielen Bildern $\mathfrak{R}_U$ von $\mathfrak{R}$ unter Abbildungen aus $\mathfrak{U}_0$ überdeckt,
4. $\mathfrak{R}$ hat nur endlich viele Nachbarn.

Es sei t eine positive Zahl > 1. Unter $\mathfrak{Q}(t)$ verstehen wir den folgenden Bereich:

$$0 < p_k^{(a)} \leq t\,p_{k+1}^{(a)}\ (k < 2\,n); \quad p_k^{(a)} \leq t\,p_k^{(b)}\ (k \leq 2\,n); \quad |q_{kl}^{(a)}| \leq t\ (k > l).$$

Dabei sind die $p_k^{(a)}$, $q_{kl}^{(a)}$ die Elemente der oben definierten Matrizen P_a, Q_a. Wir entnehmen der Reduktionstheorie die beiden Sätze:

Hilfssatz 1: *Es gibt eine endliche Menge $\mathfrak{L}$ von Matrizen $L \in \mathfrak{o}_{K_0}$ und eine positive Zahl τ_1, die nur von K_0 und n abhängt, so daß für jedes System $(T_1, \ldots, T_h)$, wir schreiben kurz T, aus $\mathfrak{R}$ gilt, daß $T\{L\} \in \mathfrak{Q}(\tau_1)$ mit geeignetem L aus $\mathfrak{L}$.*

Dabei bedeutet $T\{L\}$, wie weiterhin stets in ähnlichen Fällen, das System der Matrizen $(T_1\{L_1\}, \ldots, T_h\{L_h\})$, L_a die zu L konjugierte Matrix in $K_0^{(a)}$.

Hilfssatz 2: *Es sei F eine Matrix mit Elementen aus $\mathfrak{o}_{K_0}$, T und $T\{F\}$ seien aus $\mathfrak{Q}(t)$, α sei die Norm von $|F|$. Dann gehört F einer endlichen Menge von Matrizen an, die nur von K_0, n, t, α abhängt.*

Um die Humbertsche Reduktionstheorie direkt auf $\mathfrak{H}_1$ anwenden zu können, bilden wir $\mathfrak{H}_1$ eineindeutig ab auf einen Teilraum $\mathfrak{T}_1$ von $\mathfrak{P}$. H. Braun [1] hat gezeigt, daß durch

$$S = \begin{pmatrix} Y^{-1} & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} E & -X \\ 0 & E \end{pmatrix} \right\} \tag{3}$$

eine eineindeutige Abbildung von $\mathfrak{H}_1$ auf den Raum der positiv definiten Hermiteschen Matrizen S, für die $S\,I\,S = I$, definiert wird. Dabei sind $X = \frac{1}{2}(Z + \tilde{Z})$ und $Y = \frac{1}{2i}(Z - \tilde{Z})$. Die Abbildung

$$W = (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \quad \text{mit} \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Omega_1$$

induziert dabei die Abbildung

$$S \to S\{M^{-1}\}. \tag{4}$$

S ist dann und nur dann reell, wenn X, Y reell sind, d. h. $Z' = Z$. Bei (3) wird also $\mathfrak{H}_3$ auf den Unterraum der reellen S abgebildet. — Sei $Z \in \mathfrak{H}_2$, dann gibt es nach Teil I, Satz 2 ein $M \in \Omega_2$, so daß Z auf iE abgebildet wird, kurz $iE = M \mid Z$. Da $S_Z = S_{iE}\{M\}$ und $S_{iE} = E$, ist $S_Z S_Z' = E$. Sei umgekehrt $S\,S' = E$, so folgt aus

$$S\,I\,S = I, \qquad S = \begin{pmatrix} Y^{-1} & -Y^{-1}X \\ -X\,Y^{-1} & X\,Y^{-1}X + Y \end{pmatrix},$$

daß

$$-X\,Y^{-1} = \bar{Y}^{-1}\bar{X}, \quad X\,Y^{-1}X + Y = \bar{Y}^{-1};$$

daraus ergibt sich

$$X'Y = -Y'X, \qquad X'X - Y'Y = -E$$

und damit

$$Z'Z = X'X - Y'Y + i(Y'X + X'Y) = -E.$$

Bei (3) wird also $\mathfrak{H}_2$ auf den Unterraum der orthogonalen S abgebildet.

Wir definieren nun eine eineindeutige Abbildung von $\mathfrak{H}_1$ auf einen Teilraum $\mathfrak{T}_1$ von $\mathfrak{P}$. $Z \in \mathfrak{H}_1$ ordne man zu

$$\begin{aligned} T_1 &= S\{C^{-1}\} \\ T_a &= H_a \qquad (a = 2, 3, \ldots, h). \end{aligned} \tag{5}$$

H_a sei die Konjugierte von H in $K_0^{(a)}$. Für das System $(T_1, \ldots, T_h)$ schreiben wir auch kurz T_Z oder einfach T. $\mathfrak{H}_2$ bzw. $\mathfrak{H}_3$ werden abgebildet auf die Teilräume $\mathfrak{T}_2$ bzw. $\mathfrak{T}_3$ von $\mathfrak{T}_1$, die durch orthogonale bzw. reelle S gekennzeichnet sind. Wegen (4) induziert $W = C^{-1}U\,C \mid Z$ mit $U \in \Lambda(H)$ in $\mathfrak{T}_1$ die Abbildung

$$T_a \to T_a\{U_a^{-1}\}.$$

Zu jedem $Z \in \mathfrak{H}_1$ existiert ein unimodulares U_Z aus K_0 und nach Hilfssatz 1 ein L_Z aus $\mathfrak{L}$, so daß

$$T_Z\{U_Z\} \in \mathfrak{R}, \quad \hat{T}_Z = T_Z\{U_Z L_Z\} \in \mathfrak{Q}(\tau_1).$$

Hilfssatz 3: *$H\{U_Z\}$ gehört einer endlichen, von Z unabhängigen Menge an.*

Beweis: Wegen $H\{C\} = i\,I$ und $I\{S\} = I$ ist $T_a = T_a^{-1}\{H_a\}$. Mit $\hat{H} = H\{U_Z L_Z\}$ folgt $\hat{T}^{-1}\{\hat{H}\} = \hat{T} \in \mathfrak{Q}(\tau_1)$. Sei $V = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & 1 \\ & \cdot & \\ 1 & \cdot & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{T} = P\{Q\}$ die kanonische Darstellung von $\hat{T}$, dann ist $\hat{T}^{-1}\{V\} = P^{-1}\{V\}\{V\,\tilde{Q}^{-1}\,V\}$ die kanonische Darstellung von $\hat{T}^{-1}\{V\}$. Folglich gibt es ein $\tau_2 \geqq \tau_1$, das nur von τ_1 und n abhängt, so daß

$$\hat{T}^{-1}\{V\} \in Q(\tau_2), \quad \hat{T}^{-1}\{\hat{H}\} = \hat{T}^{-1}\{V\}\{V\,\hat{H}\} \in \mathfrak{Q}(\tau_2).$$

Ferner gehört die Norm von $|V\,\hat{H}|$ einer endlichen Menge an. Da $\mathfrak{L}$ endlich ist, folgt wegen Hilfssatz 2 die Behauptung.

Hilfssatz 4: *Für $\nu = 2$ sei G symmetrisch, für $\nu = 3$ alternierend. Beschränken wir Z auf $\mathfrak{H}_2$ bzw. $\mathfrak{H}_3$, so gehört $G[U_Z]$ einer endlichen, von Z unabhängigen Menge an.*

Beweis: Da $H = -s\,\bar{H}^{-1}\{G\}$ und $H_a > 0$ für $a = 2, 3, \ldots, h$, folgt $s_a < 0$ für diese Werte von a. Wegen $S\,S' = E$ bzw. $S = \bar{S}$ gilt mit $\hat{G} = G[U_Z L_Z]$

$$|s_a|^{-1}\,T_a = \bar{T}_a^{-1}\{G_a\}, \quad |s_a|^{-1}\,\hat{T}_a = \bar{\hat{T}}_a^{-1}\{\hat{G}_a\}.$$

Für ein geeignetes τ_3, das nur von K_0, n, s abhängt, folgt dann

$$\hat{T}_a^{-1}\{V\} \in \mathfrak{Q}(\tau_3), \quad \hat{T}_a^{-1}\{V\}\{V\,\bar{\hat{G}}\} = |s_a|^{-1}\,\bar{\hat{T}}_a \in \mathfrak{Q}(\tau_3).$$

Ferner gehört die Norm von $|V\,\bar{\hat{G}}|$ einer endlichen Menge an. Wegen Hilfssatz 2 folgt unsere Behauptung.

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir nun einen Fundamentalbereich für unsere Gruppen $\Delta(H)$ in $\mathfrak{H}_1$ und für $\Delta(H, G)$ in $\mathfrak{H}_2$ bzw. $\mathfrak{H}_3$, je nachdem G symmetrisch oder alternierend ist, angeben. Wir wählen ein vollständiges System von Punkten $Z \in \mathfrak{H}_\nu$, so daß für $\nu = 1$ die Matrizen $H\{U_Z\}$ und für $\nu = 2, 3$ die Paare $H\{U_Z\}$, $G[U_Z]$ paarweise verschieden sind. Die nach vorstehenden Hilfssätzen endliche Menge dieser Matrizen U_Z sei $\mathfrak{V}_\nu$. Für $U_0 \in \mathfrak{V}_\nu$ sei $\mathfrak{G}_\nu(U_0)$ die Menge aller $Z \in \mathfrak{H}_\nu$, für die

$$T_Z \in \mathfrak{R}_{U_0^{-1}},$$

und

$$\mathfrak{G}_\nu = \bigcup_{U_0 \in \mathfrak{V}_\nu} \mathfrak{G}_\nu(U_0).$$

Sei $Z \in \mathfrak{H}_\nu$, dann gibt es ein $U_0 \in \mathfrak{V}_\nu$, so daß $H\{U_Z\} = H\{U_0\}$ für $\nu = 1$ und weiterhin $G[U_Z] = G[U_0]$ falls $\nu = 2, 3$. Dann ist $W = U_0 U_Z^{-1} \in \Delta(H)$ bzw. $\Delta(H, G)$. Für $Z^* = C^{-1}\,W\,C \mid Z$ ist $T_{Z^*} = T_Z\{W^{-1}\} \in \mathfrak{R}_{U_0^{-1}}$, also $Z^* \in \mathfrak{G}_\nu$. Somit gibt es zu jedem Punkt $Z \in \mathfrak{H}_\nu$ einen Bildpunkt unter $\Delta(H)$ bzw. $\Delta(H, G)$ in $\mathfrak{G}_\nu$. Offenbar ist $\mathfrak{G}_\nu$ abgeschlossen relativ zu $\mathfrak{H}_\nu$. — Wesentlich für die folgenden Ausführungen ist

Satz 3: *In $\mathfrak{H}_1$ gibt es keinen kompakten Bereich $\mathfrak{B}$, so daß $T_Z\{U_Z\}$ Randpunkt von $\mathfrak{R}$ ist für alle $Z \in \mathfrak{B}$ $(n > 1)$.*

Beweis: Wir führen den Beweis indirekt. Angenommen, es sei $T_Z\{U_Z\}$ Randpunkt von $\mathfrak{R}$ für alle $Z \in \mathfrak{B}$. Wegen der Eigenschaft 3 von $\mathfrak{R}$ kann man annehmen, daß $T_Z \in \mathfrak{R}_{U^{-1}}$ für alle $Z \in \mathfrak{B}$ mit einer festen unimodularen Matrix U. Die berandenden Ebenen von $\mathfrak{R}_{U^{-1}}$ haben Gleichungen der Form

$$\sum_{a=1}^{h} \mathfrak{v}_a' T_a \mathfrak{w}_a + \bar{\mathfrak{v}}_a' \bar{T}_a \bar{\mathfrak{w}}_a = 0,$$

$\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ sind Vektoren mit Komponenten aus K_0, $\mathfrak{v} \neq \lambda\,\mathfrak{w}$ für jeden rein imaginären Faktor λ, $\mathfrak{v}, \mathfrak{w} \neq 0$. Es seien $\mathfrak{p} = \bar{C}^{-1}\bar{\mathfrak{v}}$, $\mathfrak{q} = C^{-1}\bar{\mathfrak{w}}$. Dann ist

$$\mathfrak{p}' S \bar{\mathfrak{q}} + \bar{\mathfrak{p}}' S' \mathfrak{q} = \text{const}$$

für alle $Z \in \mathfrak{B}$. Es ist

$$S = \begin{pmatrix} Y^{-1} & -Y^{-1}X \\ -X\,Y^{-1} & X\,Y^{-1}X + Y \end{pmatrix}.$$

Nach dem Identitätssatz für analytische Funktionen folgt

$$\mathfrak{p}' S \bar{\mathfrak{q}} + \bar{\mathfrak{p}}' S' \mathfrak{q} = \text{const} \tag{6}$$

für alle komplexen Matrizen Y, X, sofern nur $|Y| \neq 0$. Wir entwickeln um den Punkt $X = 0$, $Y = E$ und erhalten speziell für alle reellen symmetrischen X, Y

$$\mathrm{Re}(\mathfrak{p}' S_1 \bar{\mathfrak{q}}) = 0,$$

wobei

$$Y^* = E - Y, \qquad S_1 = \begin{pmatrix} Y^{*2} & Y^* X \\ X\,Y^* & X^2 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt nach einer einfachen Rechnung $\mathfrak{p} = \omega\,\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q} = i\,\omega\,\mathfrak{s}$ mit reellen Spalten $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ und skalarem $\omega \neq 0$. In (6) können wir daher annehmen

$$\mathfrak{p} = \begin{pmatrix} \mathfrak{a} \\ \mathfrak{b} \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{q} = i \begin{pmatrix} \mathfrak{c} \\ \mathfrak{d} \end{pmatrix}$$

mit n-reihigen reellen Spalten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$. (6) besagt

$$\begin{aligned} &-\mathfrak{a}' Y^{-1}\mathfrak{c} + \mathfrak{a}' Y^{-1} X\,\mathfrak{d} + \mathfrak{b}' X\,Y^{-1}\mathfrak{c} - \mathfrak{b}'(X\,Y^{-1}X + Y)\,\mathfrak{d} + \\ &+ \mathfrak{a}' Y'^{-1}\mathfrak{c} - \mathfrak{a}' Y'^{-1}X'\,\mathfrak{d} - \mathfrak{b}' X' Y'^{-1}\mathfrak{c} + \mathfrak{b}'(X' Y'^{-1}X' + Y')\,\mathfrak{d} = \text{const}. \end{aligned} \tag{7}$$

Wir betrachten die in den Elementen von X quadratischen Glieder und setzen $Y = E$, $X = E + G$ mit beliebigem reellem alternierendem G. Aus (7) folgt $\mathfrak{b}' G\,\mathfrak{d} = 0$, also $\mathfrak{b} = \lambda_2 \mathfrak{d}$, sofern $\mathfrak{d} \neq 0$. Sei $X = 0$, $Y^{-1} = E + G$ mit alternierendem reellem G, so folgt $\mathfrak{a}' G\,\mathfrak{c} = 0$, also $\mathfrak{a} = \lambda_1 \mathfrak{c}$ oder $\mathfrak{c} = 0$. (7) reduziert sich somit auf

$$\mathfrak{a}' Y^{-1} X\,\mathfrak{d} - \mathfrak{a}' Y'^{-1} X'\,\mathfrak{d} + \mathfrak{b}' X\,Y^{-1}\mathfrak{c} - \mathfrak{b}' X' Y'^{-1}\mathfrak{c} = 0. \tag{8}$$

Fall a). Es seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \neq 0$. Wegen $\mathfrak{p} \neq \lambda\,\mathfrak{q}$ für alle rein imaginären λ und (8) gilt

$$\mathfrak{c}' Y^{-1} X\,\mathfrak{d} - \mathfrak{d}' X\,Y^{-1}\mathfrak{c} = 0.$$

Sei X alternierend, Y^{-1} symmetrisch, so folgt

$$\mathfrak{c}' Y^{-1} X\,\mathfrak{d} = 0$$

und damit $\mathfrak{d} = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Fall b). Es sei genau einer der Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ Null, etwa $\mathfrak{d} = 0$. Aus (8) folgt

$$\mathfrak{c}' Y^{-1} X \mathfrak{b} = 0$$

für alternierende X und symmetrische Y^{-1}, also $\mathfrak{b} = 0$.
Fall c). Genau zwei der Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ seien Null, etwa $\mathfrak{a} = \mathfrak{c} = 0$. Es folgt $\mathfrak{b} = \lambda_2 \mathfrak{d}$ und $\mathfrak{a} = \lambda_2 \mathfrak{c}$ im Widerspruch zu $\mathfrak{p} \neq \lambda\, \mathfrak{q}$ für alle rein imaginären λ.

Ähnlich schließt man in den anderen Fällen. — Drei der Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ können nicht Null sein, da $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \neq 0$; also folgt unser Satz.

Die Ausschließung des Falles $n = 1$ ist nicht wesentlich, da er uns auf den klassischen Fall des Einheitskreises führt.

Es ist bekannt ([4], Abschnitt 36), daß es keinen kompakten Bereich $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{H}_3$ gibt, so daß $T_Z\{U_Z\}$ Randpunkt von $\mathfrak{R}$ ist für alle $Z \in \mathfrak{B}$, sofern $h > 1$ oder $h = 1$ und $\Delta(H, G)$ nicht kommensurabel mit der SIEGELschen Modulgruppe ist. Für $\nu = 2$ wollen wir ausdrücklich fordern, daß H und $G = G'$ so beschaffen sein mögen, daß Satz 3 gültig ist bei Beschränkung von Z auf $\mathfrak{H}_2$.

Daraus ergibt sich, daß es zu jedem Z aus $\mathfrak{H}_\nu$ eine Folge von Punkten $Z_k \in \mathfrak{H}_\nu$, die gegen Z konvergiert, und ein $M \in \Delta_0(H)$ (für $\nu = 1$) bzw. $\Delta_0(H, G)$ (für $\nu = 2, 3$) gibt, so daß $M \mid Z_k$ innere Punkte von $\mathfrak{G}_\nu(U_0)$ relativ zu $\mathfrak{H}_\nu$ sind mit einem $U_0 \in \mathfrak{V}_\nu$.

$\mathfrak{F}_\nu(U_0)$ sei die abgeschlossene Hülle der inneren Punkte von $\mathfrak{G}_\nu(U_0)$ relativ zu $\mathfrak{H}_\nu$, $\mathfrak{F}_\nu = \bigcup\limits_{U_0 \in \mathfrak{V}_\nu} \mathfrak{F}_\nu(U_0)$.

Satz 4: *$\mathfrak{F}_\nu$ ist ein Fundamentalbereich in $\mathfrak{H}_\nu$ von $\Delta(H)$ (falls $\nu = 1$), $\Delta(H, G)$ (falls $\nu = 2,3$). Jeder kompakte Bereich aus $\mathfrak{H}_\nu$ wird von endlich vielen Bildern von $\mathfrak{F}_\nu$ überdeckt. $\mathfrak{F}_\nu$ hat nur endlich viele Nachbarn. Der Rand von $\mathfrak{F}_\nu$ relativ zu $\mathfrak{H}_\nu$ besteht aus endlich vielen algebraischen Flächen.*

Beweis: Aus den obigen Betrachtungen folgt, daß es zu jedem $Z \in \mathfrak{H}_\nu$ mindestens einen äquivalenten Punkt in $\mathfrak{F}_\nu$ gibt. Wir können $\mathfrak{V}_\nu$ so wählen, daß aus $U, V \in \mathfrak{V}_\nu$ und $U = \varepsilon\, W\, V$ mit einer Einheitswurzel ε aus K_0 und $W \in \Lambda(H, G)$ folgt $U = V$. Sei nun Z ein innerer Punkt von $\mathfrak{F}_\nu(U_0)$, $Z^* \in \mathfrak{F}_\nu(U_1)$, $Z^* = C^{-1} W C \mid Z$ mit $W \in \Lambda(H)$ bzw. $\Lambda(H, G)$. Für alle Punkte Y^* eines hinreichend kleinen Gebietes in beliebiger Nähe von Z^* ist $T_{Y^*} \in \mathfrak{R}_{U_1^{-1}}$. Es sei $Y^* = C^{-1} W C \mid X^*$; unter den X^* gibt es ein X_0^*, so daß $T_{X_0^*}\{U_0\}$ innerer Punkt von $\mathfrak{R}$ ist. $T_{Y_0^*}\{U_1\} = T_{X_0^*}\{U_0\}\,\{U_0^{-1} W^{-1} U_1\}$ ist aus $\mathfrak{R}$. Also folgt $U_0 = U_1$, $W = \varepsilon E$ mit einer Einheitswurzel ε aus $K_0 (\varepsilon = \pm 1$ für $\nu = 2.3)$ und damit $Z = Z^*$. Also ist $\mathfrak{F}_\nu$ ein Fundamentalbereich. Die weiteren Eigenschaften für $\mathfrak{F}_\nu$ folgen sofort aus den entsprechenden für $\mathfrak{R}$.

Wenn $h > 1$, erhalten wir einen kompakten Fundamentalbereich. Sei nämlich dann Z ein beliebiger Punkt aus $\mathfrak{F}_\nu$; es gibt $U_0 \in \mathfrak{V}_\nu$ und $L \in \mathfrak{L}$, so daß $T\{U_0 L\} \in \mathfrak{Q}(\tau_1)$. Wir verwenden die kanonische Darstellung

$$T_1\{U_0 L\} = S\{C^{-1} U_0 L\} = P\{Q\}. \tag{9}$$

Seien $\hat{H} = H\{U_0 L\}$, $\hat{T}_1 = T_1\{U_0 L\}$; aus $\hat{T}_1 = \hat{T}_1^{-1}\{\hat{H}\}$ folgt

$$P = P^{-1}\left\{\hat{H}\,\{Q^{-1}\}\right\}.$$

Wenn d das erste Diagonalelement von $\hat{H}$ ist, so gilt

$$p_1^2 \geqq d^2 \qquad \text{und} \qquad \prod_{k=1}^{n} p_k = \|\hat{H}\|.$$

Da die Konjugierten von $\hat{H}$ bis auf $\hat{H}$ und $\overline{\hat{H}}$ positiv sind, ist $d \neq 0$, also P beschränkt. Wegen (9) ist

$$S = \begin{pmatrix} Y^{-1} & -Y^{-1}X \\ -XY^{-1} & XY^{-1}X + Y \end{pmatrix}$$

beschränkt, und damit sind auch X, Y, $|Y|^{-1}$ beschränkt. $\mathfrak{F}_\nu$ ist also kompakt. Unter Verwendung von Satz 4 erhalten wir

Theorem 1: *Für $h > 1$ ist $\Delta(H)$ eine diskontinuierliche Gruppe erster Art mit kompaktem Fundamentalbereich. Sei G für $\nu = 2$ symmetrisch, für $\nu = 3$ alternierend. $\Delta(H, G)$ ist eine diskontinuierliche Gruppe erster Art mit kompaktem Fundamentalbereich relativ zu $\mathfrak{H}_\nu$.*

Schließlich betrachten wir noch die Kongruenzuntergruppen $\Delta_{\mathfrak{k}}(H)$ und $\Delta_{\mathfrak{k}}(H, G)$ nach einem ganzen Ideal $\mathfrak{k}$ in K_0. $\Lambda_{\mathfrak{k}}(H)$ bzw. $\Lambda_{\mathfrak{k}}(H, G)$ sei die Untergruppe aller $W \in \Lambda(H)$ bzw. $\Lambda(H, G)$, für die $W \equiv E \pmod{\mathfrak{k}}$.

$$\Delta_{\mathfrak{k}}(H) = C^{-1}\Lambda_{\mathfrak{k}}(H)\,C, \quad \Delta_{\mathfrak{k}}(H, G) = C^{-1}\Lambda_{\mathfrak{k}}(H, G)\,C.$$

Theorem 2: *$\mathfrak{p}$ sei ein Primideal in K_0. $\mathfrak{k} = \mathfrak{p}^m$ eine Potenz von $\mathfrak{p}$, so daß $\mathfrak{k}^{p-1} \nmid p$, wobei p die rationale Primzahl ist, für die $\mathfrak{p} \mid p$. Dann haben die Gruppen $\Delta_{\mathfrak{k}}(H)$ und $\Delta_{\mathfrak{k}}(H, G)$ keinen Fixpunkt in $\mathfrak{H}_\nu$, d. h. keine Abbildung außer der identischen Abbildung hat einen Fixpunkt in $\mathfrak{H}_\nu$.*

Beweis: Da $\Delta_{\mathfrak{k}}(H, G) \subseteq \Delta_{\mathfrak{k}}(H)$ und $\mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_3 \subseteq \mathfrak{H}_1$, genügt es, den Satz für $\Delta_{\mathfrak{k}}(H)$ und $\mathfrak{H}_1$ zu beweisen. Der Beweis für $\nu = 3$ von C. L. Siegel [4] läßt sich wörtlich übertragen.

Schließlich zeigen wir noch einen Satz über die Kommensurabilität der Gruppen $\Delta(H)$. Wir können die Gruppen $\Delta(H)$ in Klassen von kommensurablen Gruppen einteilen. Von Interesse ist die Frage nach einfachen Klassenrepräsentanten. Wegen Satz 2 kann man annehmen

$$H = [d_1, d_2, \ldots, d_{2n}], \qquad d_k \in \mathfrak{o}_{K_0}, \qquad d_1, d_2, \ldots, d_n > 0, \qquad d_{n+1}, \ldots, d_{2n} < 0.$$

Ferner sei

$$D_1 = [d_1^{1/2}, \ldots, d_n^{1/2}], \qquad D_2 = [d_{n+1}^{1/2}, \ldots, d_{2n}^{1/2}];$$

dann ist

$$C = 2^{-1/2}\begin{pmatrix} D_1^{-1} & 0 \\ 0 & D_2^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -iE & E \\ iE & E \end{pmatrix}, \qquad C^{-1} = 2^{-1/2}\begin{pmatrix} iE & -iE \\ E & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}.$$

$\Delta_0(H)$ besteht aus allen Matrizen

$$M = \frac{1}{2}\Big\{D_1 A D_1^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} + D_1 B D_2^{-1} \times \begin{pmatrix} -1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} +$$
$$+ D_2 C D_1^{-1} \times \begin{pmatrix} -1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} + D_2 D D_2^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}\Big\},$$

wobei $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ die Gruppe $\Lambda(H)$ durchläuft und

$$D_1 A D_1^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 A D_1^{-1} & i D_1 A D_1^{-1} \\ -i D_1 A D_1^{-1} & D_1 A D_1^{-1} \end{pmatrix}$$

usw. Allgemein kann man jede Matrix M eindeutig darstellen in der Form

$$M = \frac{1}{2}\left\{A^* \times \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} + B^* \times \begin{pmatrix} -1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} + C^* \times \begin{pmatrix} -1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} + D^* \times \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}\right\} \tag{10}$$

mit n-reihigen Matrizen A^*, B^*, C^*, D^*. Multiplikation der Matrizen M bedeutet für die A^*, B^*, C^*, D^* Multiplikation der Matrizen $\begin{pmatrix} A^* & B^* \\ C^* & D^* \end{pmatrix}$. Δ_0 sei die Gruppe aller $M \in \Omega_1$, für die A^*, B^*, C^*, $D^* \in \mathfrak{o}_{K_0}$. Wir können nun leicht folgenden Satz beweisen.

Satz 5: *Alle Gruppen* $\Delta(H)$, *für die* $\left(\frac{d_k}{d_l}\right)^{1/2} \in K_0$, *sind kommensurabel.*

Beweis: Es sei $\mathfrak{a}$ das Ideal $d_1 d_2 \ldots d_{2n}\, \mathfrak{o}_{K_0}$ aus K_0. $\Delta_{\mathfrak{a}}(H)$ sei die Untergruppe aller $M \in \Delta_0(H)$, für die

$$C M C^{-1} \equiv E \pmod{\mathfrak{a}}.$$

Es ist der Index $[\Delta_0(H) : \Delta_{\mathfrak{a}}(H)]$ endlich,

$$C M C^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Lambda(H).$$

Dann ist in der Darstellung (10)

$$A^* = D_1 A D_1^{-1}, \qquad B^* = D_1 B D_2^{-1}, \qquad C^* = D_2 C D_1^{-1}, \qquad D^* = D_2 D D_2^{-1}.$$

Wegen $\left(\frac{d_k}{d_l}\right)^{1/2} \in K_0$ und $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \pmod{\mathfrak{a}}$ sind A^*, B^*, C^*, $D^* \in \mathfrak{o}_{K_0}$. Daher ist $\Delta_{\mathfrak{a}}(H) \subseteq \Delta_0$. Θ sei die Untergruppe aller Elemente von Δ_0, für die $\begin{pmatrix} A^* & B^* \\ C^* & L^* \end{pmatrix} \equiv E \pmod{\mathfrak{a}}$. Dann ist $\Theta \subseteq \Delta_0(H)$ und $[\Delta_0 : \Theta]$ endlich. Schließlich sei Φ die Gruppe, die von den Elementen aus $\Delta_{\mathfrak{a}}(H)$ und Θ erzeugt wird. Φ ist eine gemeinsame Untergruppe von Δ_0 und $\Delta_0(H)$ von endlichem Index in $\Delta_0(H)$ und Δ_0. Da Δ_0 von H unabhängig ist, folgt die Behauptung.

Literatur.

[1] H. Braun: "Hermitian Modular Functions III." Annals of Math. **53**, 143—160 (1951). — [2] P. Humbert: «Théorie de la réduction des formes quadratiques définies positives dans un corps algébrique K fini.» Commentarii Math. Helvet. **12**, 263—306 (1939/40). [3] H. Klingen: „Diskontinuierliche Gruppen in symmetrischen Räumen I". Math. Ann. **129**, 345—369 (1955). — [4] C. L. Siegel: "Symplectic Geometry". Amer. J. Mathematics **65**, 1—86 (1943).

(Eingegangen am 20. Januar 1955.)

Stoll, W.
Math. Annalen, Bd. 130, S. 147—182 (1955).

Über meromorphe Modifikationen.

IV. Die Erzeugung analytischer und meromorpher Modifikationen zwischen kompakten Mannigfaltigkeiten durch σ-Prozesse.

Von

Wilhelm Stoll in Tübingen.

Nachdem in drei vorhergehenden Arbeiten[1]) die notwendigen Grundlagen geschaffen wurden, kann nun gezeigt werden, wie sich analytische und meromorphe Modifikationen 4-dimensionaler komplexer Mannigfaltigkeiten aus Modifikationen eines einfachen Typs aufbauen. Dieser einfache Typ war schon länger in der algebraischen Geometrie in Gebrauch und wurde von H. Hopf [9][1]) in die Funktionentheorie unter dem Namen „σ-Prozeß" eingeführt[2]).

Eine Modifikation $\mathfrak{M} = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v\end{pmatrix}$ liegt vor[3]), wenn τ die offene Teilmenge A der $2n$-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit G pseudokonform auf die offene Teilmenge $B \subseteq H$ der komplexen Mannigfaltigkeit H abbildet und die Umkehrung $\tau^{-1} = v$ hat. Es ist dabei $M = G - A \subseteq M^*$ und $N = H - B \subseteq N^*$, wo M^* und N^* in geeigneten Umgebungen von M bzw. N analytisch sind und höchstens die Dimension $2n - 2$ haben. Mit $\mathfrak{M}$ ist auch $\mathfrak{M}^{-1} = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} H, B, N, \tau \\ G, A, M, v\end{pmatrix}$ eine Modifikation, nämlich die inverse. $\mathfrak{M}$ heiße offen, wenn mit jeder offenen Umgebung $U \supseteq M$ auch $\tau(U \cap A) \cup N$ offen ist. Sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^{-1}$ offen, so heiße $\mathfrak{M}$ beiderseits offen. Wenn die Abbildung τ längs jeder 2-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit L aus G, die M nur in einem Punkt P_0 trifft, in P_0 nicht streut, so heiße $\mathfrak{M}$ meromorph. Im Falle $n = 2$ ist dann auch $\mathfrak{M}^{-1}$ meromorph. Ist v in N regulär, so heiße $\mathfrak{M}$ analytisch. Eine analytische Modifikation ist offen und meromorph.

Ist die Modifikation $\mathfrak{M} = \underset{2}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v\end{pmatrix}$ beiderseits offen und meromorph, so gibt es zu jedem singulären Punkt $P_0 \in M$ eine rein 2-dimensionale analytische Menge $C(P_0)$, auf der v, abgesehen von isolierten Punkten, regulär ist, und die durch die Fortsetzung $v(Q, H)$ von v — abgesehen von diesen isolierten

[1]) Unter dem gemeinsamen Titel „Über meromorphe Modifikationen" wird eine Reihe von Arbeiten veröffentlicht. In der Mathematischen Zeitschrift erschienen: Teil I (§ 1—§ 3) Bd. 61, S. 206—234, Teil II (§ 4—§ 6) Bd. 61, S. 467—488, Teil III (§ 6—§ 19). Bd. 62, S. 189—210. In den Mathematischen Annalen erscheinen: Teil IV (§ 10—§ 12) und Teil V (§ 13—§ 16). Die Literatur und eine ausführliche Einleitung findet sich in Teil I.

[2]) Man vergleiche H. Hopf [9, 9a], Behnke und Stein [1], Calabi und Rosenlicht [2], Hirzebruch [6, 7 u. 8].

[3]) Zur Einleitung und Begriffsbildung sei auf Teil I—III verwiesen. Hier wird nur das Unentbehrlichste wiederholt.

Punkten — auf den Punkt P_0 abgebildet wird. Haben G und H eine abzählbare Basis der offenen Mengen, so folgt aus diesem Hauptsatz über meromorphe Modifikationen leicht, daß die singulären Stellen von τ und v isoliert liegen[4]).

Nach diesem Rückblick seien einige Bemerkungen zu dieser Arbeit gestattet. Die Definition des σ-Prozesses in § 10 und die dort bewiesenen einfacheren Eigenschaften des σ-Prozesses sind bekannt, sollen jedoch hier gegeben werden, um sie später in der gebrauchten Form zur Hand zu haben. Insbesondere gilt das für den unentbehrlichen Satz 10.16 von H. HOPF und H. BUEHRER, dessen Formulierung sich von der bei H. HOPF [9a], § 3, Nr. 2 und 3 gegebenen erheblich unterscheidet.

In den §§ 11 und 12 werden die Sätze, daß sich jede analytische Modifikation durch σ-Prozesse und jede meromorphe Modifikation durch σ-Prozesse und deren Umkehrung gewinnen läßt, unter der Einschränkung bewiesen, daß in N höchstens endlich viele 2-dimensionale irreduzible analytische Mengen enthalten sind. Das ist z. B. in dem wichtigen Spezialfall einer kompakten Mannigfaltigkeit immer richtig; daher die etwas zu enge Überschrift dieser Arbeit und der §§ 11 und 12. Später, in Teil V, wird diese Einschränkung beseitigt werden. Die folgenden Gründe sprechen dafür, diesen Sonderfall vorwegzunehmen:

1. Im allgemeinen Fall kommt man nicht mit endlich vielen σ-Prozessen aus. Es muß noch gezeigt werden, daß diese σ-Prozesse gegen eine Grenzmannigfaltigkeit „konvergieren". Dies macht die Formulierung der Sätze und ihren Beweis erheblich umständlicher und unübersichtlicher.

2. Der kompakte Fall ist ein wesentlicher und häufiger Spezialfall; man denke nur an die birationalen Transformationen zwischen algebraischen Mannigfaltigkeiten. Daher mag es von Interesse sein, auch beim Beweis ohne den in 1. genannten „Grenzübergang" auszukommen.

3. Im allgemeinen ist es gar nicht möglich, durch Hintereinandersetzen von σ-Prozessen in Mengen eine analytische Modifikation zu erzeugen[5]), sondern die einzelnen σ-Prozesse müssen in einer etwas komplizierteren Art zusammengesetzt werden. Man vergleiche dazu Teil V.

Die Methoden bei der Untersuchung analytischer Modifikationen in § 11 sind dieselben wie bei H. HOPF [9a]. Sie lassen sich nicht unmittelbar auf meromorphe Modifikationen anwenden. Erst der in Teil III bewiesene Hauptsatz über meromorphe Modifikationen[4]) gestattet es, die Beweismethode von H. HOPF auch für meromorphe Modifikationen nutzbar zu machen.

Da in diesem und dem folgenden Teil nur noch 4-dimensionale Modifikationen auftreten, werde der Index 2 weggelassen:

$$\underset{2}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$$

§ 10. Der σ-Prozeß.

Häufig werden Konstruktionen auftreten, bei denen der folgende bekannte Satz gebraucht werden wird.

---

4) Man vergleiche die Sätze 9.3 und 9.4 in Teil III.

5) Man vergleiche das Beispiel zu Beginn von § 13. in Teil V.

Satz 10.1. Identifizierungssatz.

Voraussetzung. 1. *Jedem Element ν einer Indexmenge $\mathfrak{N}$ sei eine $2n$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit G_ν zugeordnet.*

2. *Zu jedem Paar $(\mu, \nu) \in \mathfrak{N} \times \mathfrak{N}$ sei eine offene Menge $A_{\mu\nu} \subseteq G_\nu$ gegeben; ist $A_{\mu\nu} \neq \theta$, so werde $A_{\mu\nu}$ durch $\gamma_{\mu\nu}$ pseudokonform auf $A_{\nu\mu}$ abgebildet.*

3. *Es gelte*

$$(10.1) \qquad \gamma_{\nu\varrho}^{-1}(A_{\mu\nu} \cap A_{\varrho\nu}) \subseteq A_{\mu\varrho};$$

$$(10.2) \qquad \gamma_{\mu\nu}\,\gamma_{\nu\varrho}(P) = \gamma_{\mu\varrho}(P) \qquad \text{für } P \in \gamma_{\nu\varrho}^{-1}(A_{\mu\nu} \cap A_{\varrho\nu}),$$

$$(10.3) \qquad A_{\nu\nu} = G_\nu,$$

$$(10.4) \qquad \gamma_{\nu\nu}(P) = P \qquad \text{für } P \in G_\nu.$$

4. *Sind $P \in G_\nu$ und $Q \in G_\mu$, ist im Falle $P \in A_{\mu\nu}$ auch noch $Q \neq \gamma_{\mu\nu}(P)$, so habe P eine Umgebung $U \subseteq G_\nu$ und Q eine Umgebung $V \subseteq G_\mu$, so daß $V \cap \gamma_{\mu\nu}(U \cap A_{\mu\nu})$ leer ist.*

Behauptung. *Eine $2n$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit H existiert, für die gilt:*

1. *Eine pseudokonforme Abbildung α_ν bildet G_ν auf $H_\nu \subseteq H$ für $\nu \in \mathfrak{N}$ ab, wobei $H = \bigcup\limits_{\nu \in \mathfrak{N}} H_\nu$ ist.*

2. *Für $(\mu, \nu) \in \mathfrak{N} \times \mathfrak{N}$ ist $\alpha_\nu(A_{\mu\nu}) = \alpha_\mu(A_{\nu\mu}) = H_\nu \cap H_\mu$.*

3. *Für $Q \in A_{\mu\nu}$ ist $\alpha_\mu^{-1}\alpha_\nu(Q) = \gamma_{\mu\nu}(Q)$.*

4. *Die Forderungen 1. bis 3. bestimmen H bis auf analytische Äquivalenz eindeutig; ist nämlich $\tilde{H}$ eine zweite solche Mannigfaltigkeit, die mit $\tilde{\alpha}_\nu$ und $\tilde{H}_\nu$ statt α_ν und H_ν die Forderungen 1. bis 3. erfüllt, so gibt es eine pseudokonforme Abbildung π von H auf $\tilde{H}$, für die gilt*

$$(10.5) \qquad \pi(Q) = \tilde{\alpha}_\nu\,\alpha_\nu^{-1}(Q) \qquad \text{für } Q \in H_\nu,$$

$$(10.6) \qquad \pi(H_\nu) = \tilde{H}_\nu.$$

Der σ-Prozeß möge zunächst in dem Spezialfall eines Koordinatenraumes definiert werden, was im folgenden Satz geschieht.

Satz 10.2. Beispiel einer Modifikation (σ-Prozeß)[6]).

Voraussetzung. *Auf der Zahlenkugel S^2 seien homogene Koordinaten $\zeta = (\zeta_1 : \zeta_2)$ eingeführt. Außerdem werde gesetzt*

$${}^0G = \{(z_1, z_2) \mid |z_1| < 1,\ |z_2| < 1\},$$

$${}^0M = \{(0,0)\}, \qquad {}^0A = {}^0G - {}^0M,$$

$${}^0H = \{(\mathfrak{z}; \zeta) \mid z_1\zeta_2 - z_2\zeta_1 = 0,\ \mathfrak{z} = (z_1, z_2) \in {}^0G,\ \zeta = (\zeta_1 : \zeta_2) \in S^2\},$$

$${}^0N = {}^0M \times S^2, \qquad {}^0B = {}^0H - {}^0N$$

$${}^0\sigma(z_1, z_2) = (z_1, z_2;\ z_1 : z_2) \qquad \text{für } (z_1, z_2) \in {}^0A,$$

$${}^0v(\mathfrak{z}, \zeta) = \mathfrak{z} \qquad \text{für } (\mathfrak{z}; \zeta) \in {}^0H,$$

$$\varrho(\mathfrak{z}, \zeta) = \zeta \qquad \text{für } (\mathfrak{z}; \zeta) \in {}^0H.$$

[6]) Der aus der algebraischen Geometrie bekannte „σ-Prozeß" wurde unter diesem Namen neuerdings von H. Hopf in die Theorie der komplexen Mannigfaltigkeiten eingeführt. Die hier gegebene Definition stammt von H. Hopf. Zum σ-Prozeß vergleiche man H. Hopf [9, 9a], Hirzebruch [6, 7, 8], Behnke u. Stein [1], Calabi u. Rosenlicht [2].

Behauptung. 1. *Es ist ${}^0H$ eine 4-dimensionale komplexe Teilmannigfaltigkeit der 6-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit ${}^0G \times S^2$; es hat ${}^0H$ nur gewöhnliche Punkte*[7]).

2. *In ${}^0H$ ist ${}^0N$ eine kompakte komplexe Kurve, die nur aus gewöhnlichen Punkten besteht und durch ϱ konform aus S^2 abgebildet wird.*

3. *Durch ${}^0\sigma$ wird ${}^0A$ pseudokonform auf ${}^0B$ abgebildet. Die Umkehrung von ${}^0\sigma$ ist ${}^0v$. Es ist*

$$ {}^0\mathfrak{S} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} {}^0G, {}^0A, {}^0M, {}^0\sigma \\ {}^0H, {}^0B, {}^0N, {}^0v \end{pmatrix} $$

eine analytische und beiderseits offene Modifikation.

Beweis. 1. Setzt man ${}^0H_\nu = {}^0H \cap \{(\mathfrak{z}; \zeta) \mid \zeta_\nu \neq 0\}$, so ist ${}^0H = {}^0H_1 \cup {}^0H_2$. Durch

$$ {}^0\beta_1(u_1, u_2) = (u_1, u_1 u_2;\ 1 : u_2) \tag{10.7} $$

wird ${}^0H_1' = \{(u_1, u_2) \mid |u_1| < 1;\ |u_1 u_2| < 1\}$ topologisch auf ${}^0H_1 \subseteq {}^0G \times S^2$ und durch

$$ {}^0\beta_2(v_1, v_2) = (v_1 v_2, v_2;\ v_1 : 1) \tag{10.8} $$

wird ${}^0H_2' = \{(v_1, v_2) \mid |v_1 v_2| < 1;\ |v_2| < 1\}$ topologisch auf ${}^0H_2 \subseteq {}^0G \times S^2$ abgebildet. In ${}^0H_1 \cap {}^0H_2$ gilt

$$ \begin{aligned} &{}^0\beta_2^{-1}\,{}^0\beta_1(u_1, u_2) = \left(\frac{1}{u_2}, u_1 u_2\right) \\ &\text{für } \mathfrak{u} = (u_1, u_2) \in {}^0\beta_1^{-1}({}^0H_1 \cap {}^0H_2) = \{\mathfrak{u} \mid u_2 \neq 0\} \cap {}^0H_1', \end{aligned} \tag{10.9} $$

$$ \begin{aligned} &{}^0\beta_1^{-1}\,{}^0\beta_2(v_1, v_2) = \left(v_1 v_2, \frac{1}{v_1}\right) \\ &\text{für } \mathfrak{v} = (v_1, v_2) \in {}^0\beta_2^{-1}({}^0H_1 \cap {}^0H_2) = \{\mathfrak{v} \mid v_1 \neq 0\} \cap {}^0H_2'. \end{aligned} \tag{10.10} $$

Daher ist ${}^0H$ eine komplexe Mannigfaltigkeit.

In ${}^0G \times \{\zeta \mid \zeta_1 \neq 0\}$ hat ${}^0G \times S^2$ die Parameterdarstellung

$$ \delta(\mathfrak{y}, t) = (y_1, y_2;\ 1 : t) \quad \text{mit } |y_1| < 1, |y_2| < 1, |t| < \infty \tag{10.11} $$

und in ${}^0G \times \{\zeta \mid \zeta_2 \neq 0\}$ hat ${}^0G \times S^2$ die Parameterdarstellung

$$ \varepsilon(\mathfrak{x}, s) = (x_1, x_2; s : 1) \quad \text{mit } |x_1| < 1, |x_2| < 1, |s| < \infty. \tag{10.12} $$

Auf $({}^0G \times \{\zeta \mid \zeta_1 \neq 0\}) \cap H = H_1$ hat die Funktionalmatrix

$$ \frac{\partial\, \delta^{-1}\,{}^0\beta_1(u_1, u_2)}{\partial(u_1, u_2)} = \begin{pmatrix} 1 & u_2 & 0 \\ 0 & u_1 & 1 \end{pmatrix} \tag{10.13} $$

den Rang 2. Ebenso hat auf $({}^0G \times \{\zeta \mid \zeta_2 \neq 0\}) \cap H = H_2$ die Funktionalmatrix

$$ \frac{\partial \varepsilon^{-1}\,{}^0\beta_2(v_1, v_2)}{\partial(v_1, v_2)} = \begin{pmatrix} v_2 & 0 & 1 \\ v_1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{10.14} $$

den Rang 2. Daher hat die Teilmannigfaltigkeit ${}^0H$ von ${}^0G \times S^2$ nur gewöhnliche Punkte.

2. Da ${}^0\beta_1^{-1}({}^0N \cap {}^0H_1) = \{(0, u_2) \mid |u_2| < \infty\}$ und ${}^0\beta_2^{-1}({}^0N \cap {}^0H_2) = \{(v_1, 0) \mid |v_1| < \infty\}$ ist, stellt ${}^0N$ in ${}^0H$ eine kompakte komplexe Kurve dar, die nur gewöhnliche Punkte hat. Durch ϱ wird ${}^0N$ konform auf S^2 abgebildet.

---

[7]) Man kann ${}^0H$ als den Raum der „zum Nullpunkt gerichteten Linienelemente" von ${}^0G$ ansehen.

Auf ${}^0A$ ist ${}^0\sigma(z_1, z_2) = (z_1, z_2; z_1 : z_2)$ erklärt und bildet ${}^0A$ pseudokonform auf ${}^0B$ ab. Die Umkehrung ${}^0v$ wird durch ${}^0v(\mathfrak{z}, \zeta) = \mathfrak{z}$ analytisch auf H fortgesetzt und bildet ${}^0N$ auf ${}^0M$ ab. Daher ist ${}^0\mathfrak{S}$ eine analytische und somit auch offene Modifikation. Strebt $\mathfrak{z}_\nu = (z_1^\nu, z_2^\nu) \to 0$ für $\nu \to \infty$ mit $\mathfrak{z}_\nu \in {}^0A$, so hat die Punktfolge $\zeta_\nu = (z_1^\nu : z_2^\nu) \in S^2$ einen Häufungspunkt $\zeta \in S^2$ und für eine Teilfolge μ_ν strebt

$$\tau(\mathfrak{z}_{\mu_\nu}) = (\mathfrak{z}_{\mu_\nu}, \zeta_{\mu_\nu}) \to (0, \zeta) \in {}^0N \tag{10.15}$$

für $\nu \to \infty$. Die Modifikation ${}^0\mathfrak{S}^{-1}$ ist offen; also ist ${}^0\mathfrak{S}$ analytisch und beiderseits offen, w.z.b.w.

Die Modifikation ${}^0\mathfrak{S}$ gibt den σ-Prozeß bis auf analytische Äquivalenz:

Definition 10.1. Der σ-Prozeß in einem Punkt[6]).

Eine Modifikation $\mathfrak{S} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *heiße ein σ-Prozeß im Punkt P_0, wenn M aus dem einzigen Punkt P_0 besteht und wenn es eine offene Umgebung ${}_0G$ von M und ${}_0H$ von N gibt, so daß die Modifikationen*

$$ {}_0\mathfrak{S} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} {}_0G, A \cap {}_0G, M, \tau \\ {}_0H, B \cap {}_0H, N, v \end{pmatrix}, \tag{10.16}$$

$$ {}^0\mathfrak{S} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} {}^0G, {}^0A, {}^0M, {}^0\sigma \\ {}^0H, {}^0B, {}^0N, {}^0v \end{pmatrix} \tag{10.17}$$

(man vergleiche Satz 10.2) äquivalent sind[8]). *Die Menge N heiße eine Hopfsche σ-Sphäre oder Trägersphäre. Es werde*

$$\tau = \sigma_{P_0}, \quad v = v_{P_0}, \quad v_{P_0}(Q, H) = \vartheta_{P_0}(Q) = \vartheta(Q) \qquad \text{für } Q \in H, \tag{10.18}$$

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} G, A, P_0, \sigma_{P_0} \\ H, B, N, v_{P_0} \end{pmatrix}, \tag{10.19}$$

$$H = \mathfrak{S}_{P_0} G, \quad N = \mathfrak{S}_{P_0} P_0 = \mathfrak{S}\, P_0 \tag{10.20}$$

gesetzt.

Satz 10.3. Die Existenz des σ-Prozesses[6]).

Ist P_0 ein Punkt einer 4-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit G, so existiert ein σ-Prozeß in P_0.

Beweis. Eine Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}(G)$ bildet ${}^0G = \{\mathfrak{z} \mid |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$ pseudokonform auf ${}_0G \subseteq G$ ab, wobei $\alpha(0) = P_0$ ist. Die Bezeichnungen von Satz 10.2 werden übernommen. Es seien $\{P_0\} = M$ und $A = G - M$. Nun werde die Konstruktion von Satz 10.1 (Identifizierungssatz) gemäß der folgenden Tabelle durchgeführt:

Satz 10.1	$\mathfrak{N}$	G_1	G_2	A_{11}	A_{22}	A_{12}	A_{21}	γ_{11}
Hier	$\{1,2\}$	A	${}^0H$	A	${}^0H$	${}^0B$	$A \cap {}_0G$	$\gamma_{11}(P) = P$ für $P \in A$

Satz 10.1	γ_{12}	γ_{21}	γ_{22}
Hier	$\gamma_{12} = \alpha\, {}^0v$ auf ${}^0B$	$\gamma_{21} = {}^0\sigma\, \alpha^{-1}$ auf $A \cap {}_0G$	$\gamma_{22}(P) = P$ auf ${}^0H$

Die Voraussetzungen 1. bis 3. von Satz 10.1 prüft man leicht nach. Die Voraussetzung 4 ergibt sich so:

[8]) Man vergleiche (1.8) bis (1.11) in Teil I.

4. Sind $P \in A$, $Q \in A$ oder $P \in {}^0H$, $Q \in {}^0H$ und sind die Punkte P und Q verschieden, so gibt es Umgebungen U von P und V von Q mit $U \cap V = \theta$; also ist $\gamma_{11}(U \cap A) \cap V = U \cap V = \theta$ oder $\gamma_{22}(U \cap {}^0H) \cap V = U \cap V = \theta$.

Sind $P \in A$, $Q \in {}^0H$ und ist $P \in {}_0G$ mit $\gamma_{21}(P) \neq Q$, so gibt es Umgebungen $U' \subset {}^0A$ von $\alpha^{-1}(P) \neq 0$ und $V' \subset {}^0G$ von ${}^0v(Q) \neq \alpha^{-1}(P)$ mit $U' \cap V' = \theta$. Es ist $V = {}^0v^{-1}(V')$ eine offene Umgebung von Q. Es ist $U = \alpha(U')$ eine offene Umgebung von P. Dann ist

$$\begin{aligned}\gamma_{21}(U \cap {}_0G \cap A) \cap V &= {}^0\sigma\, \alpha^{-1}(U \cap {}_0G \cap A) \cap {}^0v^{-1}(V') \\ &= {}^0\sigma\, \alpha^{-1}(U \cap {}_0G \cap A) \cap {}^0v^{-1}(V') \cap {}^0B \\ &= {}^0\sigma\, \alpha^{-1}(U \cap {}_0G \cap A) \cap {}^0\sigma(V' \cap {}^0A) \\ &= {}^0\sigma(U' \cap V' \cap {}^0A) = \theta.\end{aligned} \tag{10.21}$$

Sind $P \in A$, $Q \in {}^0H$ und ist $P \in A - {}_0G$, so ist $\alpha\,{}^0v(Q) \in {}_0G$. Es gibt eine Umgebung U von P und $V' \subseteq {}_0G$ von $\alpha\,{}^0v(Q)$, so daß $U \cap V'$ leer ist. Es ist $V = {}^0v^{-1}\alpha^{-1}(V')$ eine offene Umgebung von Q und es gilt

$$\begin{aligned}\gamma_{21}(U \cap {}_0G \cap A) \cap V &= \gamma_{21}(U \cap {}_0G \cap A) \cap {}^0B \cap V \\ &= \gamma_{21}(U \cap {}^0G \cap A) \cap {}^0\sigma\, \alpha^{-1}({}_0G \cap A \cap V') \\ &= \gamma_{21}(U \cap V' \cap {}_0G \cap A) = \theta.\end{aligned} \tag{10.22}$$

Die Voraussetzungen von Satz 10.1 sind erfüllt.

Man erhält also eine 4-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit H, deren Eigenschaften sich aus Satz 10.1 gemäß der Übersetzungstabelle ergeben:

Satz 10.1	α_ν	H_1	H_2	$H_1 \cap H_2 = \alpha_1(A_{21}) = \alpha_2(A_{12})$
Hier	η_ν	$H_1 = \eta_1(A)$	$H_2 = \eta_2({}^0H)$	$H_1 \cap H_2 = \eta_1(A \cap {}_0G) = \eta_2({}^0B)$

Satz 10.1	$\alpha_1^{-1}\alpha_2(Q) = \gamma_{12}(Q)$ für $Q \in A_{12}$
Hier	$\eta_1^{-1}\eta_2(Q) = \gamma_{12}(Q) = \alpha\,{}^0v(Q)$ für $Q \in {}^0B$

Satz 10.1	$\alpha_2^{-1}\alpha_1(Q) = \gamma_{21}(Q)$ für $Q \in A_{21}$
Hier	$\eta_2^{-1}\eta_1(Q) = \gamma_{21}(Q) = {}^0\sigma\, \alpha^{-1}(Q)$ für $Q \in {}_0G \cap A$

Durch $\sigma(P) = \eta_1(P)$ wird A pseudokonform auf $B = H_1$ abgebildet. Die Umkehrung sei $v(Q)$ für $Q \in B$. Es ist

$$\begin{aligned}N = H - B &= H_1 \cup H_2 - H_1 = H_2 - H_1 = H_2 - H_1 \cap H_2 \\ &= \eta_2({}^0H - {}^0B) = \eta_2({}^0N) \subset H_2.\end{aligned} \tag{10.23}$$

Da ${}^0N$ kompakt ist, ist auch N kompakt. Mit ${}^0N$ ist also auch N analytisch und hat die Dimension 2. Daher ist $\mathfrak{S} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \sigma \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ eine Modifikation. Die Menge M besteht aus dem einzigen Punkt P_0. Durch α^{-1} wird ${}_0G$ pseudokonform auf ${}^0G$ abgebildet, wobei

$$\alpha^{-1}({}_0G) = {}^0G, \quad \alpha^{-1}({}_0G \cap A) = {}^0A, \quad \alpha^{-1}(M) = \{0\}. \tag{10.24}$$

Durch η_2^{-1} wird H_2 pseudokonform auf ${}^0H$ abgebildet, wobei

$$\eta_2^{-1}(H_2) = {}^0H, \quad \eta_2^{-1}(B \cap H_2) = {}^0B, \quad \eta_2^{-1}(N) = {}^0N, \tag{10.24}$$

$$\eta_2\,{}^0\sigma\, \alpha^{-1}(P) = \eta_2\gamma_{21}(P) = \eta_1(P) = \sigma(P) \quad \text{für } P \in {}_0G \cap A, \tag{10.25}$$

$$\alpha\,{}^0v\, \eta_2^{-1}(Q) = \gamma_{21}\, \eta_2^{-1}(P) = \eta_1^{-1}(Q) = v(Q) \text{ für } Q \in B \cap H_2. \tag{10.26}$$

Die Modifikation ${}_0\mathfrak{S} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} {}_0G, A \cap {}_0G, M, \sigma \\ H_1, B \cap H_1, N, v \end{pmatrix}$ und ${}^0\mathfrak{S}$ sind äquivalent. Also ist $\mathfrak{S}$ ein σ-Prozeß in P_0, w.z.b.w.

Nach der Existenz soll jetzt die Eindeutigkeit des σ-Prozesses bewiesen werden.

Satz 10.4. Eindeutigkeit des σ-Prozesses[6]).

Voraussetzung. *Zwei σ-Prozesse*

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} G, A, P_0, \sigma_{P_0} \\ H, B, N, v_{P_0} \end{pmatrix} \quad und \quad \tilde{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} G, A, P_0, \tilde{\sigma}_{P_0} \\ \tilde{H}, \tilde{B}, \tilde{N}, \tilde{v}_{P_0} \end{pmatrix} \tag{10.27}$$

seien gegeben.

Behauptung. *Die Modifikationen $\mathfrak{S}$ und $\tilde{\mathfrak{S}}$ sind äquivalent; genauer: es gibt eine pseudokonforme Abbildung δ von H auf $\tilde{H}$, so daß gilt*

$$\delta(Q) = \tilde{\sigma}_{P_0} v_{P_0}(Q) \qquad \text{für } Q \in B \tag{10.28}$$

$$\delta(H) = \tilde{H}, \quad \delta(B) = \tilde{B}, \quad \delta(N) = \tilde{N}. \tag{10.29}$$

Beweis. Die Bezeichnungen von Satz 10.2 und seinem Beweis werden verwandt. Gemäß Definition 10.1 wird eine offene Umgebung ${}_0G$ von P_0 durch eine Abbildung α auf ${}^0G$, eine offene Umgebung ${}_0\tilde{G}$ von P_0 durch eine Abbildung $\tilde{\alpha}$ auf ${}^0G$, eine offene Umgebung ${}_0H$ von N durch eine Abbildung β auf ${}^0H$ und eine offene Umgebung ${}_0\tilde{H}$ von $\tilde{N}$ durch eine Abbildung $\tilde{\beta}$ auf ${}^0H$ pseudokonform so abgebildet, daß gilt

$$\left\{\begin{array}{llll} \alpha(A \cap {}_0G) = {}^0A, & \alpha(P_0) = 0, & \sigma_{P_0} = \beta^{-1}\,{}^0\sigma\,\alpha & \text{auf } A \cap {}_0G, \\ \tilde{\alpha}(A \cap {}_0\tilde{G}) = {}^0A, & \tilde{\alpha}(P_0) = 0, & \tilde{\sigma}_{P_0} = \tilde{\beta}^{-1}\,{}^0\sigma\,\tilde{\alpha} & \text{auf } A \cap {}_0\tilde{G}, \\ \beta(B \cap {}_0H) = {}^0B, & \beta({}^0N) = N, & v_{P_0} = \alpha^{-1}\,{}^0v\,\beta & \text{auf } B \cap {}_0H, \\ \tilde{\beta}(\tilde{B} \cap {}_0\tilde{H}) = {}^0B, & \tilde{\beta}({}^0N) = \tilde{N}, & \tilde{v}_{P_0} = \tilde{\alpha}^{-1 0}\,v\,\tilde{\beta} & \text{auf } \tilde{B} \cap {}_0\tilde{H}. \end{array}\right. \tag{10.30}$$

Es ist $U = \alpha({}_0G \cap {}_0\tilde{G})$ eine offene Umgebung des Nullpunktes und $V = {}^0\sigma(U \cap {}^0A) \cup {}^0N$ offen. Durch

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{z}) = (g_1(z_1, z_2),\ g_2(z_1, z_2)) = \tilde{\alpha}\,\alpha^{-1}(\mathfrak{z}) \tag{10.31}$$

wird U pseudokonform auf die offene Umgebung $\tilde{U} = \tilde{\alpha}(G_0 \cap \tilde{G}_0)$ des Nullpunktes abgebildet. Es ist $\mathfrak{g}(0) = 0$ und

$$g_\nu(z_1, z_2) = a_{\nu 1} z_1 + a_{\nu 2} z_2 + h_\nu(z_1, z_2), \tag{10.32}$$

wobei $h_\nu(z_1, z_2)$ in U analytisch ist und mit seinen ersten Ableitungen im Nullpunkt verschwindet. Es ist

$$h_\nu(u_1, u_1 u_2) = u_1^2\, f_{\nu 1}(u_1, u_2), \tag{10.33}$$

$$h_\nu(v_1 v_2, v_2) = v_2^2\, f_{\nu 2}(v_1, v_2), \tag{10.34}$$

wobei $f_{\nu 1}$ an allen Stellen (u_1, u_2) mit $(u_1, u_1 u_2) \in U$ und $f_{\nu 2}$ an allen Stellen (v_1, v_2) mit $(v_1 v_2, v_2) \in U$ analytisch sind. Die Determinante $\det(a_{\mu\nu})$ ist nicht Null. Mit den Bezeichnungen des Beweises von Satz 10.2 gilt

$${}^0\sigma\,\tilde{\alpha}\,\alpha^{-1}\,{}^0v\,{}^0\beta_1(u_1, u_2) = (z_1, z_2;\ \zeta_1 : \zeta_2) \tag{10.35}$$

mit

$$
(10.36)\qquad
\begin{aligned}
z_1 &= g_1(u_1, u_1 u_2)\\
z_2 &= g_2(u_1, u_1 u_2)\\
\zeta_1 &= a_{11} + a_{12} u_2 + u_1 f_{11}(u_1, u_2)\\
\zeta_2 &= a_{21} + a_{22} u_2 + u_1 f_{21}(u_1, u_2)
\end{aligned}
$$

in der offenen Umgebung ${}^0\beta_1^{-1}(V \cap {}^0H_1)$ der Ebene ${}^0N_1' = {}^0\beta_1^{-1}({}^0N \cap {}^0H_1) = \{(0, u_2) \mid |u_2| < \infty\}$ mit Ausnahme dieser Ebene selbst. Die Abbildung ${}^0\sigma\,\tilde{\alpha}\,\alpha^{-1}\,{}^0v\,{}^0\beta_1$ läßt sich aus ${}^0\beta_1^{-1}(V \cap {}^0H_1) - {}^0N_1'$ gemäß (10.36) pseudokonform auf ${}^0\beta_1^{-1}(V \cap {}^0H_1)$ fortsetzen. Also läßt sich ${}^0\sigma\,\tilde{\alpha}\,\alpha^{-1}\,{}^0v$ aus $V \cap {}^0H_1 \cap {}^0B$ pseudokonform in $V \cap {}^0H_1$ fortsetzen. Ebenso zeigt man, daß sich ${}^0\sigma\,\tilde{\alpha}\,\alpha^{-1}\,{}^0v$ aus $V \cap {}^0H_2 \cap {}^0B$ pseudokonform in $V \cap {}^0H_2$ fortsetzen läßt. Da $N = V - {}^0B$ und ${}^0H_1 \cup {}^0H_2 = {}^0H$ ist, läßt sich ${}^0\sigma\,\tilde{\alpha}\,\alpha^{-1}\,{}^0v$ aus $V \cap {}^0B$ pseudokonform zu γ in V fortsetzen. Für $(0, 0;\ \zeta_1 : \zeta_2) \in {}^0N$ ist

$$
(10.37)\qquad \gamma(0, 0;\ \zeta_1 : \zeta_2) = (0, 0;\ (a_{11}\zeta_1 + a_{12}\zeta_2) : (a_{21}\zeta_1 + a_{22}\zeta_2)).
$$

Also bildet γ die Trägersphäre ${}^0N$ pseudokonform auf sich ab. Auf $\beta^{-1}(V) \cap B = \beta^{-1}\,{}^0\sigma(U \cap {}^0A) = \beta^{-1}(V \cap {}^0B)$ gilt

$$
(10.38)\qquad \tilde{\sigma}_{P_0} v_{P_0}(Q) = \tilde{\beta}^{-1}\,{}^0\sigma\,\tilde{\alpha}\,\alpha^{-1}\,{}^0v\,\beta(Q) = \tilde{\beta}^{-1}\,\gamma\,\beta(Q)
$$

Die Abbildung $\tilde{\sigma}_{P_0} v_{P_0}$ wird aus B in H analytisch durch

$$
(10.39)\qquad \delta(Q) = \begin{cases} \tilde{\sigma}_{P_0} v_{P_0}(Q) & \text{für } Q \in B\\ \tilde{\beta}^{-1}\,\gamma\,\beta(Q) & \text{für } Q \in N \subseteq \beta^{-1}(V) \end{cases}
$$

fortgesetzt, für die

$$
(10.40)\qquad \delta(B) = \tilde{\sigma}_{P_0} v_{P_0}(B) = \tilde{\sigma}_{P_0}(A) = \tilde{B},
$$

$$
(10.41)\qquad \delta(N) = \tilde{\beta}\,\gamma\,\beta^{-1}(N) = \tilde{\beta}\,\gamma({}^0N) = \tilde{\beta}({}^0N) = \tilde{N},
$$

$$
(10.42)\qquad \delta(H) = \delta(B) \cup \delta(N) = \tilde{B} \cup \tilde{N} = \tilde{H}
$$

gilt, und die jeweils auf B und auf N eineindeutig, also wegen $\delta(B) \cap \delta(N) = \theta$, auf H eineindeutig ist, w.z.b.w.

Satz 10.5. Der σ-Prozeß als „einfachste“ Modifikation[6]).

Voraussetzung. *Eine Modifikation* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau\\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei gegeben.*

Behauptung. *Dann und nur dann ist $\mathfrak{M}$ ein σ-Prozeß in einem Punkt, wenn gilt*

1. *Die Modifikation $\mathfrak{M}$ ist analytisch und beiderseits offen.*
2. *Die Menge M besteht aus einem einzigen Punkt.*
3. *Die Menge N ist eine kompakte, irreduzible analytische Menge der Dimension 2.*

Anmerkung. Ist $\mathfrak{M}$ offen und besteht $\mathfrak{M}$ nur aus einem Punkt, so verhält sich $v(Q)$ auf N bestimmt und $v(Q, H)$ ist auf N analytisch, d. h. $\mathfrak{M}$ ist analytisch.

Beweis. a) Die Modifikation $\mathfrak{M}$ sei ein σ-Prozeß. Dann gibt es eine offene Umgebung ${}_0G$ von M und eine offene Umgebung ${}_0H$ von N, so daß die

Modifikationen

$$(10.43)\qquad {}_0\mathfrak{S} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} {}_0G, A \cap {}_0G, M, \tau \\ {}_0H, B \cap {}_0H, N, v \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad {}^0\mathfrak{S} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} {}^0G, {}^0A, {}^0M, {}^0\sigma \\ {}^0H, {}^0B, {}^0N, {}^0v \end{pmatrix}$$

äquivalent sind. Mit ${}^0\mathfrak{S}$ erfüllt dann auch ${}_0\mathfrak{S}$ die Forderungen 1. bis 3. Sie gelten also auch für $\mathfrak{M}$, w.z.b.w.

b) Die Modifikation $\mathfrak{M}$ erfülle die Forderungen 1. bis 3. Nach Satz 7.1 ist $v(Q, H) = P_0$ für $Q \in N$, wenn P_0 der einzige Punkt von M ist. In P_0 werde der σ-Prozeß $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} G, A, P_0, \sigma_{P_0} \\ \tilde{H}, \tilde{B}, \tilde{N}, v_{P_0} \end{pmatrix}$ ausgeführt. Nach Satz 5.9 (mit $\gamma(P) = P$ für $P \in G$ und Anmerkung 2) ist die Modifikation $\mathfrak{M}\mathfrak{S}^{-1} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} \tilde{H}, \tilde{B}, \tilde{N}, \tau v_{P_0} \\ H, B, N, v\sigma_{P_0} \end{pmatrix}$ beiderseits offen und meromorph. Setzt man $\tau^* = \tau\, v_{P_0}$ und $v^* = v\,\sigma_{P_0}$ so sind gemäß Satz 9.3 die Abbildungen τ^* und v^* je in höchstens einem Punkt singulär. Angenommen, τ^* ist im Punkt $Q_0 \in \tilde{N}$ singulär, dann verhält sich v^* auf N regulär mit Ausnahme einer Menge D, die höchstens einen Punkt enthält. Für $Q \in N - D$ gilt $v^*(Q, H) = Q_0$. Nun werden 3 komplexe Kurven L_ν durch P_0 gewählt, die nur gewöhnliche Punkte haben, und deren Tangenten in P_0 paarweise verschieden sind. Ihnen entsprechen komplexe Kurven $\tilde{L}_\nu = \sigma_{P_0}(L_\nu, L_\nu)$ in $\tilde{H}$ mit $\tilde{L}_\nu \cap \tilde{N} = \bar{\tilde{L}}_\nu \cap \tilde{N} = \{Q^\nu\}$ und $L_\nu^* = \tau(L_\nu, L_\nu)$ in H mit $L_\nu^* \cap N = \bar{L}_\nu^* \cap N = \{{}^*Q^\nu\}$ für $\nu = 1, 2, 3$. Nach Satz 6.4 ist $Q^\nu \neq Q^\mu$ und ${}^*Q^\nu \neq {}^*Q^\mu$ für $\nu \neq \mu$; weil D höchstens einen Punkt enthält, gibt es zwei Punkte ${}^*Q^{\nu_1} \in N - D$ und ${}^*Q^{\nu_2} \in N - D$, für die

$$Q^{\nu_1} = v^*({}^*Q^{\nu_1}, L_{\nu_1}^*) = v^*({}^*Q^{\nu_1}, H) = Q_0 = v^*({}^*Q^{\nu_2}, H) = v^*({}^*Q^{\nu_2}, L_{\nu_2}^*) = Q^{\nu_2}$$

gilt, was falsch ist. Daher ist τ^* in $\tilde{N}$ regulär. Ebenso folgt, daß v^* in N regulär ist. Nach Satz 5.10 läßt sich $\tau\, v_{P_0}$ zu einer pseudokonformen Abbildung β von $\tilde{H}$ auf H mit $\beta(\tilde{B}) = B$ und $\beta(\tilde{N}) = N$ fortsetzen, wobei $\beta^{-1}\tau(P) = \sigma_{P_0}(P)$ für $P \in A$ ist. Daher sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{S}$ äquivalente Modifikationen und $\mathfrak{M}$ ist ein σ-Prozeß, w.z.b.w.

Die Behauptung, daß eine Modifikation, die die 3 Forderungen von Satz 10.5 erfüllt, ein σ-Prozeß in einem Punkt ist, wird sich später noch auf anderem Weg (nach Hopf, Satz 11.3) ergeben. Nun mögen noch einige Eigenschaften des σ-Prozesses bewiesen werden.

Satz 10.6. Eigenschaften eines σ-Prozesses[6]).

Voraussetzung. *Ein σ-Prozeß $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} G, A, P_0, \sigma_{P_0} \\ H, B, N, v_{P_0} \end{pmatrix}$ sei gegeben.*

1. *Die Abbildung $v_{P_0}(Q, H)$ hat auf N die Vielfachheit* 1.

2. *Die Mannigfaltigkeit H hat zwei Karten U_{β_1} mit $\beta_1 \in \mathfrak{P}(H)$ und U_{β_2} mit $\beta_2 \in \mathfrak{P}(H)$, die Mannigfaltigkeit G hat eine Karte U_α mit $\alpha \in \mathfrak{P}(G)$, so daß gilt:*

a) Durch β_1 wird $U'_{\beta_1} = \{(u_1, u_2) \mid |u_1| < 1, |u_1 u_2| < 1\}$ pseudokonform auf U_{β_1} abgebildet, wobei gilt:

$$(10.44)\qquad N'_1 = \{(0, u_2) \mid |u_2| < \infty\} = \beta_1^{-1}(N \cap U_{\beta_1}).$$

b) Durch β_2 wird $U'_{\beta_2} = \{(v_1, v_2) \mid |v_1 v_2| < 1, |v_2| < 1\}$ pseudokonform auf U_{β_2} abgebildet, wobei gilt:

$$(10.45)\qquad N'_2 = \{(v_1, 0) \mid |v_1| < \infty\} = \beta_2^{-1}(N \cap U_{\beta_2}).$$

c) Es ist $U_{\beta_1} \cup U_{\beta_2}$ eine offene Umgebung von N. Es gilt

$$(10.46)\quad \beta_2^{-1}\,\beta_1(u_1, u_2) = \left(\frac{1}{u_2},\, u_1 u_2\right)$$

$$\textit{für}\ \mathfrak{u} = (u_1, u_2) \in \beta_1^{-1}(U_{\beta_1} \cap U_{\beta_2}) = \{\mathfrak{u} \mid u_2 \neq 0\} \cap U'_{\beta_1}$$

$$(10.47)\quad \beta_1^{-1}\,\beta_2(v_1, v_2) = \left(v_1 v_2, \frac{1}{v_1}\right)$$

$$\textit{für}\ \mathfrak{v} = (v_1, v_2) \in \beta_2^{-1}(U_{\beta_1} \cap U_{\beta_2}) = \{\mathfrak{v} \mid v_2 \neq 0\} \cap U'_{\beta_2}.$$

d) Durch α wird $U'_\alpha = \{(z_1, z_2) \mid |z_1| < 1,\ |z_2| < 1\}$ pseudokonform auf $U_\alpha = v_{P_0}(U_{\beta_1} \cap U_{\beta_2}, H)$ abgebildet, wobei $\alpha(0) = P_0$ ist.

e) Es ist

$$(10.48)\quad \alpha^{-1} v_{P_0}(\beta_1(\mathfrak{u}), H) = (u_1, u_1 u_2) \qquad \textit{für}\ \mathfrak{u} \in U'_{\beta_1},$$

$$(10.49)\quad \alpha^{-1} v_{P_0}(\beta_2(\mathfrak{u}), H) = (v_1 v_2, v_2) \qquad \textit{für}\ \mathfrak{v} \in U'_{\beta_2},$$

$$(10.50)\quad \beta_1^{-1} \sigma_{P_0} \alpha(\mathfrak{z}) = \left(z_1, \frac{z_2}{z_1}\right) \qquad \textit{für}\ 0 < |z_1| < 1,\ |z_2| < 1,$$

$$(10.51)\quad \beta_2^{-1} \sigma_{P_0} \alpha(\mathfrak{z}) = \left(\frac{z_1}{z_2}, z_2\right) \qquad \textit{für}\ |z_1| < 1,\ 0 < |z_2| < 1.$$

B e w e i s. Die Bezeichnungen von Satz 10.2 und seinem Beweis werden benutzt. Es gibt Umgebungen U_α von P_0 und ${}_0H$ von N, so daß die Modifikationen ${}_0\mathfrak{S} = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} U_\alpha, & A \cap U_\alpha, & P_0, & \sigma_{P_0} \\ {}_0H, & B \cap {}_0H, & N, & v_{P_0} \end{pmatrix}$ und ${}^0\mathfrak{S} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} {}^0G, {}^0A, {}^0M, {}^0\sigma \\ {}^0H, {}^0B, {}^0N, {}^0v \end{pmatrix}$ äquivalent sind. Also wird $U'_\alpha = {}^0G$ durch eine Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}(G)$ pseudokonform auf U_α abgebildet, wobei $\alpha(0) = P_0$ ist; es gibt eine Abbildung γ, die ${}^0H$ pseudokonform auf ${}_0H$ mit $\gamma({}^0N) = N$ abbildet, wobei $\gamma^{-1}\sigma_{P_0}\alpha = {}^0\sigma$ auf ${}^0A$ ist. Setzt man

$$(10.52)\quad \beta_1 = \gamma\, {}^0\beta_1 \ \text{ auf } {}^0H'_1, \quad U'_{\beta_1} = {}^0H'_1, \quad U_{\beta_1} = \beta_1(U'_{\beta_1}),$$

$$(10.53)\quad \beta_2 = \gamma\, {}^0\beta_1 \ \text{ auf } {}^0H'_2, \quad U'_{\beta_2} = {}^0H'_2, \quad U_{\beta_2} = \beta_2(U'_{\beta_2}),$$

so ist nach dem Beweis von Satz 10.5 die 2. Behauptung erfüllt.

Wegen

$$(10.54)\quad \frac{\partial\, \alpha^{-1} v(\beta_1(\mathfrak{u}), H)}{\partial(u_1, u_2)} = \begin{vmatrix} 1 & u_1 \\ 0 & u_2 \end{vmatrix} = u_1 \qquad \text{für } \mathfrak{u} \in U'_{\beta_1},$$

$$(10.55)\quad \frac{\partial\, \alpha^{-1} v(\beta_2(\mathfrak{v}), H)}{\partial(v_1, v_2)} = \begin{vmatrix} v_2 & 0 \\ v_1 & 1 \end{vmatrix} = v_2 \qquad \text{für } \mathfrak{v} \in U'_{\beta_2}$$

hat $v(Q, H)$ auf $N = \{\beta_1(0, u_2) \mid |u_2| < \infty\} \cup \{\beta_2(v_1, 0) \mid |v_1| < \infty\}$ die Vielfachheit 1. Somit gelten beide Behauptungen, w.z.b.w.

Nun sollen mehrere σ-Prozesse „gleichzeitig“ in den Punkten einer abgeschlossenen Menge M ausgeführt werden.

D e f i n i t i o n 10.2. Der σ-Prozeß in einer Menge[9]).

Es heiße $\mathfrak{S}_M = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} G, A, M, \sigma_M \\ H, B, N, v_M \end{pmatrix}$ ein σ-Prozeß in der Menge M, wenn gilt:

1. *Es sind G und H komplexe Mannigfaltigkeiten der Dimension 4.*

2. *Die offene Teilmenge $A = G - M$ wird durch σ_M pseudokonform auf $B = H - N$ abgebildet, wobei $v_M = \sigma_M^{-1}$ die Umkehrung ist.*

---

[9]) Diese Definition des σ-Prozesses in einer Menge wurde von H. HOPF in Vorträgen gegeben. Sie findet sich in einem Spezialfall auch bei CALABI und ROSENLICHT [2].

3. *Die Abbildung* v_M läßt sich aus B *analytisch und eindeutig auf* H *zur Abbildung* $v_M(Q, H) = \vartheta_M(Q)$ *fortsetzen.*

4. *Führt man in einem beliebigen Punkt* $P_0 \in M$ *einen* σ*-Prozeß*

$$\mathfrak{S}_{P_0} = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} G, A_{P_0}, & P_0, \sigma_{P_0} \\ H_{P_0}, B_{P_0}, N_{P_0}, v_{P_0} \end{pmatrix} \tag{10.56}$$

aus und setzt

$$H^*_{P_0} = H_{P_0} - \overline{\sigma_{P_0}(M \cap A_{P_0})}, \tag{10.57}$$

$$B^*_{P_0} = B_{P_0} \cap H^*_{P_0}, \tag{10.58}$$

$$N^*_{P_0} = N_{P_0} \cap H^*_{P_0}, \tag{10.59}$$

so gibt es eine pseudokonforme Abbildung α_{P_0} *von* $H^*_{P_0}$ *auf* $H'_{P_0} \subsetneqq H$, *wobei gilt*:

$$\sigma_M(P) = \alpha_{P_0}\sigma_{P_0}(P) \qquad \text{für } P \in A = v_{P_0}(B^*_{P_0}) \tag{10.60}$$

$$\alpha_{P_0}(B^*_{P_0}) = H'_{P_0} \cap B, \tag{10.61}$$

$$\alpha_{P_0}(N^*_{P_0}) = H'_{P_0} \cap N. \tag{10.62}$$

5. *Es ist* $\bigcup_{P_0 \in M} H'_{P_0} = H$[10]).

Satz 10.7. Existenz des σ-Prozesses in einer Menge[9]).

Ist M *eine abgeschlossene Menge einer 4-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit* G, *so gibt es einen* σ*-Prozeß in* M.

Beweis. Zu jedem Punkt $P_0 \in M$ wird ein σ-Prozeß

$$\mathfrak{S}_{P_0} = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} G, A_{P_0}, & P_0, \sigma_{P_0} \\ H_{P_0}, B_{P_0}, N_{P_0}, v_{P_0} \end{pmatrix} \tag{10.63}$$

gewählt und werden die Mengen $H^*_{P_0}$, $B^*_{P_0}$, $N^*_{P_0}$ und $A = G - M$ wie in Definition 10.2 bestimmt. Die Voraussetzungen des Identifizierungssatzes (Satz 10.1) werden anhand der Tabelle

Satz 10.1	$\mathfrak{N}$	ν	G_ν	$A_{\nu\nu}$	$A_{\mu\nu}$ für $\mu \neq \nu$	$\gamma_{\nu\nu}$
Hier	M	P_0	$H^*_{P_0}$	$H^*_{P_0}$	$B^*_{P_0}$	$\gamma_{P_0P_0}(P) = P$ für $P \in H^*_{P_0}$

Satz 10.1	$\gamma_{\mu\nu}$ für $\mu \neq \nu$
Hier	$\gamma_{P_1P_0}(P) = \sigma_{P_1} v_{P_0}(P)$ für $P \in B^*_{P_0}$

überprüft.

1. ist erfüllt.

2. braucht nur für $P_0 \neq P_1$ überprüft zu werden, da 2. für $P_0 = P_1$ gemäß der Tabelle trivial ist. Es ist $B^*_{P_0} = H^*_{P_0} \cap B_{P_0}$ offen. Man erhält

$$\begin{aligned} B^*_{P_0} &= [H_{P_0} - \overline{\sigma_{P_0}(M \cap A_{P_0})}] \cap B_{P_0} \\ &\subsetneqq B_{P_0} - \sigma_{P_0}(M \cap A_{P_0}) = \sigma_{P_0}(A_{P_0} - M) = \sigma_{P_0}(A), \end{aligned} \tag{10.64}$$

$$v_{P_0}\overline{(\sigma_{P_0}(M \cap A_{P_0})}, H) = \overline{v_{P_0}(\sigma_{P_0}(M \cap A_{P_0}), H)} = \overline{M \cap A_{P_0}} = M\text{[11]}) \tag{10.65}$$

[10]) Die Mannigfaltigkeit H entsteht also aus den Mannigfaltigkeiten $H^*_{P_0}$, indem man diese längs $B^*_{P_0}$ identifiziert. Daß man dabei $H^*_{P_0}$ nicht größer wählen kann, zeigt Satz 10.17. Im übrigen ist

$$H'_{P_0} \cap B = \alpha_{P_0}(B^*_{P_0}) = \alpha_{P_0}\sigma_{P_0}v_{P_0}(B^*_{P_0}) = \sigma_M(A) = B.$$

[11]) Da die Modifikation $\mathfrak{S}_{P_0}$ beiderseits offen ist, gilt:

$$v_{P_0}(\bar{K}, H) = \overline{v_{P_0}(K, H)}.$$

also

(10.66) $$\sigma_{P_0}(A) \subseteq B_{P_0} - \overline{\sigma_{P_0}(M \cap A_{P_0})} = B^*_{P_0}.$$

Insgesamt folgt $B^*_{P_0} = \sigma_{P_0}(A)$; also wird $B^*_{P_0}$ pseudokonform auf $B^*_{P_1}$ durch $\gamma_{P_1 P_0}(P) = \sigma_{P_1} v_{P_0}(P) = \sigma_{P_1} \sigma^{-1}_{P_0}(P)$ abgebildet.

3. Es ist (μ, ν, ϱ entspricht P_2, P_0, P_1)

$$\begin{array}{lll}
\alpha) & \gamma^{-1}_{P_0 P_1}(B^*_{P_0} \cap B^*_{P_0}) = B^*_{P_1} & P_0 \neq P_1 \neq P_2 \neq P_0, \\
\beta) & \gamma^{-1}_{P_0 P_1}(B^*_{P_0} \cap B^*_{P_0}) = B^*_{P_1} \subseteq H^*_{P_1} & P_0 \neq P_1 = P_2, \\
\gamma) & \gamma^{-1}_{P_0 P_1}(H^*_{P_0} \cap B^*_{P_0}) = B^*_{P_0} & P_1 \neq P_0 = P_2, \\
\delta) & \gamma^{-1}_{P_0 P_0}(B^*_{P_0} \cap H^*_{P_0}) = B^*_{P_0} \subseteq H^*_{P_0} & P_0 = P_1 \neq P_2, \\
\varepsilon) & \gamma^{-1}_{P_0 P_0}(H^*_{P_0} \cap H^*_{P_1}) = H^*_{P_0} & P_0 = P_1 = P_2,
\end{array}$$

also ist (10.1) erfüllt. Es gilt

$$(10.67)\begin{cases} \gamma_{P_2 P_0}\gamma_{P_0 P_1}(P) = \sigma_{P_2} v_{P_0} \sigma_{P_0} v_{P_1}(P) = \sigma_{P_2} v_{P_1}(P) = \gamma_{P_2 P_1}(P) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } P \in B^*_{P_1} \ (\alpha)-\delta)) \\ \gamma_{P_0 P_0}\gamma_{P_0 P_0}(P) = \gamma_{P_0 P_0}(P) \text{ für } P \in H^*_{P_0} \qquad (\text{für } \varepsilon)). \end{cases}$$

Die Voraussetzung 3 von Satz 10.1 ist erfüllt.

4. Zwei Punkte $Q_0 \in H^*_{P_0}$ und $Q_1 \in H^*_{P_1}$ seien gegeben. Außerdem sei $Q_1 = \gamma_{P_1 P_0}(Q_0)$ falsch. Nun werde $P^*_0 = v_{P_0}(Q_0, H_{P_0})$ und $P^*_1 = v_{P_1}(Q_1, H_{P_1})$ gesetzt.

α) Es sei $P_0 = P_1$. Dann ist $Q_1 \neq \gamma_{P_0 P_0}(Q_0) = Q_0$ also gibt es Umgebungen V_0 und V_1 von P_0 bzw. P_1, deren Durchschnitt leer ist. Folglich ist $\gamma_{P_0 P_0}(V_0 \cap H^*_{P_0}) \cap V_1 = V_0 \cap V_1 = \Phi$.

β) Es sei $P^*_0 \neq P^*_1$ und $P_0 \neq P_1$. Dann gibt es Gebiete U^*_0, U^*_1 mit $P^*_0 \in U^*_0$ und $P^*_1 \in U^*_1$, für die der Durchschnitt $U^*_0 \cap U^*_1$ leer ist. Es ist $V^*_0 = v^{-1}_{P_0}(U^*_0, H_{P_0}) \cap H^*_{P_0}$ eine offene Umgebung von Q_0 und $V^*_1 = v^{-1}_{P_1}(U^*_1, H_{P_1}) \cap H^*_{P_1}$ eine offene Umgebung von Q_1. Es ist

$$(10.68)\quad \begin{aligned} \gamma_{P_1 P_0}(V^*_0 \cap B^*_{P_0}) \cap V^*_1 &= \sigma_{P_1}\sigma^{-1}_{P_0}(V^*_0 \cap B^*_{P_0}) \cap V^*_1 \\ &= \sigma_{P_1}(U^*_0 \cap A) \cap V^*_1 \cap B^*_{P_1} \\ &= \sigma_{P_1}(U^*_0 \cap A) \cap \sigma_{P_1}(U^*_1 \cap A) \\ &= \sigma_{P_1}(U^*_0 \cap U^*_1 \cap A) = \theta. \end{aligned}$$

γ) Es sei $P^*_0 = P^*_1$ und $Q_0 \in B^*_{P_0}$. Dann ist $P^*_1 = P^*_0 = v_{P_0}(Q_0) \in A$ und $Q_1 = \sigma_{P_1}(P^*_1) = \sigma_{P_1} v_{P_0}(Q_0) = \gamma_{P_1 P_0}(Q_0)$, was falsch ist.

δ) Es sei $P^*_0 = P^*_1$ und $Q_1 \in B^*_{P_1}$. Dann ergibt sich entsprechend $Q_0 = \gamma_{P_0 P_1}(Q_1)$ oder $\gamma_{P_1 P_0}(Q_0) = Q_1$, was falsch ist.

ε) Es sei $P^*_0 = P^*_1$, $P_0 \neq P_1$ und $Q_0 \in N^*_{P_0}$ sowie $Q_1 \in N^*_{P_1}$; dann ist $P^*_0 = v_{P_0}(Q_0) = P_0$ und $P^*_1 = v_{P_1}(Q_1) = P_1$, also ist $P_0 = P_1$, was falsch ist.

Die Voraussetzungen von Satz 10.1 sind erfüllt. Eine 4-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit H existiert, so daß gilt: Zu jedem Punkt $P_0 \in M$ gibt es eine pseudokonfo me Abbildung α_{P_0} von $H^*_{P_0}$ auf $H'_{P_0} \subseteq H$, wobei $H = \bigcup_{P_0 \in M} H'_{P_0}$ ist. Es ist

(10.69) $$\alpha_{P_0}(B^*_{P_0}) = \alpha_{P_1}(B^*_{P_1}) = H'_{P_0} \cap H'_{P_1} = B$$

unabhängig von $P_0 \in M$. Für $Q \in B^*_{P_1}$ gilt:

$$\alpha_{P_0}^{-1}\alpha_{P_1}(Q) = \sigma_{P_0} v_{P_1}(Q) \qquad \text{für } Q \in B^*_{P_1}. \tag{10.70}$$

Sind $P \in A$, $P_0 \in M$ und $P_1 \in M$, so ist $\sigma_{P_0}(P) \in B^*_{P_0}$ und $\sigma_{P_1}(P) \in B^*_{P_1}$; also gilt

$$\alpha_{P_0}\sigma_{P_0}(P) = \alpha_{P_0}\alpha_{P_0}^{-1}\alpha_{P_1}\sigma_{P_1} v_{P_0}\sigma_{P_0}(P) = \alpha_{P_1}\sigma_{P_1}(P). \tag{10.71}$$

Daher wird durch $\sigma_M(P) = \alpha_{P_0}\sigma_{P_0}(P)$ auf A unabhängig von $P_0 \in M$ eine pseudokonforme Abbildung von A auf $\sigma_M(A) = \alpha_{P_0}\sigma_{P_0}(A) = \alpha_{P_0}(B^*_{P_0}) = B$ definiert. Die Umkehrung $v_M(Q) = v_{P_0}\alpha_{P_0}^{-1}(Q)$ ist in jedem Punkt von $\alpha_{P_0}(N^*_{P_0}) = H'_{P_0} - B$ regulär. Also ist v_M in jedem Punkt von $\bigcup\limits_{P_0 \in M}(H'_{P_0} - B) = H - B = N$ regulär. Wegen $N \cap H'_{P_0} = \alpha_{P_0}(N^*_{P_0})$ ist N eine rein 2-dimensionale analytische Menge, die nur aus gewöhnlichen Punkten besteht. Daher läßt sich v_M aus B in H analytisch zu $v_M(Q, H)$ fortsetzen. Es ist

$$A = v_M(B) = v_{P_0}\alpha_{P_0}^{-1}\alpha_{P_0}(B^*_{P_0}) = v_{P_0}(B^*_{P_0}), \tag{10.72}$$

$$\alpha_{P_0}(N^*_{P_0}) = H'_{P_0} - B = H'_{P_0} \cap (H - B) = H'_{P_0} \cap N, \tag{10.73}$$

$$\alpha_{P_0}(B^*_{P_0}) = \alpha_{P_0}(H^*_{P_0} - N^*_{P_0}) = H'_{P_0} - H'_{P_0} \cap N = H'_{P_0} \cap B. \tag{10.74}$$

Damit ist gezeigt, daß

$$\mathfrak{S}_M = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} G, A, M, \sigma_M \\ H, B, N, v_M \end{pmatrix} \tag{10.75}$$

ein σ-Prozeß in M ist, w.z.b.w.

Satz 10.8. Eindeutigkeit des σ-Prozesses[9]).

Voraussetzung. *Zwei σ-Prozesse*

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} G, A, M, \sigma_M \\ H, B, N, v_M \end{pmatrix} \text{ und } \tilde{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} G, A, M, \tilde{\sigma}_M \\ \tilde{H}, \tilde{B}, \tilde{N}, \tilde{v}_M \end{pmatrix} \tag{10.76}$$

in derselben Menge $M \subseteq G$ seien gegeben.

Behauptung. *Die beiden σ-Prozesse $\mathfrak{S}$ und $\tilde{\mathfrak{S}}$ sind äquivalent; d. h. es gibt eine pseudokonforme Abbildung π von H auf $\tilde{H}$, für die gilt*

$$\pi(H) = \tilde{H}, \quad \pi(B) = \tilde{B}, \quad \pi(N) = \tilde{N}, \tag{10.77}$$

$$\pi\, \sigma_M(P) = \tilde{\sigma}_M(P) \qquad \text{für } P \in A, \tag{10.78}$$

$$v_M(\pi^{-1}(P), H) = \tilde{v}_M(P, \tilde{H}) \qquad \text{für } P \in \tilde{H}. \tag{10.79}$$

Beweis. Zu jedem Punkt $P_0 \in M$ werden σ-Prozesse

$$\mathfrak{S}_{P_0} = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} G, A_{P_0}, P_0, \sigma_{P_0} \\ H_{P_0}, B_{P_0}, N_{P_0}, v_{P_0} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathfrak{S}}_{P_0} = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} G, A_{P_0}, P_0, \tilde{\sigma}_{P_0} \\ \tilde{H}_{P_0}, \tilde{B}_{P_0}, \tilde{N}_{P_0}, \tilde{v}_{P_0} \end{pmatrix} \tag{10.80}$$

und pseudokonforme Abbildungen α_{P_0} von $H^*_{P_0} = H_{P_0} - \overline{\sigma_{P_0}(M \cap A_{P_0})}$ auf $H'_{P_0} \subseteq H$ und $\tilde{\alpha}_{P_0}$ von $\tilde{H}^*_{P_0} = \tilde{H}_{P_0} - \overline{\sigma_{P_0}(M \cap A_{P_0})}$ auf $\tilde{H}'_{P_0} \subseteq \tilde{H}$ nach Definition 10.2 bestimmt. Setzt man

$$B^*_{P_0} = B_{P_0} \cap H^*_{P_0}, \quad N^*_{P_0} = N_{P_0} \cap H^*_{P_0}, \tag{10.81}$$

$$\tilde{B}^*_{P_0} = \tilde{B}_{P_0} \cap \tilde{H}^*_{P_0}, \quad \tilde{N}^*_{P_0} = \tilde{N}_{P_0} \cap \tilde{H}^*_{P_0}, \tag{10.82}$$

so ist

$$\sigma_M(P) = \alpha_{P_0}\sigma_{P_0}(P) \quad \text{für } P \in A = v_{P_0}(B^*_{P_0}) = \tilde{v}_{P_0}(\tilde{B}^*_{P_0}), \tag{10.83}$$

$$\tilde{\sigma}_M(P) = \tilde{\alpha}_{P_0}\tilde{\sigma}_{P_0}(P) \quad \text{für } P \in A = v_{P_0}(B^*_{P_0}) = \tilde{v}_{P_0}(\tilde{B}^*_{P_0}), \tag{10.84}$$

$$\alpha_{P_0}(B^*_{P_0}) = H'_{P_0} \cap B, \qquad \alpha_{P_0}(N^*_{P_0}) = H'_{P_0} \cap N, \tag{10.85}$$

$$\tilde{\alpha}_{P_0}(\tilde{B}^*_{P_0}) = \tilde{H}'_{P_0} \cap \tilde{B}, \qquad \tilde{\alpha}_{P_0}(\tilde{N}^*_{P_0}) = \tilde{H}'_{P_0} \cap \tilde{N}. \tag{10.86}$$

Es gibt eine pseudokonforme Abbildung γ_{P_0} von H_{P_0} auf $\tilde{H}_{P_0}$, für die gilt

$$\gamma_{P_0}(H_{P_0}) = \tilde{H}_{P_0}, \quad \gamma_{P_0}(B_{P_0}) = \tilde{B}_{P_0}, \quad \gamma_{P_0}(N_{P_0}) = \tilde{N}_{P_0}, \tag{10.87}$$

$$\gamma_{P_0}(Q) = \tilde{\sigma}_{P_0}v_{P_0}(Q) \qquad \text{für } Q \in B_{P_0}. \tag{10.88}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \tilde{H}^*_{P_0} &= \tilde{H}_{P_0} - \overline{\tilde{\sigma}_{P_0}(M \cap A_{P_0})} = \gamma_{P_0}(H_{P_0}) - \overline{\gamma_{P_0}(\sigma_{P_0}(M \cap A_{P_0}))} \\ &= \gamma_{P_0}(H_{P_0}) - \gamma_{P_0}(\overline{\sigma_{P_0}(M \cap A_{P_0})}) = \gamma_{P_0}(H^*_{P_0}), \end{aligned} \tag{10.89}$$

$$\tilde{B}^*_{P_0} = \tilde{H}^*_{P_0} \cap \tilde{B}_{P_0} = \gamma_{P_0}(H^*_{P_0}) \cap \gamma_{P_0}(B_{P_0}) = \gamma_{P_0}(B^*_{P_0}), \tag{10.90}$$

$$\tilde{N}^*_{P_0} = \tilde{H}^*_{P_0} \cap \tilde{N}_{P_0} = \gamma_{P_0}(H^*_{P_0}) \cap \gamma_{P_0}(N_{P_0}) = \gamma_{P_0}(N^*_{P_0}). \tag{10.91}$$

Durch $\tilde{\alpha}_{P_0}\gamma_{P_0}\alpha^{-1}_{P_0}$ wird H'_{P_0} pseudokonform auf $\tilde{H}'_{P_0}$ abgebildet. Für $Q \in H'_{P_0} \cap B$ ist

$$\tilde{\alpha}_{P_0}\gamma_{P_0}\alpha^{-1}_{P_0}(Q) = \tilde{\sigma}_M\tilde{v}_{P_0}\tilde{\sigma}_{P_0}v_{P_0}\sigma_{P_0}v_M(Q) = \tilde{\sigma}_M\, v_M(Q). \tag{10.92}$$

Daher verhält sich $\tilde{\sigma}_M v_M(Q)$ in jedem Punkt von $N \cap H'_{P_0}$, also in $N \cap \bigcup_{P_0 \in M} H'_{P_0} = N$ regulär. Daher läßt sich $\tilde{\sigma}_M v_M(Q)$ zu einer Abbildung π von H in $\tilde{H}$ analytisch fortsetzen. Ebenso läßt sich $\sigma_M\tilde{v}_M(Q)$ analytisch zu $\tilde{\pi}$ aus $\tilde{B}$ in $\tilde{H}$ fortsetzen. Für $Q \in B$ bzw. $\tilde{Q} \in \tilde{B}$ ist

$$\tilde{\pi}\,\pi(Q) = Q \quad \text{und} \quad \pi\,\tilde{\pi}(\tilde{Q}) = \tilde{Q}. \tag{10.93}$$

Wegen $H'_{P_0} \cap N = \alpha_{P_0}(N^*_{P_0})$ enthält N und wegen $\tilde{N} \cap \tilde{H}'_{P_0} = \tilde{\alpha}_{P_0}(N^*_{P_0})$ auch $\tilde{N}$ keinen inneren Punkt. Daher gelten $\tilde{\pi}\,\pi(Q) = Q$ und $\pi\,\tilde{\pi}(\tilde{Q}) = \tilde{Q}$ für alle $Q \in H$ bzw. $\tilde{Q} \in \tilde{H}$. Also ist π eine pseudokonforme Abbildung von H auf $\tilde{H}$, für die gilt:

$$\pi(H) = \tilde{H}, \tag{70.94}$$

$$\pi(B) = \tilde{\sigma}_M v_M(B) = \tilde{\sigma}_M(A) = \tilde{B}, \tag{10.95}$$

$$\pi(N) = \pi(H - B) = \pi(H) - \pi(B) = \tilde{N}, \tag{10.96}$$

$$\pi\,\sigma_M(P) = \tilde{\sigma}_M(P) \qquad \text{für } P \in A. \tag{10.97}$$

w.z.b.w.

Damit sind Existenz und Eindeutigkeit des σ-Prozesses in einer Menge M bewiesen. Im Grenzfall kann M leer oder die ganze Mannigfaltigkeit sein. Ist ι die identische Abbildung von G auf sich und ist M leer, so ist die identische Modifikation $\mathfrak{S} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, G, \Theta, \iota \\ G, G, \Theta, \iota \end{pmatrix}$ der σ-Prozeß in M. Ist aber $M = G$ die ganze Mannigfaltigkeit und σ_G die Abbildung, deren Definitionsbereich leer

ist, und v_G eine entsprechende Abbildung, so ist $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} G, \theta, G, \sigma_G \\ \theta, \theta, \theta, v_G \end{pmatrix}$ der σ-Prozeß in G. Nun sollen noch Eigenschaften des σ-Prozesses bewiesen werden.

Satz 10.9. Die eingesetzte Menge bei einem σ-Prozeß[9]).

Voraussetzung. *Ein σ-Prozeß $\mathfrak{S}_M = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} G, A, M, \sigma_M \\ H, B, N, v_M \end{pmatrix}$ sei gegeben.*

Behauptung. *Entweder ist N leer oder eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus H mit nur gewöhnlichen Punkten. Auf jedem irreduziblen Teil von N ist $v_M(Q, H)$ konstant. Es ist $v_M(N, H) \subseteq M$. Auf N hat $v_M(Q, H)$ die Vielfachheit 1, falls $N \neq \theta$ ist. Für $P_0 \in M$ ist $v_M^{-1}(P_0, H) = N \cap H'_{P_0}$, wenn die Bezeichnungen von Definition 10.2 verwandt werden.*

Beweis. In den Bezeichnungen von Definition 10.2 ist $H'_{P_0} \cap N = \alpha_{P_0}(N_{P_0} \cap H^*_{P_0})$; also ist $N \cap H'_{P_0}$ eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus H'_{P_0} mit nur gewöhnlichen Punkten oder leer. Daher ist N entweder leer oder eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus $\bigcup_{P_0 \in M} H'_{P_0} = H$ und es gilt:

$$v_M(Q, H) = v_{P_0}(\alpha_{P_0}^{-1}(Q), H_{P_0}) \quad \text{für } Q \in H'_{P_0}. \tag{10.98}$$

Daher hat $v_M(Q, H)$ auf $N \cap H'_{P_0}$, also auf N, die Vielfachheit 1 und es ist $v_M(Q, H) = P_0$ für $Q \in N \cap H'_{P_0}$. Also ist $v_M(N, H) \subseteq M$. Nach Satz 7.1 ist $v_M(Q, H)$ auf jedem irreduziblen Teil von N konstant. Ist $v_M(Q, H) = P_0$, so ist $Q \in N \cap H'_{P_1}$ für ein $P_1 \in M$, da $H = \bigcup_{P_1 \in M} H'_{P_1}$ gilt. Es ist $v_M(Q, H) = P_1$, also $P_0 = P_1$ und $Q \in N \cap H'_{P_0}$. Daher ist $v_M^{-1}(P_0, H) = N \cap H'_{P_0}$, w.z.b.w.

Bei einem σ-Prozeß wird normalerweise nur der Fall betrachtet, daß M Teil einer Menge ist, die in einer Umgebung von M analytisch und höchstens 2-dimensional ist.

Satz 10.10. Der σ-Prozeß als Modifikation[9]).

Voraussetzung. *Ein σ-Prozeß $\mathfrak{S}_M = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} G, A, M, \sigma_M \\ H, B, N, v_M \end{pmatrix}$ sei gegeben. Die Menge M habe eine offene Umgebung U, die eine M umfassende analytische Menge M^* enthält, deren Dimension höchstens 2 ist.*

Behauptung. 1. *Der σ-Prozeß $\mathfrak{S}_M$ ist eine analytische Modifikation.*

2. *Es ist $v_M(N, H) = M$.*

Beweis. 1. Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 10.9 und der Definition des σ-Prozesses.

2. Mit den Bezeichnungen der Definition 10.2 ist $v_{P_0}^{-1}(M^*, H_{P_0})$ ein höchstens 2-dimensionale analytische Menge aus der offenen Menge $V_{P_0} = \sigma_{P_0}(U \cap A_{P_0}) \cup N_{P_0}$. Also enthält $\overline{v_{P_0}^{-1}(M^*, H) \cap B_{P_0}} \cap N_{P_0}$ nur isolierte Punkte. Es ist aber $\overline{\sigma_{P_0}(M \cap A_{P_0})} \cap N_{P_0}$ in dieser Menge enthalten, besteht daher auch nur aus isolierten Punkten. Folglich ist $N^*_{P_0} = N_{P_0} - \overline{\sigma_{P_0}(M \cap A_{P_0})}$ nicht leer. Es gibt einen Punkt $Q \in N^*_{P_0}$; dann ist $\alpha_{P_0}(Q) \in H'_{P_0} \cap N$ und $v_M(\alpha_{P_0}(Q), H) = P_0$, woraus sich $v_M(N, H) = M$ ergibt, w.z.b.w.

Anschließend an diese Konstruktion des σ-Prozesses in M haben H. Hopf, Calabi und Rosenlicht [2] Beispiele komplexer Mannigfaltigkeiten der Dimension 4 angegeben, die keine abzählbare Basis der offenen Mengen haben, während ja 2-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten immer eine abzählbare Basis der offenen Mengen haben. Aus jeder komplexen Mannigfaltigkeit

G der Dimension 4 kann man eine 4-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit ohne abzählbare Basis der offenen Mengen machen. Man braucht nur eine nichtabzählbare, abgeschlossene Teilmenge $M \subsetneqq G$ zu wählen, die in einer Umgebung U Teilmenge einer analytischen Menge mit einer Dimension kleiner als 4 ist. Solche Mengen M gibt es beispielsweise in jeder Karte von G. Übt man nun in M einen σ-Prozeß aus, so erhält man eine komplexe Mannigfaltigkeit H, darin eine rein 2-dimensionale analytische Menge N und eine analytische Abbildung $v_M(Q, H)$ von H auf G mit $v_M(N, H) = M$, wobei $v_M(Q, H)$ auf jedem irreduziblen Teil von N konstant ist. Es gibt also zu jedem Punkt $P_0 \in N$ wenigstens einen irreduziblen Teil N'_{P_0} von N, auf dem $v_M(Q, H) = P_0$ ist. Also hat N überabzählbar viele 2-dimensionale irreduzible Teile. Das ist aber nur möglich, wenn H keine abzählbare Basis der offenen Mengen hat. Weil v_M die Menge $B = H - N$ pseudokonform auf $A = G - M$ abbildet, hat H eine abzählbare überall dichte Teilmenge[12]).

Die Alexandroffgerade ist ein Beispiel einer reellanalytischen, folgenkompakten Mannigfaltigkeit, die nicht kompakt ist, bzw., was dasselbe ist, keine abzählbare Basis der offenen Mengen hat[13]). Ob es folgenkompakte, aber nichtkompakte komplexanalytische Mannigfaltigkeiten der Dimension 4 gibt, bleibt ungeklärt; jedenfalls kann man mit σ-Prozessen keine Beispiele konstruieren, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 10.11. Folgenkompakte Mannigfaltigkeiten.

Voraussetzung. *Eine Modifikation* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei gegeben. Die Mannigfaltigkeit H sei folgenkompakt und G habe eine abzählbare Basis der offenen Mengen. Die Menge N sei analytisch.*

Behauptung. *Die Mannigfaltigkeit H ist kompakt.*

Beweis. Da N analytisch und $\mathfrak{M}$ eine Modifikation ist, hat N höchstens die Dimension 2. Angenommen, N habe unendlich viele irreduzible Teile. Dann gibt es eine Folge $Q_\lambda \in N_\lambda$ gewöhnlicher Punkte von N, wobei N_λ verschiedene irreduzible Teile von N sind. Die Q_λ haben einen Häufungspunkt Q; in jede Umgebung von Q dringen unendlich viele irreduzible Teile von N_λ ein, was falsch ist. Es hat also N höchstens endlich viele irreduzible Teile $N_1, \ldots, N_l$. Nach einem Satz von Radó [13] läßt sich jedes N_λ durch höchstens abzählbar viele Karten von H überdecken. Ebenso läßt sich $B = \tau(A)$ durch abzählbar viele Karten überdecken. Also hat $H = B \cup N_1 \cup \cdots \cup N_l$ eine abzählbare Basis der offenen Mengen, ist also kompakt, w.z.b.w.

Satz 10.12. Parameterumgebungen bei einem σ-Prozeß.

Voraussetzung. *Ein σ-Prozeß* $\mathfrak{S}_M = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} G, A, M, \sigma_M \\ H, B, N, v_M \end{pmatrix}$ *sei gegeben.*

Behauptung. *Zu jedem Punkt $P_0 \in M$ gibt es eine Karte U_α mit $\alpha \in \mathfrak{P}(G)$ von G und zwei Karten U_{β_1}, U_{β_2} mit $\beta_1 \in \mathfrak{P}(H)$ und $\beta_2 \in \mathfrak{P}(H)$ von H, so daß gilt:*

a) Durch β_1 wird eine offene Menge

$$U'_{\beta_1} \subseteq \{(u_1, u_2) \mid |u_1| < 1,\ |u_1 u_2| < 1\} = U^*_{\beta_1} \tag{10.99}$$

[12]) Dieses Beispiel wurde von H. Hopf und davon unabhängig Calabi und Rosenlicht [2] gegeben.

[13]) Man vergleiche H. Kneser [11] und Alexandroff [0].

pseudokonform auf U_{β_1} abgebildet, wobei gilt:

$$\beta_1^{-1}(N \cap U_{\beta_1}) = \{(u_1, u_2) \mid u_1 = 0\} \cap U'_{\beta_1} = N'_1. \tag{10.100}$$

b) Durch β_2 wird eine offene Menge

$$U'_{\beta_2} \subseteq \{(v_1, v_2) \mid |v_1 v_2| < 1,\ |v_2| < 1\} = U^*_{\beta_2} \tag{10.101}$$

pseudokonform auf U_{β_2} abgebildet, wobei gilt:

$$\beta_2^{-1}(N \cap U_{\beta_2}) = \{(v_1, v_2) \mid v_2 = 0\} \cap U'_{\beta_2} = N'_2. \tag{10.102}$$

c) Es ist

$$\begin{aligned} &\beta_2^{-1}\,\beta_1(u_1, u_2) = \left(\frac{1}{u_2},\, u_1 u_2\right) \\ &\text{für } \mathfrak{u} = (u_1, u_2) \in \beta_1^{-1}(U_{\beta_1} \cap U_{\beta_2}) = \{\mathfrak{u} \mid u_2 \neq 0\} \cap U'_{\beta_1}, \end{aligned} \tag{10.103}$$

$$\begin{aligned} &\beta_1^{-1}\,\beta_2(v_1, v_2) = \left(v_1 v_2,\, \frac{1}{v_1}\right) \\ &\text{für } \mathfrak{v} = (v_1, v_2) \in \beta_2^{-1}(U_{\beta_1} \cap U_{\beta_2}) = \{\mathfrak{v} \mid v_1 \neq 0\} \cap U'_{\beta_2}. \end{aligned} \tag{10.104}$$

d) Durch α wird $U'_\alpha = \{(z_1, z_2) \mid |z_1| < 1,\ |z_2| < 1\}$ pseudokonform auf U_α abgebildet, wobei $\alpha(0) = P_0$ ist.

e) Mit $A' = \alpha^{-1}(A \cap U_\alpha)$ gilt:

$$\alpha^{-1} v_M(\beta_1(\mathfrak{u}), H) = (u_1, u_1 u_2) \qquad \text{für } \mathfrak{u} \in U'_{\beta_1}, \tag{10.105}$$

$$\alpha^{-1} v_M(\beta_2(\mathfrak{v}), H) = (v_1 v_2, v_2) \qquad \text{für } \mathfrak{v} \in U'_{\beta_2}, \tag{10.106}$$

$$\beta_1^{-1} \sigma_M\, \alpha(\mathfrak{z}) = \left(z_1, \frac{z_2}{z_1}\right) \qquad \text{für } \mathfrak{z} \in A' \text{ und } z_1 \neq 0, \tag{10.107}$$

$$\beta_2^{-1} \sigma_M\, \alpha(\mathfrak{z}) = \left(\frac{z_1}{z_2}, z_2\right) \qquad \text{für } \mathfrak{z} \in A' \text{ und } z_2 \neq 0. \tag{10.108}$$

f) Es ist

$$v_M^{-1}(P_0, H) \subseteq U_{\beta_1} \cup U_{\beta_2}, \tag{10.109}$$

$$U_\alpha \cap A \quad = v_M((U_{\beta_1} \cup U_{\beta_2}) \cap B). \tag{10.110}$$

Beweis. Die Bezeichnungen von Definition 10.2 werden übernommen. Für die Modifikation $\mathfrak{S}_{P_0}$ gilt Satz 10.6. Er werde mittels der Übersetzungstabelle

Satz 10.6	G	A	P_0	σ_{P_0}	H	B	N	v_{P_0}	$v_{P_0}(Q, H)$	β_1	β_2
Hier	G	A_{P_0}	P_0	σ_{P_0}	H_{P_0}	B_{P_0}	N_{P_0}	v_{P_0}	$v_{P_0}(Q, H_{P_0}) = \vartheta_{P_0}(Q)$	γ_1	γ_2

Satz 10.6	U_{β_1}	U_{β_2}	N'_1	N'_2	U'_{β_1}	U'_{β_2}	α	U_α	U'_α
Hier	V_{γ_1}	V_{γ_2}	N^0_1	N^0_2	$U^*_{\beta_1}$	$U^*_{\beta_2}$	α	U_α	U'_α

angewandt. Außerdem seien

$$\beta_1(\mathfrak{u}) = \alpha_{P_0}\gamma_1(\mathfrak{u}) \qquad \text{für } \mathfrak{u} \in U'_{\beta_1} = \gamma_1^{-1}(H^*_{P_0} \cap V_{\gamma_1}), \tag{10.111}$$

$$\beta_2(\mathfrak{v}) = \alpha_{P_0}\gamma_2(\mathfrak{v}) \qquad \text{für } \mathfrak{v} \in U'_{\beta_1} = \gamma_2^{-1}(H^*_{P_0} \cap V_{\gamma_2}). \tag{10.112}$$

Durch β_ν wird U'_{β_ν} pseudokonform auf

$$U_{\beta_\nu} = \beta_\nu(U'_{\beta_\nu}) = \alpha_{P_0}\gamma_\nu(U'_{\beta_\nu}) = \alpha_{P_0}(V_{\gamma_\nu} \cap H^*_{P_0}) \tag{10.113}$$

abgebildet. Setzt man

$$N_1' = U'_{\beta_1} \cap \{\mathfrak{u} \mid u_1 = 0\}, \quad N_2' = U'_{\beta_2} \cap \{\mathfrak{v} \mid v_2 = 0\}, \tag{10.114}$$

so ist

$$\beta_\nu(N_\nu') = \alpha_{P_0}\gamma_\nu(N_\nu^0 \cap U'_{\beta_\nu}) = \alpha_{P_0}(N_{P_0} \cap H^*_{P_0} \cap V_{\gamma_\nu}) = N \cap U_{\beta_\nu}. \tag{10.115}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \beta_\nu^{-1}(U_{\beta_1} \cap U_{\beta_2}) &= \beta_\nu^{-1}\alpha_{P_0}(V_{\gamma_1} \cap V_{\gamma_2} \cap H^*_{P_0}) \\ &= \gamma_\nu^{-1}(V_{\gamma_1} \cap V_{\gamma_2} \cap H^*_{P_0}) \\ &= \gamma_\nu^{-1}(V_{\gamma_1} \cap V_{\gamma_2}) \cap \gamma_\nu^{-1}(V_{\gamma_\nu} \cap H^*_{P_0}) \\ &= \gamma_\nu^{-1}(V_{\gamma_1} \cap V_{\gamma_2}) \cap U'_{\beta_\nu}. \end{aligned} \tag{10.116}$$

Mit Satz 10.6 folgt

$$\beta_1^{-1}(U_{\beta_1} \cap U_{\beta_2}) = \{\mathfrak{u} \mid u_2 \neq 0\} \cap U'_{\beta_1}, \tag{10.117}$$

$$\beta_2^{-1}(U_{\beta_1} \cap U_{\beta_2}) = \{\mathfrak{v} \mid v_1 \neq 0\} \cap U'_{\beta_2}. \tag{10.118}$$

Für $\mathfrak{u} \in \beta_1^{-1}(U_{\beta_1} \cap U_{\beta_2})$ ist

$$\beta_2^{-1}\beta_1(\mathfrak{u}) = \gamma_2^{-1}\alpha_{P_0}^{-1}\alpha_{P_0}\gamma_1(\mathfrak{u}) = \gamma_2^{-1}\gamma_1(\mathfrak{u}) = \left(\frac{1}{u_2}, u_1u_2\right). \tag{10.119}$$

Für $\mathfrak{v} \in \beta_2^{-1}(U_{\beta_1} \cap U_{\beta_2})$ ist

$$\beta_1^{-1}\beta_2(\mathfrak{v}) = \gamma_1^{-1}\alpha_{P_0}^{-1}\alpha_{P_0}\gamma_2(\mathfrak{v}) = \gamma_1^{-1}\gamma_2(\mathfrak{v}) = \left(v_1v_2, \frac{1}{v_1}\right). \tag{10.120}$$

Für $\mathfrak{u} \in U'_{\beta_1}$ bzw. $\mathfrak{v} \in U'_{\beta_2}$ gilt:

$$\alpha^{-1}v_M(\beta_1(\mathfrak{u}), H) = \alpha^{-1}v_{P_0}(\alpha_{P_0}^{-1}\alpha_{P_0}\gamma_1(\mathfrak{u}), H_{P_0}) = (u_1, u_1u_2), \tag{10.121}$$

$$\alpha^{-1}v_M(\beta_2(\mathfrak{v}), H) = \alpha^{-1}v_{P_0}(\alpha_{P_0}^{-1}\alpha_{P_0}\gamma_2(\mathfrak{v}), H_{P_0}) = (v_1v_2, v_2). \tag{10.122}$$

Es ist

$$\begin{aligned} v_M((U_{\beta_1} \cup U_{\beta_2}) \cap B) &= v_{P_0}\alpha_{P_0}^{-1}((U_{\beta_1} \cup U_{\beta_2}) \cap H'_{P_0} \cap B) \\ &= v_{P_0}((V_{\gamma_1} \cup V_{\gamma_2}) \cap B^*_{P_0}) \\ &= v_{P_0}(V_{\gamma_1} \cup V_{\gamma_2}, H) \cap v_{P_0}(B^*_{P_0}) \\ &= U_\alpha \cap A. \end{aligned} \tag{10.123}$$

Für $\mathfrak{z} \in A' = \alpha^{-1}(U_\alpha \cap A)$ gilt, falls $z_1 \neq 0$ ist:

$$\beta_1^{-1}\sigma_M\alpha(\mathfrak{z}) = \gamma_1^{-1}\alpha_{P_0}^{-1}\alpha_{P_0}\sigma_{P_0}\alpha(\mathfrak{z}) = \gamma_1^{-1}\sigma_{P_0}\alpha(\mathfrak{z}) = \left(z_1, \frac{z_2}{z_1}\right), \tag{10.124}$$

falls $z_2 \neq 0$ ist:

$$\beta_2^{-1}\sigma_M\alpha(\mathfrak{z}) = \gamma_2^{-1}\alpha_{P_0}^{-1}\alpha_{P_0}\sigma_{P_0}\alpha(\mathfrak{z}) = \gamma_2^{-1}\sigma_{P_0}\alpha(\mathfrak{z}) = \left(\frac{z_1}{z_2}, z_2\right). \tag{10.125}$$

Für $Q_0 \in v_M^{-1}(P_0, H) = N \cap H'_{P_0}$ gilt:

$$\alpha_{P_0}^{-1}(Q_0) \in \alpha_{P_0}^{-1}(N \cap H'_{P_0}) = N^*_{P_0} \subseteq (V_{\gamma_1} \cup V_{\gamma_2}) \cap H^*_{P_0}. \tag{10.126}$$

Also ist

$$Q_0 \in \alpha_{P_0}((V_{\gamma_1} \cup V_{\gamma_2}) \cap H^*_{P_0}) = U_{\beta_1} \cup U_{\beta_2}. \tag{10.127}$$

Es folgt $v_M^{-1}(P_0, H) \subseteq U_{\beta_1} \cup U_{\beta_2}$. Die Behauptungen sind richtig, w.z.b.w.

Der σ-Prozeß in einer Menge, die nur aus einem Punkt P_0 besteht, stimmt mit dem σ-Prozeß im Punkt P_0 überein:

Satz 10.13. Isolierte Punkte beim σ-Prozeß.

Voraussetzung. *Es sei* $\mathfrak{S}_M = \mathfrak{S}_M \begin{pmatrix} G, A, M, \sigma_M \\ H, B, N, v_M \end{pmatrix}$ *ein σ-Prozeß. Die offene Menge $U \subseteq G$ habe mit M allein den Punkt P_0 gemeinsam.*

Behauptung. *Setzt man $V = v_M^{-1}(U, H)$, so ist* $\tilde{\mathfrak{S}}_{P_0} = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} U, U \cap A, & P_0, & \sigma_M \\ V, V \cap B, V \cap N, v_M \end{pmatrix}$ *ein σ-Prozeß im Punkt P_0, wobei $v_M^{-1}(P_0, H) = N \cap V$ ist.*

Beweis. Die Bezeichnungen von Definition 10.2 werden übernommen. Es gilt:

$$(10.128)\quad N \cap V = N \cap v_M^{-1}(U, H) = v_M^{-1}(U \cap M, H) = v_M^{-1}(P_0, H) = N \cap H'_{P_0}.$$

Mit $V_{P_0} = \sigma_{P_0}(U \cap A_{P_0}) \cup N_{P_0} = \sigma_{P_0}(U \cap A) \cup N_{P_0}$ wird eine offene Umgebung von N_{P_0} gegeben. Also ist

$$(10.129)\quad \begin{aligned} &\overline{\sigma_{P_0}(M \cap A_{P_0})} \cap N_{P_0} \subseteq \overline{\sigma_{P_0}(M \cap A_{P_0})} \cap V_{P_0} \subseteq \overline{\sigma_{P_0}(M \cap A_{P_0}) \cap V_{P_0}} \subseteq \\ &\subseteq \overline{\sigma_{P_0}(M \cap A \cap U)} = \emptyset, \end{aligned}$$

woraus $N^*_{P_0} = N_{P_0}$ folgt. Es ist $N \cap V = H'_{P_0} \cap N = \alpha_{P_0}(N_{P_0})$ eine rein 2-dimensionale, kompakte, irreduzible analytische Menge aus V, die durch $v_M(Q, H)$ auf $\{P_0\}$ abgebildet wird. Strebt $P^\nu \to P_0$ für $\nu \to \infty$ mit $P^\nu \in U \cap A$, so gibt es eine gleichbezeichnete Teilfolge und ein $R_0 = \lim\limits_{\nu \to \infty} \sigma_{P_0}(P^\nu) \in N_{P_0} = N^*_{P_0}$. Es konvergiert $\sigma_M(P^\nu) = \alpha_{P_0}\sigma_{P_0}(P^\nu) \to \alpha_{P_0}(R) \in N \cap V$ für $\nu \to \infty$. Gemäß Satz 10.5 ist $\tilde{\mathfrak{S}}_{P_0}$ ein σ-Prozeß im Punkt P_0, w.z.b.w.

Aus Satz 10.13 folgt:

Satz 10.14. Der σ-Prozeß in einer Menge isolierter Punkte.

Voraussetzung. *In einer Menge M ohne Häufungspunkte werde der σ-Prozeß* $\mathfrak{S}_M = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} G, A, M, \sigma_M \\ H, B, N, v_M \end{pmatrix}$ *ausgeführt. Der Teil K von G sei kompakt.*

Behauptung. 1. *Der σ-Prozeß $\mathfrak{S}_M$ ist eine analytische und beiderseits offene Modifikation.*

2. *Die irreduziblen Teile der analytischen Menge N sind kompakt, 2-dimensional und werden durch die Urbilder $v_M^{-1}(P_0, M)$ mit $P_0 \in M$ gegeben.*

3. *Es ist $v_M^{-1}(K, H) = K_1$ kompakt.*

Beweis. Zu 1. und 2. braucht nur noch gezeigt zu werden, daß die Modifikation $\mathfrak{S}_M^{-1}$ offen ist. Eine offene Umgebung U von N sei gegeben. Dann ist $\alpha_{P_0}^{-1}(U \cap H'_{P_0})$ eine offene Umgebung von $\alpha_{P_0}^{-1}(N \cap H'_{P_0}) = N^*_{P_0} = N_{P_0}$ und, da der σ-Prozeß in einem Punkt eine beiderseits offene Modifikation ist, auch

$$(10.130)\quad v_{P_0}(\alpha_{P_0}^{-1}(U \cap H'_{P_0}), H_{P_0}) = v_M(U \cap H'_{P_0}, H)$$

offen. Durch

$$(10.131)\quad v_M(U \cap B) \cup M = v_M(U, H) = \bigcup_{P_0 \in M} v_M(U \cap H'_{P_0}, H)$$

wird eine offene Umgebung von M gegeben. Die Modifikation $\mathfrak{S}_M^{-1}$ ist offen.

3. Es ist $H - K_1 = v_M^{-1}(G, H) - v_M^{-1}(K, H) = v_M^{-1}(G - K, H)$ offen, also K_1 abgeschlossen. Man kann eine offene Umgebung U_1 von $K \cap M$ mit $\overline{U}_1 \cap M = K \cap M$ finden. In der offenen Menge $V_1 = v_M^{-1}(U_1, H)$ liegt $K_1 \cap N$ und

sonst kein Teil von N. Da $K \cap M$ nur endlich viele Punkte enthält, ist $K_1 \cap N = \bigcup_{P_0 \in K \cap M} v_M^{-1}(P_0, H)$ kompakt und hat eine offene Umgebung V mit kompakten $\overline{V} \subsetneq V_1$. Es ist $\overline{V} \cap K_1$ abgeschlossen und als Teil von $\overline{V}$ sogar kompakt. Wegen $V \cap N = \overline{V} \cap N = K_1 \cap N$ ist $K_1 - V \subsetneq K_1 - V \cap N = K_1 - N \subsetneq B$. Die offene Umgebung $V \cap H'_{P_0}$ von $v_M^{-1}(P_0, H)$ mit $P_0 \in K \cap M$ wird durch $\alpha_{P_0}^{-1}$ pseudokonform auf die offene Umgebung $\alpha_{P_0}^{-1}(V \cap H'_{P_0})$ von $\alpha_{P_0}^{-1}(N \cap H'_{P_0}) = N^*_{P_0} = N_{P_0}$ abgebildet. Durch $v_{P_0}(Q, H_{P_0})$ wird $\alpha_{P_0}^{-1}(V \cap H'_{P_0})$ analytisch auf die offene Umgebung $v_{P_0}(\alpha_{P_0}^{-1}(V \cap H'_{P_0}), H_{P_0}) = v_M(V \cap H'_{P_0}, H)$ von P_0 abgebildet. Also ist $U = v_M(V, H) = \bigcup_{P_0 \in K \cap M} v_M(V \cap H'_{P_0}, H)$ eine offene Umgebung von $K \cap M$. Es ist $K - U$ kompakt und in A enthalten. Also ist $K_1 = (K_1 - V) \cup (\overline{V} \cap K_1) = \sigma_M(K - U) \cup (\overline{V} \cap K_1)$ kompakt, w.z.b.w.

Längs einer komplexen Kurve, die M nur in einem Punkt schneidet, streut die Abbildung σ_M nicht:

Satz 10.15. Komplexe Kurven bei einem σ-Prozeß[14]).

Voraussetzung. *In der Menge M werde der σ-Prozeß $\mathfrak{S}_M = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} G, & A, M, \sigma_M \\ H_{P_0}, & B, N, v_M \end{pmatrix}$ ausgeführt. Die komplexe Kurve L schneide M allein in dem Punkt P_0, wobei $M \cap L = M \cap \overline{L}$ ist. Die Streumenge $\Sigma(P_0, L)$ sei nicht leer.*

Behauptung. *Die Abbildung σ_M verhält sich längs L in P_0 bestimmt. Es ist $\tilde{L} = \sigma_M(L, L)$ eine komplexe Kurve aus H mit $\tilde{L} \cap N = \overline{\tilde{L}} \cap N = \{Q_0\}$, wobei $Q_0 = \sigma_M(P_0, L)$ ist. Wenn P_0 gewöhnlicher Punkt von L ist, so ist auch Q_0 gewöhnlicher Punkt von $\tilde{L}$.*

Beweis. Beim σ-Prozeß $\mathfrak{S}_{P_0} = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} G, & A_{P_0}, & P, & \sigma_{P_0} \\ H_{P_0}, & B_{P_0}, & N_{P_0}, & v_{P_0} \end{pmatrix}$ verhält sich die Abbildung σ_{P_0} längs L in P_0 bestimmt. Nach Satz 3.6 ist $L^* = \sigma_{P_0}(L, L) = \sigma_{P_0}(L \cap A, L) \cup \{R_0\}$ mit $R_0 = \sigma_{P_0}(P_0, L)$ eine komplexe Kurve aus H_{P_0}, für die $N_{P_0} \cap L^* = N_{P_0} \cap \overline{L^*} = \{R_0\}$ gilt. Ist P_0 gewöhnlicher Punkt von L, so ist auch R_0 gewöhnlicher Punkt von L^*. Es gibt einen Punkt $Q_0 \in \Sigma_{\sigma_M}(P_0, L)$ mit $\Sigma_{\sigma_M}(P_0, L) \subseteq v_M^{-1}(P_0, H) = N \cap H'_{P_0}$ und eine Folge $Q^\nu = \sigma_M(P^\nu)$ mit $P^\nu \in L \cap A$, so daß $\sigma_M(P^\nu) \to Q_0 \in H'_{P_0} \cap N$ für $\nu \to \infty$ strebt. Dann konvergiert $\alpha_{P_0}^{-1}\sigma_M(P^\nu) \to \alpha_{P_0}^{-1}(Q_0) \in N^*_{P_0}$. Der Punkt $\alpha_{P_0}^{-1}(Q_0)$ gehört zur Streumenge $\Sigma_{\sigma_{P_0}}(P_0, L)$, die aus dem einzigen Punkt R_0 besteht. Es ist $R_0 = \alpha_{P_0}^{-1}(Q_0) \in N^*_{P_0}$ und man hat

$$
\begin{aligned}
L^* = \sigma_{P_0}(L \cap A) \cup \{R_0\} &\subseteq [B_{P_0} - \sigma_{P_0}(M \cap A_{P_0})] \cup N^*_{P_0} \\
&= [B_{P_0} - \overline{\sigma_{P_0}(M \cap A_{P_0})}] \cup N^*_{P_0} \qquad (10.132)\\
&= B^*_{P_0} \cup N^*_{P_0} = H^*_{P_0}.
\end{aligned}
$$

Also wird L^* durch α_{P_0} pseudokonform auf die komplexe Kurve

$$\tilde{L} = \alpha_{P_0}(L^*) = \alpha_{P_0}\sigma_{P_0}(L \cap A) \cup \{Q_0\} = \sigma_M(L \cap A) \cup \{Q_0\} \qquad (10.133)$$

abgebildet, wobei $\tilde{L} \cap N = \{Q_0\}$ ist. Wenn P_0 gewöhnlicher Punkt von L ist, so ist R_0 gewöhnlicher Punkt von L^* und Q_0 gewöhnlicher Punkt von $\tilde{L}$.

[14]) Ist M Teilmenge einer in einer Umgebung von M analytischen Menge, deren Dimension höchstens 2 ist, so folgt dieser Satz unmittelbar aus Satz 3.6.

Für $P \to P_0$ mit $P \in L \cap A$ strebt $\sigma_{P_0}(P) \to R_0$ mit $\sigma_{P_0}(P) \in B^*_{P_0}$ und $R_0 \in N^*_{P_0}$, also strebt $\sigma_M(P) = \alpha_{P_0}\sigma_{P_0}(P) \to \alpha_{P_0}(R_0) = Q_0$, weshalb sich σ_M längs L in P_0 bestimmt verhält sowie $Q_0 = \sigma_M(P_0, L)$ und $\sigma_M(L, L) = \sigma_M(L \cap A) \cup \{Q_0\} = \tilde{L}$ ist. Wegen $v_M(\tilde{L}, H) = v_M\sigma_M(L \cap A) \cup v_M(Q_0, H) = (L \cap A) \cup \{P_0\} = L$ ist $v_M(\bar{\bar{L}} \cap N, H) \subseteq \bar{L} \cap M = \{P_0\}$ also $\bar{\bar{L}} \cap N \subseteq N \cap H'_{P_0}$, woraus

$$(10.134) \qquad \bar{\bar{L}} \cap N = \bar{\bar{L}} \cap N \cap H'_{P_0} = \alpha_{P_0}(\bar{L}^* \cap N^*_{P_0}) = \{\alpha_{P_0}(R_0)\} = \{Q_0\} = \tilde{L} \cap N$$

folgt, w.z.b.w.

Der folgende Satz wird bei der Erzeugung analytischer und meromorpher Modifikationen unentbehrliche Dienste leisten[15]).

Satz 10.16. Satz von H. Hopf und H. Bührer.

Voraussetzung. 1. *Die komplexe Mannigfaltigkeit H der Dimension 4 werde durch die analytische Abbildung $\varkappa$ mit der Vielfachheit $\varphi_\varkappa$ auf die Teilmenge H_1 der 4-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit G abgebildet. Die offene Menge $B \subseteq H$ werde durch $\varkappa$ pseudokonform in die offene Menge $A \subseteq G$ abgebildet. Die Menge $N = H - B$, auf der $\varphi_\varkappa(Q) > 0$ sei, enthalte keinen inneren Punkt.*

2. *In $M = G - A$ werde der σ-Prozeß*

$$(10.135) \qquad \mathfrak{S}_M = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} G, A, M, \sigma_M \\ \tilde{H}, \tilde{B}, \tilde{N}, v_M \end{pmatrix}$$

ausgeführt.

3. *Die Menge N_0 werde von den Punkten $Q \in N$ gebildet, in denen die Abbildung $\sigma_M \varkappa(Q)$ längs B keine Lücke hat.*

Behauptung. *Die Menge $H_0 = N_0 \cup B$ ist offen. Die in B pseudokonforme Abbildung $\sigma_M \varkappa(Q)$ läßt sich in H_0 zu einer analytischen Abbildung γ fortsetzen, die H_0 in $\tilde{H}$ abbildet und deren Vielfachheit φ_γ sei. Es ist*

$$(10.136) \qquad 1 \leq \varphi_\gamma(Q) \leq \varphi_\varkappa(Q) \quad \text{für } Q \in H,$$

$$(10.137) \qquad \varphi_\gamma(Q) = \varphi_\varkappa(Q) \quad \text{für } Q \in \varkappa^{-1}(A \cap H_1) \supseteq B,$$

$$(10.138) \qquad \varphi_\gamma(Q) < \varphi_\varkappa(Q) \quad \text{für } Q \in H_0 \cap \varkappa^{-1}(M \cap H_1) \subseteq N_0.$$

Anmerkung 1. *Hat M keinen Häufungspunkt, so sind $N_0 = N$ und $H_0 = H$.*

Anmerkung 2. *Ist $\varphi_\varkappa(Q) = 1$, so ist $Q \in N_0$.*

Beweis. Die Menge $N = \{Q \mid \varphi_\varkappa(Q) > 0\}$ ist leer oder eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus H. Auf jedem irreduziblen Teil von N ist $\varkappa$ konstant. Jeder Punkt $Q_0 \in N_0 \subseteq N$ hat also eine offene Umgebung V, in der $\varkappa(Q) = \varkappa(Q_0) = P_0$ für alle $Q \in N \cap V$ gilt. Nun wird behauptet, daß $\sigma_M \varkappa$ in Q_0 regulär ist.

Im Falle $P_0 \in A$ ist das trivial. Im Falle $P_0 \in M$ wird Satz 10.12 auf den σ-Prozeß $\mathfrak{S}_M$ angewandt, wozu die Tabelle

[15]) Der Satz wurde von H. Hopf [9a], § 3, Nr. 2 und Nr. 3 ohne den Begriff der Vielfachheit bewiesen, weswegen seine dortige Formulierung stark von der hiesigen abweicht. Der Satz möge daher auch hier bewiesen werden, wobei ähnlich wie bei H. Hopf [9a] verfahren wird. Eine wesentliche Beweisvereinfachung wurde von H. Bührer gegeben. Den Satz und seinen Beweis habe ich in einem Vortrag von H. Hopf in Zürich 1952 kennengelernt, und zwar in der in [9a] gegebenen Form.

Satz 10.12	G	A	M	σ_M	H	B	N	v_M	P_0	U_α	U'_α	α	U_{β_1}	β_1
Hier	G	A	M	σ_M	$\tilde{H}$	$\tilde{B}$	$\tilde{N}$	v_M	P_0	U_α	U'_α	α	U_{β_1}	β_1

Satz 10.12	U_{β_2}	β_2	U'_{β_1}	$U^*_{\beta_1}$	U'_{β_2}	$U^*_{\beta_2}$	N'_1	N'_2	A'
Hier	U_{β_2}	β_2	U'_{β_1}	$U^*_{\beta_1}$	U'_{β_2}	$U^*_{\beta_2}$	N'_1	N'_2	A'

dient. Der Durchschnitt $\varkappa^{-1}(U_\alpha) \cap V = V_1$ ist offen. Die Abbildung

$$\mathfrak{z}(Q) = (z_1(Q), z_2(Q)) = \alpha^{-1}\varkappa(Q) \tag{10.139}$$

bildet V_1 analytisch in U'_α ab, wobei $B \cap V_1$ in einen Teil von A' übergeht. Auf $B \cap V_1$ ist also $\mathfrak{z}(Q) \neq 0$, weswegen die Funktion $\frac{z_1(Q)}{z_2(Q)}$ auf $B \cap V_1$ keine Unbestimmtheitsstelle hat. Nach Satz 7.1 hat sie auf $N \cap V$ ebenfalls keine Unbestimmtheitsstelle.

1. Fall. In Q_0 ist $h_1(Q) = \frac{z_1(Q)}{z_2(Q)}$ analytisch. In einer Umgebung $V_2 \subseteq V_1$ von Q_0 ist dann $z_2(Q) \neq 0$ für $Q \in V_2 \cap B$. Aus Satz 10.12 folgt

$$\beta_2^{-1}\sigma_M\varkappa(Q) = \left(\frac{z_1(Q)}{z_2(Q)}, z_2(Q)\right) = (h_1(Q), z_2(Q)) \in U'_{\beta_2} \tag{10.140}$$

für $Q \in V_2 \cap B$. Die Abbildung

$$\delta(Q) = (h_1(Q), z_2(Q)) \tag{10.141}$$

bildet V_2 analytisch in $U^*_{\beta_2}$ ab. Für $Q \in N \cap V_2$ ist $\mathfrak{z}(Q) = \mathfrak{z}(Q_0) = 0$.

Da die Abbildung $\sigma_M\varkappa$ in $Q_0 \in N_0$ längs B keine Lücke hat, gibt es eine Folge $Q^\nu \in B \cap V_2$ mit $Q_0 = \lim_{\nu\to\infty} Q^\nu$ und einen Punkt $R_0 \in \tilde{H}$, gegen den die Folge $R^\nu = \sigma_M\varkappa(Q^\nu)$ für $\nu \to \infty$ konvergiert, wobei $R^\nu \in U_{\beta_2}$ ist. Es gilt:

$$v_M(R_0, \tilde{H}) = \lim_{\nu\to\infty} v_M(R^\nu) = \lim_{\nu\to\infty} \varkappa(Q^\nu) = \varkappa(Q_0) = P_0. \tag{10.142}$$

Daher ist $R_0 \in U_{\beta_1} \cup U_{\beta_2}$. Ferner ist

$$\beta_1^{-1}(U_{\beta_1} \cap U_{\beta_2}) = U'_{\beta_1} \cap \{\mathfrak{u} \mid u_2 \neq 0\}. \tag{10.143}$$

Angenommen, es ist $R_0 \in U_{\beta_1} - U_{\beta_2}$, so wäre

$$\begin{aligned}(\ldots, 0) = \beta_1^{-1}(R_0) &= \lim_{\nu\to\infty} \beta_1^{-1}(R^\nu)\\ &= \lim_{\nu\to\infty} \beta_1^{-1}\beta_2\beta_2^{-1}\sigma_M\varkappa(Q^\nu)\\ &= \lim_{\nu\to\infty} \beta_1^{-1}\beta_2\delta(Q^\nu) = \lim_{\nu\to\infty}\left(h_1(Q^\nu)\, z_2(Q^\nu), \frac{1}{h_1(Q^\nu)}\right),\end{aligned} \tag{10.144}$$

was falsch ist, da $\lim_{\nu\to\infty} h_1(Q^\nu) = h_1(Q_0) \neq \infty$ ist. Folglich ist $R_0 \in U_{\beta_2}$ und

$$\beta_2^{-1}(R_0) = \lim_{\nu\to\infty} \beta_2^{-1}\sigma_M\varkappa(Q^\nu) = (h_1(Q_0), 0) \in U'_{\beta_2}. \tag{10.145}$$

Da die Menge U'_{β_2} offen und die Abbildung $\delta(Q)$ analytisch ist, gibt es eine offene Umgebung $V_3 \subseteq V_2$ von Q_0, so daß $\delta(V_3) \subseteq U'_{\beta_2}$ ist. Daher bildet $\beta_2\delta(Q)$ die offene Umgebung V_3 von Q_0 analytisch in $\tilde{H}$ ab und setzt $\sigma_M\varkappa(Q)$ in $B \cup V_3$

analytisch fort. Es ist $V_3 \cap N = V_3 \cap N_0$, also ist Q_0 innerer Punkt von $H_0 = N_0 \cup B$; die Abbildung $\sigma_M \varkappa$ ist in Q_0 regulär.

2. Fall. In Q_0 ist $h_2(Q) = \frac{z_2(Q)}{z_1(Q)}$ analytisch. Ganz entsprechend zeigt sich, daß Q_0 innerer Punkt von H_0 ist und die Abbildung $\sigma_M \varkappa$ sich in Q_0 regulär verhält.

Da N eine höchstens 2-dimensionale analytische Menge ist, läßt sich $\sigma_M \varkappa$ aus B analytisch in die offene Menge H_0 zur Abbildung γ fortsetzen, deren Vielfachheit φ_γ sei. In einer Umgebung eines jeden Punktes $Q_0 \in \varkappa^{-1}(A \cap H_1)$ ist $\gamma = \sigma_M \varkappa$ analytisch, wobei σ_M in $\varkappa(Q_0)$ pseudokonform ist. Dort gilt also $\varphi_\gamma(Q_0) = \varphi_{\sigma_M \varkappa}(Q_0) = \varphi_\varkappa(Q_0)$. Ist aber $Q_0 \in H_0 \cap \varkappa^{-1}(M \cap H_1)$, so bestimmt man zu $P_0 = \varkappa(Q_0)$ wie oben β_1, β_2 usw. Wenn $h_1(Q) = \frac{z_1(Q)}{z_2(Q)}$ in Q_0 analytisch ist, wird die Vielfachheit $\varphi_\gamma(Q_0)$ durch die Vielfachheit von $\beta_2 \delta$ in Q_0, d. h. von δ in Q_0 gegeben, die gleich der Vielfachheit der Nullstelle Q_0 des alternierenden Differentials

$$\partial h_1(Q)\, \partial z_2(Q) = \frac{1}{z_2(Q)}\, \partial z_1(Q)\, \partial z_2(Q) \tag{10.146}$$

ist. Wenn $h_2(Q) = \frac{z_2(Q)}{z_1(Q)}$ in Q_0 analytisch ist, erhält man $\varphi_\gamma(Q_0)$ entsprechend als Vielfachheit der Nullstelle Q_0 des alternierenden Differentials

$$\partial z_1(Q)\, \partial h_2(Q) = \frac{1}{z_1(Q)}\, \partial z_1(Q)\, \partial z_2(Q), \tag{10.147}$$

während sich die Vielfachheit $\varphi_\varkappa(Q)$ in beiden Fällen als Vielfachheit von $\alpha^{-1}\varkappa(Q) = (z_1(Q), z_2(Q))$, d. h. als Vielfachheit der Nullstelle Q_0 des alternierenden Differentials

$$\partial z_1(Q)\, \partial z_2(Q) \tag{10.148}$$

berechnet. Wegen $z_1(Q_0) = z_2(Q_0) = 0$ ergibt sich $\varphi_\varkappa(Q_0) > \varphi_\gamma(Q_0)$. Wegen $\varkappa(B) \subseteq A \cap H_1$ ist $\varkappa^{-1}(A \cap H_1) \supseteq B$ und $\varkappa^{-1}(M \cap H_1) \cap H_0 \subseteq N \cap H_0 = N_0$. Die Behauptungen sind richtig, w.z.b.w.

Beweis der 1. Anmerkung. Zu jedem Punkt $Q_0 \in N$ gibt es eine Folge $Q^\nu \in B$ mit $Q_0 = \lim_{\nu\to\infty} Q^\nu$. Ist $\varkappa(Q_0) \in A$, so strebt $\sigma_M \varkappa(Q^\nu) \to \sigma_M \varkappa(Q_0) \in \Sigma_{\sigma_M \varkappa}(Q_0)$, also verhält sich $\sigma_M \varkappa$ in Q_0 bestimmt. Ist aber $\varkappa(Q_0) \in M$, so kann man, da $\mathfrak{S}_M$ nach Satz 10.14 beiderseits offen ist, eine gleichbezeichnete Teilfolge der $\varkappa(Q^\nu) \in A$ auswählen, so daß $\sigma_M \varkappa(Q^\nu) \to R_0 \in \Sigma_{\sigma_M \varkappa}(Q_0)$ für $\nu \to \infty$ strebt; es streut $\sigma_M \varkappa$ in Q_0. In beiden Fällen ist $Q_0 \in N_0$, woraus $N = N_0$ folgt, w.z.b.w.

Beweis der 2. Anmerkung. Ist in einem Punkt $Q_0 \in N$ die Vielfachheit $\varphi_\varkappa(Q_0) = 1$, so wird $Q_0 \in N_0$ behauptet. Im Punkt $P_0 = \varkappa(Q_0)$ werde der σ-Prozeß $\mathfrak{S}_{P_0} = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} G, & A_{P_0}, & P_0, & \sigma_{P_0} \\ H_{P_0}, & B_{P_0}, & N_{P_0}, & v_{P_0} \end{pmatrix}$ ausgeführt (man vergleiche Definition 10.2, deren Bezeichnungsweise sinngemäß für $\mathfrak{S}_M$ übernommen werde). Nach der 1. Anmerkung läßt sich $\sigma_{P_0}\varkappa(Q)$ analytisch auf H zur Abbildung γ_0 mit der Vielfachheit φ_{γ_0} fortsetzen. In einer Umgebung V von Q_0 ist $\varphi_\varkappa(Q) = 1$ und $\varkappa(Q) = P_0$ für $Q \in N$; nach Satz 10.16 ist

$$0 \leq \varphi_{\gamma_0}(Q) < \varphi_\varkappa(Q) = 1 \quad \text{also} \quad \varphi_{\gamma_0}(Q) = 0 \tag{10.149}$$

für $Q \in N \cap V$. Daher bildet γ_0 die offene Menge V pseudokonform auf $V' \subset H_{P_0}$ ab. Für $Q \in V'$ ist $v_{P_0}(Q, H) = \varkappa\,\gamma^{-1}(Q)$ also

$$N_{P_0} \cap V' = v_{P_0}^{-1}(P_0, H) \cap V' = \gamma_0(\varkappa^{-1}(P_0) \cap V) = \gamma_0(N \cap V), \tag{10.150}$$

woraus

$$v_{P_0}(B_{P_0} \cap V') = v_{P_0}\gamma_0(B \cap V) = \varkappa(B \cap V) \subseteq A \tag{10.151}$$

folgt. Daher ist jeder Punkt von $N_{P_0} \cap V'$ äußerer Punkt von $\sigma_{P_0}(M \cap A_{P_0})$, d. h. $N_{P_0} \cap V' = N^*_{P_0} \cap V'$. Es strebt

$$\sigma_M \varkappa(Q) = \alpha_{P_0}\sigma_{P_0}\varkappa(Q) = \alpha_{P_0}\gamma_0(Q) \to \alpha_{P_0}\gamma_0(Q_0) \in H'_{P_0} \subseteq \tilde{H} \tag{10.152}$$

für $Q \to Q_0$ mit $Q \in B$, woraus $Q_0 \in N_0$ folgt, w.z.b.w.

Später wird ein Beispiel mit $N \neq N_0$ gegeben werden[16]). Die 2. Anmerkung zeigt, daß bei der Definition des σ-Prozesses in einer Menge M, d. h. bei der Identifizierung der Teile $H^*_{P_0}$ von H_{P_0} in Definition 10.2 die Mengen $H^*_{P_0}$ und insbesondere $N^*_{P_0}$ maximal gewählt sind. Dies zeigt auch der folgende Satz:

Satz 10.17. Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei analytisch. Die Abbildung* $v(Q, H)$ *habe auf* N *die Vielfachheit* 1. *In* M *werde der* σ*-Prozeß* $\mathfrak{S}_M = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} G, A, M, \sigma_M \\ \tilde{H}, \tilde{B}, \tilde{N}, v_M \end{pmatrix}$ *ausgeführt.*

Behauptung. *Es gibt eine pseudokonforme Abbildung* π *von* H *in* $\tilde{H}$, *für die gilt:*

$$\pi(H) \subseteq \tilde{H}, \quad \pi(N) \subseteq \tilde{N}, \quad \pi(B) = \tilde{B}, \tag{10.153}$$

$$\pi\,\tau(P) = \sigma_M(P) \qquad \text{für } P \in A. \tag{10.154}$$

Beweis. Nach Satz 10.16 und Anmerkung 2 läßt sich die auf A pseudokonforme Abbildung $\sigma_M v(P)$ analytisch in H fortsetzen. Die Vielfachheit der Fortsetzung π ist auf B gleich der Vielfachheit von $v(Q)$, also gleich Null, auf N kleiner als 1, also ebenfalls Null. Daher wird H pseudokonform von π in H abgebildet, wobei $\pi(B) = \sigma_M v(B) = \tilde{B}$ und $\pi(N) = \pi(H) - \pi(B) \subseteq \tilde{H} - \tilde{B} = \tilde{N}$ ist, w.z.b.w.

Aus Satz 10.17 folgen noch einmal Satz 10.4 und Satz 10.8, also die Eindeutigkeit des σ-Prozesses.

§ 11. Die Erzeugung analytischer Modifikationen zwischen kompakten Mannigfaltigkeiten durch σ-Prozesse.

Wie in der Einleitung zu dieser Arbeit (Teil IV) begründet wurde, wird erst der Fall einer analytischen Modifikation $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ betrachtet, bei der N höchstens endlich viele 2-dimensionale, irreduzible analytische Mengen enthält, was für kompaktes H immer der Fall ist.

Der folgende Satz wurde von H. HOPF [9a] für den Fall bewiesen, daß M nur aus einem Punkt besteht. Sein Beweis läßt sich unmittelbar auf den

[16]) Das Beispiel wird zu Anfang des § 13 gegeben.

hier vorliegenden Fall übertragen, wobei jedoch zweckmäßigerweise der Begriff der Vielfachheit einer Abbildung benutzt wird. Dieser legt es nahe, die Induktion etwas anders zu führen, als es bei H. Hopf [9a] geschehen ist, nämlich nach dem Maximum der Vielfachheit.

Satz 11.1. Erzeugung analytischer Modifikationen (H. Hopf)[17]).

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, M, N, v \end{pmatrix}$ *sei analytisch. Die Menge N enthalte höchstens endlich viele 2-dimensionale, irreduzible analytische Mengen.*

Behauptung. *Es gibt 4-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten* $H_0, H_1, \ldots, H_s$ *und Mengen* $M_\varrho \subset H_\varrho$ *für* $\varrho = 0, \ldots, s$, *so daß gilt:*

1. *Es ist* $H_0 = G$ *und* $M_0 \subseteq M$ *und* $H_{\varrho+1}$ *wird aus* H_ϱ *durch einen σ-Prozeß in* M_ϱ *gewonnen:*

$$\mathfrak{S}_\varrho = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} H_\varrho, & A_\varrho, & M_\varrho, & \sigma_{M_\varrho} \\ H_{\varrho+1}, & B_{\varrho+1}, & N_{\varrho+1}, & v_{M_\varrho} \end{pmatrix} \qquad (\varrho = 0, 1, \ldots, s-1). \tag{11.1}$$

Es ist $A_s = H_s$ *und* $M_s = \theta$.

2. *Für* $\varrho = 1, \ldots, s-1$ *ist* $M_\varrho \subset N_\varrho$ *und* $B_\varrho \subset A_\varrho$. *Die Mengen* $M_0, \ldots, M_{s-1}$ *bestehen aus endlich vielen Punkten.*

3. *Für* $\varrho = 0, \ldots, s$ *bildet eine Abbildung* γ_ϱ *die Mannigfaltigkeit H analytisch in* H_ϱ *mit der Vielfachheit* φ_ϱ *ab. Für* $\varrho = 0, 1, \ldots, s-1$ *ist* $\tilde{N}_\varrho = \{Q \mid \varphi_\varrho(Q) > 0\}$ *eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus H und für* $\varrho = s$ *ist* $\tilde{N}_s$ *leer. Durch* γ_ϱ *wird* $H - \tilde{N}_\varrho$ *pseudokonform in* H_ϱ *abgebildet* $(\varrho = 0, \ldots, s)$. *Es ist* $M_\varrho = \gamma_\varrho(\tilde{N}_\varrho)$.

4. *Für* $\varrho = 1, \ldots, s$ *und* $Q \in \tilde{N}_{\varrho-1}$ *ist*

$$\varphi_\varrho'(Q) < \varphi_{\varrho-1}(Q), \tag{11.2}$$

$$\tilde{N}_\varrho \subseteq \tilde{N}_{\varrho-1} \subseteq N. \tag{11.3}$$

5. *Es ist*

$$\gamma_0(Q) = v(Q, H) \quad \textit{für } Q \in H, \tag{11.4}$$

$$\gamma_{\varrho+1}(Q) = \sigma_{M_\varrho}\gamma_\varrho(Q) \quad \textit{für } Q \in H - \tilde{N}_\varrho \textit{ und } \varrho = 0, \ldots, s-1. \tag{11.5}$$

6. *Durch* $\pi(Q) = \gamma_s(Q)$ *wird H pseudokonform in* H_s *und* $\tilde{B}_0 = H - N_0$ *in* $\tilde{B} = \sigma_{M_{s-1}} \cdots \sigma_{M_0}(A_0)$ *abgebildet. Es ist* $\pi(\tilde{N}_0) \subseteq \tilde{N} = H_s - \tilde{B}$, *wobei* $\tilde{N}$ *leer* $(s = 0)$ *oder eine kompakte, rein 2-dimensionale analytische Menge ist.*

Beweis. Die Abbildung $\gamma_0(Q) = v(Q, H)$ habe die Vielfachheit $\varphi_0(Q)$. Nach Satz 7.1 ist $\tilde{N}_0 = \{Q \mid \varphi_0(Q) > 0\}$ leer oder eine rein 2-dimensionale analytische Menge, die als Teilmenge von N höchstens endlich viele irreduzible Teile enthält. Ist D die Menge der nichtgewöhnlichen Punkte von $\tilde{N}_0$, so ist $\varphi_0(Q)$ auf jedem irreduziblen Teil von $\tilde{N}_0$ konstant, abgesehen von den Punkten aus D. Daher existiert $\Phi(\mathfrak{M}) = \max\limits_{Q \in H - D} \varphi_0(Q)$ und ist positiv, wenn $\tilde{N}_0 \neq \theta$ ist.

[17]) Man vergleiche H. Hopf [9] und [9a].

Für $\Phi(\mathfrak{M}) = 0$ ist die Behauptung mit $s = 0$ trivialerweise richtig. Nun werde angenommen, die Behauptung sei bereits für alle analytischen Modifikationen der in der Voraussetzung genannten Art mit $\Phi(\mathfrak{M}) \leqq n$ bewiesen. Dann werde sie für $\Phi(\mathfrak{M}) = n + 1$ bewiesen.

Wegen $\Phi(\mathfrak{M}) = n + 1 > 0$ ist $\tilde{N}_0$ nicht leer. Auf jedem irreduziblen Teil von $\tilde{N}_0$ ist γ_0 konstant. Wegen $\tilde{N}_0 \subseteq N$ enthält $\tilde{N}_0$ höchstens endlich viele irreduzible Teile. Daher bildet γ_0 die Menge $\tilde{N}_0$ auf eine endliche Teilmenge M_0 von M ab, während $\tilde{B}_0 = H - \tilde{N}_0$ pseudokonform in $A_0 = G - M_0$ abgebildet wird. Es werde $H_0 = G$ gesetzt. In M_0 wird der σ-Prozeß

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} H_0, A_0, M_0, \sigma_{M_0} \\ H_1, B_1, N_1, v_{M_0} \end{pmatrix} \tag{11.6}$$

ausgeführt. Nach Satz 10.16 und Anmerkung 1 läßt sich die pseudokonforme Abbildung $\sigma_{M_0} v(Q, H)$ aus B_0 analytisch in H zur Abbildung $\gamma_1(Q)$ fortsetzen, deren Vielfachheit $\varphi_1(Q)$ sei. Es ist

$$0 = \varphi_1(Q) = \varphi_0(Q) \qquad \text{für } Q \in H - \tilde{N}_0, \tag{11.7}$$

$$\varphi_1(Q) < \varphi_0(Q) \qquad \text{für } Q \in \tilde{N}_0 \tag{11.8}$$

und ferner

$$\gamma_0(Q) = v(Q, H) \qquad \text{für } Q \in H, \tag{11.9}$$

$$\gamma_1(Q) = \sigma_{M_0} \gamma_0(Q) \qquad \text{für } Q \in H - \tilde{N}_0. \tag{11.10}$$

Die auf B_0 beschränkte Abbildung γ_1 sei $\tilde{v}_0$ und $\tilde{\tau}_0$ ihre Umkehrung. Durch $\tilde{v}_0$ wird $\tilde{B}_0$ pseudokonform auf B_1^* abgebildet, wobei

$$B_1^* = \tilde{v}_0(\tilde{B}_0) = \sigma_{M_0} v(\tilde{B}_0, H) \subseteq \sigma_{M_0}(A_0) = B_1, \tag{11.11}$$

$$B_1^* = \sigma_{M_0} v(\tilde{B}_0, H) \supseteq \sigma_{M_0} v(B, H) = \sigma_{M_0}(A) \tag{11.12}$$

ist. Es gibt eine Umgebung U von M und eine in U analytische Menge M^* mit $\dim M^* \leqq 2$, die M umfaßt. Es ist

$$N_1^* = H_1 - B_1^* \subseteq v_{M_0}^{-1}(M, H_1) \subseteq v_{M_0}^{-1}(M^*, H_1), \tag{11.13}$$

wobei $v_{M_0}^{-1}(M^*, H_1)$ in der offenen Umgebung $v_{M_0}^{-1}(U, H_1)$ von N_1^* analytisch ist und höchstens die Dimension 2 hat. Folglich ist

$$\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} H_1, B_1^*, N_1^*, \tilde{\tau}_0 \\ H\,, \tilde{B}_0, \tilde{N}_0, \tilde{v}_0 \end{pmatrix} \tag{11.14}$$

eine analytische Modifikation, bei der $\tilde{N}_0$ rein 2-dimensional und analytisch ist und nur endlich viele irreduzible Teile hat. Es ist

$$\Phi(\mathfrak{M}^*) = \operatorname*{Max}_{Q \in H - D} \varphi_1(Q) < \operatorname*{Max}_{Q \in H - D} \varphi_0(Q) = n + 1. \tag{11.15}$$

Nach Induktionsannahme kann man Satz 11.1 auf die Modifikation $\mathfrak{M}^*$ anwenden, wozu die folgende Übersetzungstabelle dient:

Satz 11.1 $\Phi(\mathfrak{M}) \leqq n$	G	A	M	τ	H	B	N	v	$\varrho = 0, 1, \ldots, s$	H_ϱ	M_ϱ
Hier $\Phi(\mathfrak{M}^*) \leqq n+1$	H_1	B_1^*	N_1^*	$\tilde{\tau}_0$	H	$\tilde{B}_0$	$\tilde{N}_0$	$\tilde{v}_0$	$\varrho + 1 = 1, 2, \ldots, s+1$	$H_{\varrho+1}$	$M_{\varrho+1}$

Satz 11.1 $\Phi(\mathfrak{M}) \leqq n$	A_ϱ	$\sigma_{M\varrho}$	B_ϱ	N_ϱ	$v_{M\varrho}$	γ_ϱ	φ_ϱ	$\tilde{N}_\varrho$	π	$\tilde{B}_0$	$\tilde{B}$	$\tilde{N}$
Hier $\Phi(\mathfrak{M}^*) \leqq n$	$A_{\varrho+1}$	$\sigma_{M\varrho+1}$	$B_{\varrho+1}$	$N_{\varrho+1}$	$v_{M\varrho+1}$	$\gamma_{\varrho+1}$	$\varphi_{\varrho+1}$	$\tilde{N}_{\varrho+1}$	π	$\tilde{B}_0$	B^*	N^*

Die Bezeichnungsweise der zweiten Tabellenzeilen stehen im Einklang mit den vorhergehenden Bezeichnungen. Wegen $\varphi_1(Q) < \varphi_0(Q)$ für $Q \in \tilde{N}_0$ ist $\tilde{N}_1 \subseteq \tilde{N}_0$ und

$$\text{(11.16)} \qquad v_{M_0}(M_1, H_1) = v_{M_0}(\gamma_1(\tilde{N}_1), H_1) = \gamma_0(\tilde{N}_1) \subseteq \gamma_0(\tilde{N}_0) = M_0,$$

$$\text{(11.17)} \qquad M_1 \subseteq v_{M_0}^{-1}(M_0, H_1) = N_1.$$

Da M_1 höchstens aus endlich vielen Punkten besteht, und da N_1 eine Sphäre enthält, ist M_1 echte Teilmenge von N_1 und $B_1 = H_1 - N_1$ echte Teilmenge von $A_1 = H_1 - M_1$. Die Behauptungen 1 bis 5 sind mit $s + 1$ statt s erfüllt.

Durch π wird H pseudokonform in H_{s+1} und B_0 auf

$$\text{(11.18)} \qquad \begin{aligned} \pi(\tilde{B}_0) &= \sigma_{M_s} \cdots \sigma_{M_1}\gamma_1(\tilde{B}_0) = \sigma_{M_s} \cdots \sigma_{M_0} v(\tilde{B}_0, H) \\ &\subseteq \sigma_{M_s} \cdots \sigma_{M_0}(A_0) \quad = \tilde{B} \end{aligned}$$

abgebildet. Man setzt

$$\text{(11.19)} \qquad \vartheta_\varrho(Q) = v_{M\varrho}(Q, H_\varrho) \qquad \text{für } Q \in H_\varrho,$$

$$\text{(11.20)} \qquad \tilde{\sigma}(P) = \sigma_{M_s} \cdots \sigma_{M_0}(P) \qquad \text{für } P \in A_0,$$

$$\text{(11.21)} \qquad \tilde{v}(Q) = v_{M_0} \cdots v_{M_s}(Q) \qquad \text{für } Q \in \tilde{B}.$$

Da jede der Modifikationen $\mathfrak{S}_\varrho$ beiderseits offen und analytisch ist, so ist auch die Modifikation

$$\text{(11.22)} \qquad \tilde{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A_0, M_0, \tilde{\sigma} \\ H_{s+1}, \tilde{B}, \tilde{N}, \tilde{v} \end{pmatrix}$$

analytisch, wobei

$$\text{(11.23)} \qquad \tilde{N} = \vartheta_s^{-1} \cdots \vartheta_0^{-1}(M_0) = \tilde{v}^{-1}(M_0, H_{s+1})$$

nach Satz 10.14 kompakt, analytisch und rein 2-dimensional ist. Es gelten:

$$\text{(11.24)} \qquad M_0 = \vartheta_0 \cdots \vartheta_s(\tilde{N}) = \tilde{v}(\tilde{N}, H_{s+1}),$$

$$\text{(11.25)} \qquad \vartheta_0 \cdots \vartheta_s \pi(\tilde{N}_0) = v(\tilde{N}_0, H) = M_0,$$

$$\text{(11.26)} \qquad \pi(\tilde{N}_0) \subseteq \vartheta_s^{-1} \cdots \vartheta_s^{-1}(M_0) = \tilde{N},$$

w.z.b.w.

Identifiziert man die Punkte Q und $\pi(Q)$, so kann man sich die Modifikation erzeugt denken, indem man in endlicher Anzahl hintereinander σ-Prozesse in gewissen endlichen Mengen ausführt und dann gewisse überflüssige Punkte wegläßt[18]). Nun soll noch untersucht werden, wann dieses „Weglassen" überflüssig ist. Dabei kann man sich O.B.d.A. auf den Fall beschränken, daß $\mathfrak{M}^{-1}$ die Mannigfaltigkeit H in jedem Punkt von N ändert.

[18]) Man könnte diese überflüssigen Punkte auch nach dem Verfahren von Satz 14.2 noch durch σ-Prozesse beseitigen.

Hilfssatz 1. Die Modifikation $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ sei beiderseits offen und analytisch. Die Menge N sei kompakt und M bestehe nur aus isolierten Punkten. Für $P_0 \in M$ ist dann $N_{P_0} = v^{-1}(P_0, H)$ zusammenhängend.

Beweis. Es ist N_{P_0} abgeschlossen und als Teilmenge von N kompakt. Da $N_{P_0} \cap N_{P_1}$ für $P_0 \neq P_1$ leer und M endlich ist, gibt es eine offene Umgebung U von N_{P_0} mit $U \cap N_{P_0} = U \cap N$. Hängt N_{P_0} nicht zusammen, so gibt es offene Mengen V_1, V_2 mit $V_\nu \cap N_{P_0} \neq \theta$ und $N_{P_0} \subseteq V_1 \cup V_2 \subseteq U$, wobei $V_1 \cap V_2 = \theta$ ist. Da $V_\nu \cap N_{P_0} \neq \theta$ kompakt, $v(Q, H)$ auf V_ν abgesehen von N_{P_0} eineindeutig und $v(N_{P_0}, H) = P_0$ ist, ist $v(V_\nu, H)$ nach H. HOPF [9a] § 1 Nr. 3 eine offene Umgebung von P_0. Es ist $v(V_1, H) \cap v(V_2, H) - A \neq \theta$, also $V_1 \cap V_2 \neq \theta$, was falsch ist. Folglich hängt N_{P_0} zusammen.

Zusatz zu Satz 11.1. *Wenn in Satz 11.1 die Menge N kompakt, $G = v(H,H)$ und die Modifikation $\mathfrak{M}^{-1}$ in jedem Punkt von N die Mannigfaltigkeit H ändert, so bildet π die Mannigfaltigkeit H pseudokonform auf H_s ab, wobei*

$$M_0 = M, \quad A_0 = A, \quad \tilde{N}_0 = N, \qquad \tilde{B}_0 = B, \quad \pi(N) = \tilde{N}, \quad \pi(B) = \tilde{B} \tag{11.27}$$

gilt. Die gegebene Modifikation $\mathfrak{M}$ ist beiderseits offen und äquivalent der Modifikation

$$\tilde{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, & A, M, \sigma_{M_{s-1}} \cdots \sigma_{M_0} \\ H_s, & \tilde{B}, \tilde{N}, v_{M_0} \quad \cdots v_{M_{s-1}} \end{pmatrix}. \tag{11.28}$$

Die Menge $M = M_0$ besteht aus endlich vielen Punkten, etwa q, und die rein 2-dimensionale analytische Menge $\tilde{N}$ hat mindestens $s + q - 1$ irreduzible Teile.

Beweis. Da die Modifikation $\mathfrak{M}^{-1}$ in jedem Punkt von N die Mannigfaltigkeit H ändert, ist φ_0 auf N positiv. Es folgt

$$N = \tilde{N}_0, \quad B = \tilde{B}_0, \tag{11.29}$$

$$M_0 = v(\tilde{N}_0, H) = v(N, H) = v(H, H) \cap M = G \cap M = M, \tag{11.30}$$

$$A_0 = G - M_0 = G - M = A, \tag{11.31}$$

$$\begin{aligned} \pi(B) &= \sigma_{M_{s-1}} \cdots \sigma_{M_0} v(B) = \sigma_{M_{s-1}} \cdots \sigma_{M_0}(A) \\ &= \sigma_{M_{s-1}} \cdots \sigma_{M_0}(A_0) = \tilde{B}. \end{aligned} \tag{11.32}$$

Mit N ist auch $\pi(N)$ kompakt. Die Mengen $V_1 = \pi(H)$ und $V_2 = H_s - \pi(N)$ sind offen. Angenommen, es gibt einen Punkt $Q_0 \in \tilde{N} - \pi(N)$; dann werde

$$\vartheta_\varrho(Q) = v_{M_\varrho}(Q, H_\varrho) \qquad \text{für } Q \in H_\varrho, \tag{11.33}$$

$$P_0 = \vartheta_0 \cdots \vartheta_{s-1}(Q_0), \tag{11.34}$$

$$\tilde{N}_{P_0} = \vartheta_{s-1}^{-1} \cdots \vartheta_0^{-1}(P_0) \tag{11.35}$$

gesetzt. Es ist $P_0 \in M$ und $\tilde{N}_{P_0} \subseteq \tilde{N}$. Außerdem gilt

$$(V_1 \cup V_2) \cap \tilde{N}_{P_0} = H_s \cap \tilde{N}_{P_0} = \tilde{N}_{P_0}, \tag{11.36}$$

$$\begin{aligned} V_1 \cap V_2 \cap \tilde{N}_{P_0} &= \pi(H) \cap (H_s - \pi(N)) \cap \tilde{N}_{P_0} \\ &\subseteq \pi(H) \cap \tilde{N} \cap (H_s - \pi(\tilde{N}_0)) = \theta, \end{aligned} \tag{11.37}$$

$$Q_0 \in V_2 \cap \tilde{N}_{P_0}. \tag{11.38}$$

Nach Hilfssatz 1 ist $\tilde{N}_{P_s}$ zusammenhängend, also $\tilde{N}_{P_s} \subseteq V_2$. Da $G = v(H, H)$ also $M = v(N, H)$ ist, gibt es einen Punkt $R_0 \in N$ mit $v(R_0, H) = P_0$. Es ist

$$\vartheta_0 \ldots \vartheta_{s-1}\, \pi(R_0) = v(R_0, H) = P_0 \tag{11.39}$$

$$\begin{aligned} \pi(R_0) &\in \pi(N) \cap \vartheta_{s-1}^{-1} \ldots \vartheta_0^{-1}(P_0) = \pi(N) \cap \tilde{N}_{P_s} \\ &\subseteq \pi(N) \cap V_2 = \pi(N) \cap (H_s - \pi(N)) = \emptyset, \end{aligned} \tag{11.40}$$

was falsch ist. Also ist $\pi(N) = \tilde{N}$. Es war $\pi(B) = \tilde{B}$ schon bewiesen, woraus $\pi(H) = \pi(B) \cup \pi(N) = \tilde{B} \cup \tilde{N} = H_s$ folgt. Für $Q \in B$ ist $\pi(Q) = \sigma_{M_{s-1}} \ldots \sigma_{M_s} v(Q)$. Also ist die gegebene Modifikation äquivalent der beiderseits offenen Modifikation $\tilde{\mathfrak{M}}$. Beim ersten σ-Prozeß $\mathfrak{S}_0$ werden q, bei jedem weiteren σ-Prozeß $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_{s-1}$ mindestens eine Trägersphäre eingesetzt. Daher hat $\tilde{N}$ mindestens $q + s - 1$ irreduzible Teile, w.z.b.w.

Daraus ergibt sich:

Satz 11.2. Kriterium für beiderseits offene Modifikationen.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei analytisch. In N seien höchstens endlich viele irreduzible analytische Mengen der Dimension 2 enthalten. In jedem Punkt von N ändere die Modifikation $\mathfrak{M}^{-1}$ die Mannigfaltigkeit H.*

Behauptung. *Dann und nur dann ist $\mathfrak{M}$ beiderseits offen, wenn N kompakt und $v(H, H) = G$ ist.*

Beweis. a) Ist N kompakt und $v(H, H) = G$, so ist $\mathfrak{M}$ gemäß dem Zusatz von Satz 11.1 beiderseits offen.

b) Die Modifikation $\mathfrak{M}$ sei beiderseits offen. Nach Satz 5.5 ist $v(H, H) = G$. Da $\mathfrak{M}^{-1}$ die Mannigfaltigkeit H in jedem Punkt von N ändert, ist — in der Bezeichnungsweise von Satz 11.1 — die Vielfachheit φ_0 auf N positiv. Es folgt

$$\begin{aligned} &N = N_0, \quad B = \tilde{B}_0, \quad A = A_0, \quad M = M_0, \\ &\pi(B) = \tilde{B}, \; \pi(Q) = \sigma_{M_{s-1}} \ldots \sigma_{M_s} v(Q) \qquad \text{für } Q \in B. \end{aligned} \tag{11.41}$$

Da die Modifikationen

$$\tilde{\mathfrak{M}}^{-1} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} H_s, \tilde{B}, \tilde{N}, v_{M_{s-1}} \cdots v_{M_s} \\ G, A, M, \sigma_{M_{s-1}} \cdots \sigma_{M_s} \end{pmatrix}, \tag{11.42}$$

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix} \tag{11.43}$$

beiderseits offen sind, ist nach Satz 5.9 mit Anmerkung 2 auch die Modifikation

$$\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} H_s, \tilde{B}, \tilde{N}, \tau\, v_{M_{s-1}} \cdots v_{M_s} \\ H, B, N, \sigma_{M_{s-1}} \cdots \sigma_{M_s} v \end{pmatrix} \tag{11.44}$$

beiderseits offen. Da $\pi(Q) = \sigma_{M_{s-1}} \ldots \sigma_{M_s} v$ für $Q \in B$ gilt und π auf H analytisch, ja sogar pseudokonform ist, so ist die Modifikation auch analytisch. Nach Satz 5.5 ist $\pi(H) = H_s$. Also folgt

$$\pi(N) = \pi(H) - \pi(B) = H_s - \tilde{B} = \tilde{N}. \tag{11.45}$$

Mit $\tilde{N}$ ist auch N kompakt, w.z.b.w.

Nun kann Satz 10.5 verbessert werden:

Satz 11.3. Der σ-Prozeß als „einfachste“ Modifikation.

Voraussetzung. *Eine Modifikation* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei gegeben.*

Behauptung. *Dann und nur dann ist* $\mathfrak{M}$ *ein* σ*-Prozeß in einem Punkt, wenn gilt:*

1. *Die Modifikation* $\mathfrak{M}$ *ist offen.*
2. *Die Menge* M *besteht aus einem einzigen Punkt.*
3. *Die Menge* N *ist eine kompakte, irreduzible analytische Menge der Dimension* 2 *aus* H.

Beweis. a) Für einen σ-Prozeß in einem Punkt sind die Forderungen 1 bis 3 erfüllt.

b) Erfüllt die Modifikation $\mathfrak{M}$ die Forderungen 1 bis 3, so ist die Modifikation $\mathfrak{M}$ nach Satz 2.9 analytisch. Der einzige Punkt von M sei P_0. Es ist $v(N, H) \subseteq M = \{P_0\}$. Da N nicht leer ist, gilt $v(Q, H) = P_0$ für $Q \in N$ und $v(N, H) = M$, d. h. $v(H, H) = G$. Die Modifikation $\mathfrak{M}^{-1}$ ändert die Mannigfaltigkeit H in jedem Punkt von N. Nach Satz 11.2 ist $\mathfrak{M}$ beiderseits offen und daher nach Satz 10.5 ein σ-Prozeß in P_0, w.z.b.w.

§ 12. Die Erzeugung meromorpher Modifikationen zwischen kompakten Mannigfaltigkeiten durch σ-Prozesse.

Aus den in der Einleitung genannten Gründen werden erst Modifikationen $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ untersucht, bei denen M und N höchstens endlich viele irreduzible analytische Mengen der Dimension 2 enthalten. Wieder ist nur der wichtigste Spezialfall, nämlich G und H kompakt, in der Überschrift erwähnt.

Satz 12.1. Die Erzeugung meromorpher Modifikationen.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei meromorph und beiderseits offen. In* M *und* N *seien jeweils höchstens endlich viele irreduzible analytische Mengen der Dimension* 2 *enthalten*[19]).

Behauptung.

A. *Es gibt* 4*-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten* $H_0, \ldots, H_s$ *und Mengen* $M_\varrho \subset H_\varrho$ *für* $\varrho = 0, \ldots, s$, *so daß gilt:*

1. *Es ist* $H_0 = G$ *und* $M_0 \subseteq M$ *und* $H_{\varrho+1}$ *wird aus* H_ϱ *durch einen* σ*-Prozeß in* M_ϱ *gewonnen.*

$$\mathfrak{S}_\varrho = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} H_\varrho, & A_\varrho, & M_\varrho, \sigma_{M\varrho} \\ H_{\varrho+1}, & B_{\varrho+1}, & N_{\varrho+1}, v_{M\varrho} \end{pmatrix}. \tag{12.1}$$

Es ist $A_s = H_s$ *und* $M_s = \emptyset$.

[19]) Diese Voraussetzungen erfüllt eine meromorphe Modifikation $\mathfrak{M}$ zwischen kompakten Mannigfaltigkeiten. Denn nach Satz 2.4 ist eine solche Modifikation beiderseits offen und M sowie N enthalten höchstens endlich viele irreduzible analytische Mengen der Dimension 2. Im übrigen sei daran erinnert, daß eine meromorphe Modifikation zwischen 4-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeiten beiderseits meromorph ist (Satz 4.2).

2. *Für $\sigma = 1, \ldots, s-1$ ist $M_\varrho \subset N_\varrho$ und $B_\varrho \subset A_\varrho$. Die Mengen $M_0, \ldots, M_{s-1}$ bestehen aus endlich vielen Punkten.*

3. *Für $\varrho = 0, \ldots, s$ bildet eine analytische Abbildung $\delta_\varrho(P)$ die offene Menge A_ϱ in H ab. In jedem Punkt von M_ϱ ist δ_ϱ singulär.*

4. *Für $\varrho = 1, \ldots, s$ und $P \in B_\varrho$ ist*

$$\delta_\varrho(P) = \delta_{\varrho-1} v_{M_{\varrho-1}}(P, H_\varrho), \tag{12.2}$$

während

$$\delta_0(P) = \tau(P) \qquad \text{für } P \in A \tag{12.3}$$

gilt.

5. *Durch $\chi(P) = \delta_s(P)$ wird H_s analytisch auf H abgebildet.*

B. *Es gibt 4-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten $\underline{H}_0, \ldots, \underline{H}_{\underline{s}}$ und Mengen $\underline{M}_\varrho \subset \underline{H}_\varrho$ für $\varrho = 0, 1, \ldots, \underline{s}$, so daß gilt*

1. *Es ist $\underline{H}_0 = H$ und $\underline{M}_0 \subseteq N$ und $\underline{H}_{\varrho+1}$ wird aus $\underline{H}_\varrho$ durch einen σ-Prozeß in $\underline{M}_\varrho$ gewonnen:*

$$\underline{\mathfrak{S}}_\varrho = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} \underline{H}_\varrho, & \underline{A}_\varrho, & \underline{M}_\varrho, \sigma_{\underline{M}_\varrho} \\ \underline{H}_{\varrho+1}, & \underline{B}_{\varrho+1}, & \underline{N}_{\varrho+1}, v_{\underline{M}_\varrho} \end{pmatrix}. \tag{12.4}$$

Es ist $\underline{A}_s = \underline{H}_s$ und $\underline{M}_s = \theta$.

2. *Für $\varrho = 1, \ldots, \underline{s}-1$ ist $\underline{M}_\varrho \subset \underline{N}_\varrho$ und $\underline{B}_\varrho \subset \underline{A}_\varrho$. Die Mengen $\underline{M}_0, \ldots, \underline{M}_{s-1}$ bestehen aus endlich vielen Punkten.*

3. *Für $\varrho = 0, 1, \ldots, \underline{s}$ bildet eine analytische Abbildung $\underline{\delta}_\varrho(P)$ die offene Menge $\underline{A}_\varrho$ in G ab. In jedem Punkt von $\underline{M}_\varrho$ ist $\underline{\delta}_\varrho$ singulär.*

4. *Für $\varrho = 1, \ldots, \underline{s}$ und $P \in \underline{B}_\varrho$ ist*

$$\underline{\delta}_\varrho(P) = \underline{\delta}_{\varrho-1} v_{\underline{M}_{\varrho-1}}(P, \underline{H}_\varrho). \tag{12.5}$$

während

$$\underline{\delta}_0(P) = v(P) \qquad \text{für } P \in B \tag{12.6}$$

gilt.

5. *Durch $\underline{\chi}(P) = \underline{\delta}_{\underline{s}}(P)$ wird $\underline{H}_s$ analytisch auf G abgebildet.*

C. *Es gibt eine pseudokonforme Abbildung π von H_s auf $\underline{H}_{\underline{s}}$, so daß gilt:*

1. *Ist E die Menge, in der die Modifikation $\mathfrak{M}$ nichts ändert, und $\underline{E}$ die Menge, in der die Modifikation $\mathfrak{M}^{-1}$ nichts ändert, und sind*

$$\tilde{E} = \sigma_{M_{s-1}} \cdots \sigma_{M_0}(E), \tag{12.7}$$

$$\tilde{\underline{E}} = \sigma_{\underline{M}_{\underline{s}-1}} \cdots \sigma_{\underline{M}_0}(\underline{E}), \tag{12.8}$$

so gilt

$$\pi(\tilde{E}) = \tilde{\underline{E}}. \tag{12.9}$$

Werden unter τ^* und v^* die Fortsetzungen $\tau(P, G)$ bzw. $v(Q, H)$ verstanden, so ist

$$\begin{aligned} \pi(P) &= \sigma_{\underline{M}_{\underline{s}-1}} \cdots \sigma_{\underline{M}_0} \tau^* v_{M_0} \cdots v_{M_{s-1}}(P) \\ &= \sigma_{\underline{M}_{\underline{s}-1}} \cdots \sigma_{\underline{M}_0} \chi(P) \\ &= \underline{\chi}^{-1} v^* \chi(P) \qquad \text{für } P \in \tilde{E}. \end{aligned} \tag{12.10}$$

2. *Die Menge* $\tilde{N} = H_s - \tilde{E}$ *ist analytisch, und zwar leer oder rein 2-dimensional. Dasselbe gilt von*

$$\underline{\tilde{N}} = \underline{H}_s - \underline{\tilde{E}} = \pi(\tilde{N}). \tag{12.11}$$

Dann und nur dann ist $\tilde{N} = \theta$, *wenn* $s = \underline{s} = 0$ *ist.*

Beweis. a) *Die Menge* M_0^* *der singulären Punkte von* τ *und die Menge* $\underline{M}_0^*$ *der singulären Punkte von* v *sind endlich.*

Ist nämlich $P_0 \in M_0^*$, so gibt es nach Satz 9.3 eine rein 2-dimensionale analytische Menge $C(P_0) \subseteq N$, auf der v mit Ausnahme einer Menge $D(P_0)$ ohne Häufungspunkte regulär ist. Sind P_0 und P_1 verschiedene Punkte von M, so haben $C(P_0)$ und $C(P_1)$ keinen irreduziblen Teil gemeinsam, da $v(Q, H) = P_\nu$ auf $C(P_\nu) - D(P_\nu)$ gilt. Also enthält M_0^* höchstens endlich viele Punkte, was entsprechend auch für $\underline{M}_0^*$ folgt.

b) Setzt man $\underline{A}_0^* = H - \underline{M}_0^*$ und $N^* = \underline{A}_0^* \cap N$, so ist

$$\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ \underline{A}_0^*, B, N^*, v \end{pmatrix} \tag{12.12}$$

eine analytische Modifikation. Jede 2-dimensionale analytische Menge aus $\underline{A}_0^*$ ist in H regulär und eine irreduzible bleibt bei Fortsetzung in H irreduzibel. Daher liegen in N^* höchstens endlich viele irreduzible analytische Mengen der Dimension 2. Auf $\mathfrak{M}_0$ werde Satz 11.1 angewandt, vermöge der Übersetzungstabelle:

Satz 11.1	G	A	M	τ	H	B	N	v	$\varrho = 0, 1, \ldots, s$	H_ϱ	M_ϱ
Hier	G	A	M	τ	$\underline{A}_0^*$	B	N^*	v	$\varrho = 0, 1, \ldots, s$	H_ϱ	M_ϱ

Satz 11.1	σ_{M_ϱ}	$B_{\varrho+1}$	$N_{\varrho+1}$	v_{M_ϱ}	γ_ϱ	φ_ϱ	$\tilde{N}_\varrho$	A_ϱ	$\tilde{B}_0$	π
Hier	σ_{M_ϱ}	$B_{\varrho+1}$	$N_{\varrho+1}$	v_{M_ϱ}	γ_ϱ	φ_ϱ	$\tilde{N}_\varrho$	A_ϱ	$\tilde{E}$	γ_s

c) *Nun wird* $M_0 = M_0^*$ *und* $A_0 = G - M_0^*$ *behauptet.* Für $P_0 \in M_0$ ist $v^{-1}(P_0, \underline{A}_0^*)$ eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus $\underline{A}_0^*$, die in der Streumenge $\Sigma(P_0)$ von τ (bzgl. der Modifikation $\mathfrak{M}$) liegt; also ist τ in P_0 singulär. Zu $P_0 \in M_0^*$ gibt es eine rein 2-dimensionale analytische Menge $C(P_0)$ aus H, wobei $v(Q, H) = P_0$ für $Q \in \underline{A}_0^* \cap C(P_0)$ ist. Daher ist $\varphi_0(Q) \geqq 1$ für $Q \in \underline{A}_0^* \cap C(P_0) \neq \theta$, woraus $P_0 \in \gamma_0(\tilde{N}_0) = M_0$ folgt. Insgesamt ergibt sich $M_0 = M_0^*$ und $A_0 = H - M_0 = H - M_0^*$.

d) Für $\varrho = 0, 1, \ldots, s$ werden

$$\gamma_\varrho(B) = {}'B_\varrho, \quad {}'N_\varrho = H_\varrho - {}'B_\varrho, \quad \vartheta_\varrho(Q) = v_{M_\varrho}(Q, H_\varrho) \tag{12.13}$$

gesetzt und

$${}'B_0 = A, \quad {}'B_\varrho = \sigma_{M_{\varrho-1}} \cdots \sigma_{M_0}(A) = \vartheta_{\varrho-1}^{-1} \cdots \vartheta_0^{-1}(A) = \vartheta_{\varrho-1}^{-1}({}'B_{\varrho-1}), \tag{12.14}$$

$${}'N_0 = M, \quad {}'N_\varrho = \vartheta_{\varrho-1}^{-1} \cdots \vartheta_0^{-1}(M) = \vartheta_{\varrho-1}^{-1}({}'N_{\varrho-1}) \tag{12.15}$$

für $\varrho = 0, \ldots, s$ behauptet. Für $\varrho = 0$ ist dies wegen $\gamma_0(Q) = v(Q, H)$ richtig. Die Behauptung sei schon für $\varrho < s$ bewiesen. Wegen $B = H - N \subseteq H - \tilde{N}_\varrho$ ist

$${}'B_{\varrho+1} = \gamma_{\varrho+1}(B) = \sigma_{M_\varrho}\,\gamma_\varrho(B) = \sigma_{M_\varrho} \cdots \sigma_{M_0}(A) \subseteq \vartheta_\varrho^{-1} \cdots \vartheta_0^{-1}(A), \tag{12.16}$$

woraus

$$(12.17)\qquad 'N_{\varrho+1} \supseteq \vartheta_\varrho^{-1} \ldots \vartheta_0^{-1}(M)$$

folgt. Für $Q \in 'N_{\varrho+1} \cap \vartheta_\varrho^{-1} \ldots \vartheta_0^{-1}(A)$ ist $\vartheta_\varrho(Q) \in 'B_\varrho$ und $\gamma_\varrho(P) = \vartheta_\varrho(Q)$ für ein $P \in B \subsetneqq H - \tilde{N}_\varrho$, woraus

$$(12.18)\qquad Q = \sigma_{M_\varrho}\vartheta_\varrho(Q) = \sigma_{M_\varrho}\gamma_\varrho(P) = \gamma_{\varrho+1}(P) \in 'B_{\varrho+1} = H_{\varrho+1} - 'N_{\varrho+1}$$

folgt, was falsch ist. Also ist $\vartheta_\varrho^{-1} \ldots \vartheta_0^{-1}(M) \supseteq 'N_{\varrho+1}$, womit insgesamt

$$(12.19)\qquad 'N_{\varrho+1} = \vartheta_\varrho^{-1} \ldots \vartheta_0^{-1}(M) = \vartheta_\varrho^{-1}('N_\varrho),$$

$$(12.20)\qquad 'B_{\varrho+1} = \vartheta_\varrho^{-1} \ldots \vartheta_0^{-1}(A) = \vartheta_\varrho^{-1}('B_\varrho)$$

folgen.

e) *Nun wird behauptet, daß es eine offene Umgebung U von $'N_\varrho$ und eine in U analytische Menge $'N_\varrho^* \supseteq 'N_\varrho$ mit* $\dim 'N_\varrho^* \leqq 2$ *gibt.*

Wegen $'N_0 = M$ ist die Behauptung für $\varrho = 0$ richtig. Ist sie für $\varrho < s$ richtig, so ist $V = \vartheta_\varrho^{-1}(U)$ eine offene Umgebung von $\vartheta_\varrho^{-1}('N_\varrho) = 'N_{\varrho+1}$ und $\vartheta_\varrho^{-1}('N_\varrho^*)$ eine analytische Menge aus V, die $'N_{\varrho+1}$ enthält. Da ϑ_ϱ in jedem größten zusammenhängenden Teil von $H_{\varrho+1}$ bis auf eine 2-dimensionale analytische Menge pseudokonform ist, ergibt sich $\dim \vartheta_\varrho^{-1}('N_\varrho^*) \leqq 2$, womit die Behauptung bewiesen ist.

f) *Die Modifikation* $\mathfrak{M}_\varrho^* = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} H_\varrho, & 'B_\varrho, & 'N_\varrho, & \sigma_{M_\varrho} \\ H_{\varrho+1}, & 'B_{\varrho+1}, & 'N_{\varrho+1}, & v_{M_\varrho} \end{pmatrix}$ *ist analytisch und beiderseits offen.* Nach d) und e) ist nämlich $\mathfrak{M}_\varrho^*$ eine analytische Modifikation. Strebt $P^\nu \to P_0 \in 'N_\varrho$ für $\nu \to \infty$ und ist $P^\nu \in 'B_\varrho$, so strebt im Falle $P_0 \in A_\varrho$ die Folge $\sigma_{M_\varrho}(P^\nu) \to \sigma_{M_\varrho}(P_0)$ mit $\sigma_{M_\varrho}(P_0) = Q_0 \in \vartheta_\varrho^{-1}('N_\varrho) = 'N_{\varrho+1}$ für $\nu \to \infty$ und im Falle $P_0 \in M_\varrho$ wenigstens für eine gleichbezeichnete Teilfolge $\sigma_{M_\varrho}(P^\nu) \to Q_0 \in N_{\varrho+1} \subseteq$ $\subseteq 'N_{\varrho+1}$ für $\nu \to \infty$. Also ist $\mathfrak{M}_\varrho^*$ beiderseits offen.

g) *Die Modifikation* $\tilde{\mathfrak{M}}_\varrho = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} H, & B, & N, & \gamma_\varrho \\ H_\varrho, & 'B_\varrho, & 'N_\varrho, & \gamma_\varrho^{-1} \end{pmatrix}$ *ist beiderseits offen und meromorph.*

Für $\varrho = 0$ ist dies wegen $\tilde{\mathfrak{M}}_0 = \mathfrak{M}^{-1}$ richtig. Ist $\tilde{\mathfrak{M}}_\varrho$ meromorph und beiderseits offen, so ist, weil auch die Modifikation $\mathfrak{M}_\varrho^*$ meromorph und beiderseits offen ist, weil $\gamma_{\varrho+1} = \sigma_{M_\varrho}\gamma_\varrho$ auf B, bzw. $\gamma_{\varrho+1}^{-1} = \gamma_\varrho^{-1} v_{M_\varrho}$ auf $'B_{\varrho+1}$ ist, die aus $\tilde{\mathfrak{M}}_\varrho$ und $\mathfrak{M}_\varrho^*$ zusammengesetzte Modifikation $\tilde{\mathfrak{M}}_{\varrho+1}$ meromorph und beiderseits offen (Satz 5.9 mit Anmerkung 2).

h) Die Menge der singulären Punkte der Abbildung γ_ϱ^{-1} sei $'M_\varrho$ und δ_ϱ die eindeutige analytische Fortsetzung von γ_ϱ^{-1} in $'A_\varrho = H_\varrho - 'M_\varrho$, wenn γ_ϱ^{-1} als Abbildung in H aufgefaßt wird. Nun wird $'A_\varrho = A_\varrho$ behauptet.

Ist nämlich $P_0 \in 'M_\varrho$, also δ_ϱ in P_0 singulär, so gibt es nach Satz 9.3, angewandt auf die Modifikation $\tilde{\mathfrak{M}}_\varrho^{-1}$, eine rein 2-dimensionale analytische Menge $C \subseteq \Sigma_{\delta_\varrho}(P_0)$ aus H, so daß γ_ϱ auf C, abgesehen von einer Menge D ohne Häufungspunkte, regulär ist und $\gamma_\varrho(Q, H) = P_0$ für $Q \in C - D$ gilt. Es ist $C \cap \underline{A}_0^*$ $\subseteq C - D$ und $C \cap \underline{A}_0^*$ eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus $\underline{A}_0^*$, auf der γ_ϱ eine positive Vielfachheit hat. Also ist

$$(12.21)\qquad P_0 \in \gamma_\varrho(\tilde{N}_\varrho) = M_\varrho = H_\varrho - A_\varrho.$$

Ist aber $P_0 \in M_\varrho = H_\varrho - A_\varrho$, so ist $\underline{A}_0^* \cap \gamma_\varrho^{-1}(P_0)$ eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus $\underline{A}_0^*$, die in $\Sigma_{\delta_\varrho}(P_0)$ enthalten ist (Satz 7.1), also ist δ_ϱ in P_0 singulär, d. h. $P_0 \in 'M_\varrho$, woraus insgesamt $M_\varrho = 'M_\varrho$ und $A_\varrho = 'A_\varrho$ folgen.

i) Da $'N_\varrho$ keinen inneren Punkt hat, ist

$$\delta_0(P) = \tau(P, G) \quad \text{für } P \in A_0, \tag{12.22}$$

$$\delta_\varrho \sigma_{M_{\varrho-1}}(P) = \delta_{\varrho-1}(P) \quad \text{für } P \in A_{\varrho-1}; \tag{12.23}$$

denn auf $'B_{\varrho-1}$ ist $\gamma_\varrho^{-1}\sigma_{M_{\varrho-1}} = \gamma_{\varrho-1}^{-1}\, v_{M_{\varrho-1}}\sigma_{M_{\varrho-1}} = \gamma_{\varrho-1}^{-1}$.

k) *Nun sollen die Behauptungen A bewiesen werden.* Die Behauptungen A 1 und A 2 folgen unmittelbar aus Satz 11.1. Die Behauptung A 3 wurde schon in h) bewiesen. Nach i) ist

$$\delta_0(P) = \tau(P, G) \quad \text{für } P \in A_0, \tag{12.24}$$

$$\delta_\varrho(P) = \delta_{\varrho-1} v_{M_{\varrho-1}}(P, H_\varrho) \quad \text{für } P \in \vartheta_{\varrho-1}^{-1}(A_{\varrho-1}) = B_\varrho, \tag{12.25}$$

womit die Behauptung A 4 bewiesen ist. Wegen $A_s = H_s$ wird H_s durch $\chi(P) = \delta_s(P)$ analytisch in H abgebildet. Die Modifikation

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_s = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} H, & B, & N, & \gamma_s \\ H_s, & 'B_s, & 'N_s & \chi \end{pmatrix} \tag{12.26}$$

ist analytisch und beiderseits offen. Nach Satz 5.5 ist $\chi(H_s) = H$, womit A 5 und insgesamt alle Behauptungen A bewiesen sind.

l) Auf Grund der Symmetrie von Voraussetzung und Behauptung gelten auch die Behauptungen B und analoge Aussagen a) bis k), wobei analoge Dinge in B unterstrichen werden. In a) bis k) kann man insbesondere $\underline{A}_0^* = \underline{A}_0$ setzen.

m) *Nun wird behauptet, daß*

$$\overline{\mathfrak{M}}_\varrho = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} \underline{H}_\varrho, & '\underline{B}_\varrho, & '\underline{N}_\varrho, & \gamma_s \tau\, \underline{\delta}_\varrho \\ H_s, & 'B_s, & 'N_s, & \underline{\gamma}_\varrho v\, \chi \end{pmatrix} \tag{12.27}$$

eine analytische, beiderseits offene Modifikation ist. Die dann vorhandene analytische Fortsetzung von $\underline{\gamma}_\varrho v\, \chi$ in H_s werde mit π_ϱ bezeichnet. Ihre Vielfachheit sei $\psi_\varrho(Q)$ und

$$\hat{N}_\varrho = \{Q \mid \psi_\varrho(Q) > 0\}, \tag{12.28}$$

$$F_\varrho = H_s - \hat{N}_\varrho. \tag{12.29}$$

Da nämlich die Modifikationen

$$\widetilde{\underline{\mathfrak{M}}}_\varrho^{-1} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} \underline{H}_\varrho, & '\underline{B}_\varrho, & '\underline{N}_\varrho, & \underline{\delta}_\varrho \\ G, & A, & M, & \underline{\gamma}_\varrho \end{pmatrix}, \tag{12.30}$$

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, & A, & M, & \tau \\ H, & B, & N, & v \end{pmatrix}, \tag{12.31}$$

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_s = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} H, & B, & N, & \gamma_s \\ H_s, & 'B_s, & 'N_s, & \chi \end{pmatrix} \tag{12.32}$$

meromorph und beiderseits offen sind, ist auch die zusammengesetzte Modifikation $\overline{\mathfrak{M}}_\varrho$ meromorph und beiderseits offen. Für $\varrho = 0$ ist

$$\overline{\mathfrak{M}}_\varrho = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} H, & B, & N, & \gamma_s \\ H_s, & 'B_s, & 'N_s, & \chi \end{pmatrix} = \widetilde{\mathfrak{M}}_s \tag{12.33}$$

analytisch.

Angenommen, für $\varrho < s$ ist $\overline{\mathfrak{M}}_\varrho$ analytisch. Für $P \in {}'B_s = \vartheta_{M_{s-1}}^{-1} \ldots \vartheta_{M_0}^{-1}(A)$ gilt:

$$\pi_\varrho(P) = \gamma_\varrho v\, \chi(P) = \gamma_\varrho v\, \delta_{s-1}\, \vartheta_{s-1}(P) = \cdots = \tag{12.34}$$
$$= \gamma_\varrho v\, \tau\, \vartheta_0 \ldots \vartheta_{s-1}(P) = \gamma_\varrho \vartheta_0 \ldots \vartheta_{s-1}(P).$$

Da $\underline{\gamma}_\varrho$ auf A_0 analytisch ist, gilt:

$$\pi_\varrho(P) = \underline{\gamma}_\varrho \vartheta_0 \ldots \vartheta_{s-1}(P) \text{ für } P \in \vartheta_{s-1}^{-1} \ldots \vartheta_0^{-1}(A_0). \tag{12.35}$$

Auf $\vartheta_{s-1}^{-1} \ldots \vartheta_0^{-1}(A_0)$ ist die Abbildung $\vartheta_0 \ldots \vartheta_{s-1}$ pseudokonform, also ist

$$\psi_\varrho(P) = \underline{\varphi}_\varrho(\vartheta_0 \ldots \vartheta_{s-1}(P)) \quad \text{für } P \in \vartheta_{s-1}^{-1} \ldots \vartheta_0^{-1}(A_0). \tag{12.36}$$

Weil $\varphi_\varrho(Q) > 0$ für $Q \in \underline{\tilde{N}}_\varrho \subset A_0$ ist, ergibt sich $\psi_\varrho(P) > 0$ für $P \in \vartheta_{s-1}^{-1} \ldots \vartheta_0^{-1}(\underline{\tilde{N}}_\varrho) = \underline{\tilde{N}}_\varrho^*$, d. h.

$$\pi_\varrho(\hat{N}_\varrho) \supseteq \pi_\varrho(\underline{\tilde{N}}_\varrho^*) = \underline{\gamma}_\varrho(\underline{\tilde{N}}_\varrho) = \underline{M}_\varrho. \tag{12.37}$$

Wegen $\hat{N}_\varrho \subseteq {}'N_s$ enthält $\hat{N}_\varrho$ keinen inneren Punkt. Nach Satz 7.1 wird $F_\varrho = H_s - \hat{N}_\varrho$ durch π_ϱ pseudokonform in $\underline{H}_\varrho - \pi_\varrho(\hat{N}_\varrho) \subseteq \underline{H}_\varrho - \underline{M}_\varrho = \underline{A}_\varrho$ abgebildet. Wie die Übersetzungstabelle:

Satz 10.16	H	$\varkappa$	H_1	$\varphi_\varkappa$	G	B	A	N	M	$\mathfrak{S}_M$	σ_M
Hier	H_s	π_ϱ	$\pi_\varrho(H_s)$	ψ_ϱ	$\underline{H}_\varrho$	F_ϱ	$\underline{A}_\varrho$	$\hat{N}_\varrho$	$\underline{M}_\varrho$	$\mathfrak{S}_{\underline{M}_\varrho}$	$\sigma_{\underline{M}_\varrho}$

Satz 10.16	$\tilde{H}$	$\tilde{B}$	$\tilde{N}$	v_M	N_*	H_*	γ	φ_γ
Hier	$\underline{H}_{\varrho+1}$	$\underline{B}_{\varrho+1}$	$\underline{N}_{\varrho+1}$	$v_{\underline{M}_\varrho}$	$\hat{N}_\varrho$	H_s	$\pi_{\varrho+1}$	$\psi_{\varrho+1}$

zeigt, sind die Voraussetzungen von Satz 10.16 und der Anmerkung 1 erfüllt. Durch $\pi_{\varrho+1}$ wird H_s analytisch in $\underline{H}_{\varrho+1}$ abgebildet, wobei $\pi_{\varrho+1}(Q) = \sigma_{M_\varrho} \pi_\varrho(Q)$ für $Q \in F_\varrho$ ist.

Für $Q \in {}'B_s \subseteq F_\varrho$ ist

$$\pi_\varrho(Q) = \underline{\gamma}_\varrho v\, \chi(Q), \tag{12.38}$$

$$v\, \chi(Q) \in v\, \chi({}'B_0) = v(B) = A = A_0 - M \subseteq A_0 - \underline{N}_\varrho \tag{12.39}$$

also

$$\pi_{\varrho+1}(Q) = \sigma_{\underline{M}_\varrho} \underline{\gamma}_\varrho v\, \chi(Q) = \underline{\gamma}_{\varrho+1} v\, \chi(Q). \tag{12.40}$$

Die Modifikation $\overline{\mathfrak{M}}_{\varrho+1}$ ist analytisch.

n) *Durch $\pi = \pi_{\underline{s}}$ wird H_s pseudokonform auf $\underline{H}_s$ abgebildet.* Da nämlich $\overline{\mathfrak{M}}_{\underline{s}}$ beiderseits offen ist, ergibt sich aus Satz 5.5 $\pi_{\underline{s}}(H_s) = \underline{H}_{\underline{s}}$. Entsprechend läßt sich $\gamma_s \tau\, \underline{\chi}$ zu einer analytischen Abbildung $\underline{\pi}$ von $\underline{H}_{\underline{s}}$ auf H_s fortsetzen, wobei $\underline{\pi}\, \pi(Q) = Q$ für $Q \in {}'B_s$ also sogar für $Q \in H_s$ gilt. Die Abbildung π ist pseudokonform.

o) *Nun werde die Behauptung* C 1 *bewiesen.* Die offenen Mengen $E, \underline{E}, \tilde{E}$ und $\underline{\tilde{E}}$ werden wie in C 1 definiert. Die Fortsetzung von τ auf E sei τ^* und die Fortsetzung von v auf $\underline{E}$ sei v^*. Nach Satz 5.7 ist $\tau^*(E) = \underline{E}$. Für $P \in \tilde{E}$ ist $v_{M_0} \ldots v_{M_{s-1}}(P) \in E \subseteq A_0$ also auch $\tau^* v_{M_0} \ldots v_{M_{s-1}}(P) \in \tau^*(E) = \underline{E} \subseteq \underline{A}_0$, weswegen die Abbildung $\sigma_{\underline{M}_{\varrho-1}} \ldots \sigma_{\underline{M}_0} \tau^* v_{M_0} \ldots v_{M_{s-1}}$ auf $\tilde{E}$ erklärt und

pseudokonform ist. Für $P \in {}'B_s \subseteq \tilde{E}$ gilt:

$$\begin{aligned} \pi(P) &= \underline{\chi}^{-1} v\, \chi(P) = \underline{\gamma}_s v\, \chi(P) \\ &= \underline{\gamma}_s v_{M_0} \ldots v_{M_{s-1}}(P) \qquad (12.41) \\ &= \sigma_{\underline{M}_{\underline{s}-1}} \ldots \sigma_{\underline{M}_0} \tau\, v_{M_0} \ldots v_{M_{s-1}}(P). \end{aligned}$$

Also ist

$$\pi(P) = \sigma_{\underline{M}_{\underline{s}-1}} \ldots \sigma_{\underline{M}_0} \tau^* v_{M_0} \ldots v_{M_{s-1}}(P) \qquad \text{für } P \in \tilde{E}, \qquad (12.42)$$

woraus

$$\begin{aligned} \pi(\tilde{E}) &= \sigma_{\underline{M}_{\underline{s}-1}} \ldots \sigma_{\underline{M}_0} \tau^* v_{M_0} \ldots v_{M_{s-1}}(\tilde{E}) \\ &= \sigma_{\underline{M}_{\underline{s}-1}} \ldots \sigma_{\underline{M}_0} \tau^*(E) \qquad (12.43) \\ &= \sigma_{\underline{M}_{\underline{s}-1}} \ldots \sigma_{\underline{M}_0}(\underline{E}) \\ &= \tilde{\underline{E}} \end{aligned}$$

folgt. Die Behauptung C 1 ist bewiesen.

p) *Die Behauptung* C 2 *wird nun bewiesen*. Die Teilmenge von A_0, auf der die Abbildung $\underline{\gamma}_0(Q) = \tau(P, G)$ eine positive Vielfachheit hat, ist die analytische Menge $\underline{\tilde{N}}_0$ aus A_0, die im Falle $\underline{s} = 0$ leer, im Falle $\underline{s} > 0$ rein 2-dimensional ist. Da $G - A_0 = M_0$ höchstens aus endlich vielen Punkten besteht, ist $L = \overline{\underline{\tilde{N}}_0}$ in G analytisch, und zwar leer im Falle $\underline{s} = 0$ bzw. rein 2-dimensional im Falle $\underline{s} > 0$. Wegen $L \subseteq \underline{\tilde{N}}_0 \cup M_0$ ist

$$L \cup M_0 = (L \cap A_0) \cup M_0 = \underline{\tilde{N}}_0 \cup M_0 = (A_0 - E) \cup M_0 = G - E. \qquad (12.44)$$

Da $\vartheta_0 \ldots \vartheta_{s-1}$ die Mannigfaltigkeit H_s analytisch auf G abbildet, da ${}'N_s = H_s - {}'B_s$ keinen inneren Punkt hat und da ${}'B_s$ pseudokonform auf A abgebildet wird, ist $\tilde{L}_0 = \vartheta_{s-1}^{-1} \ldots \vartheta_1^{-1}(L)$ eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus H_s (im Falle $\underline{s} > 0$) oder leer (im Falle $\underline{s} = 0$). Im Falle $s > 0$ ist $\tilde{L}_1 = \vartheta_{s-1}^{-1} \ldots \vartheta_0^{-1}(M_0) = \vartheta_{s-1}^{-1} \ldots \vartheta_0^{-1}(N_1)$ eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus H_s, während im Falle $s = 0$ die Menge $\tilde{L}_1 = M_0$ leer ist. Folglich gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{N} &= H_s - \tilde{E} = H_s - \sigma_{M_{\sigma-1}} \ldots \sigma_{M_0}(E) \qquad (12.45) \\ &= \vartheta_{s-1}^{-1} \ldots \vartheta_0^{-1}(G - E) = \vartheta_{s-1}^{-1} \ldots \vartheta_0^{-1}(L \cup M_0) = \tilde{L}_0 \cup \tilde{L}_1 \end{aligned}$$

eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus H_s, falls $s + \underline{s} > 0$ ist, bzw. leer, falls $s = \underline{s} = 0$ ist, w.z.b.w.

Damit ist gezeigt, daß eine meromorphe Modifikation zwischen kompakten Mannigfaltigkeiten — eine solche ist von selbst beiderseits offen — erhalten werden kann, indem man beiderseits je in endlicher Anzahl σ-Prozesse in endlichen Mengen M_ϱ bzw. $\underline{M}_\varrho$ hintereinander ausführt, man gelangt dann — bis auf analytische Äquivalenz — zur selben Mannigfaltigkeit. Umgekehrt ist natürlich jede Modifikation, die sich so erzeugen läßt, meromorph (Satz 5.9). Es gibt auch nichtmeromorphe Modifikationen zwischen kompakten Mannigfaltigkeiten, wie das Gegenbeispiel am Ende von § 2 zeigt.

(Eingegangen am 1. Februar 1955.)

SCHÜTTE, K.
Math. Annalen, Bd. 130, S. 183—195 (1955).

Die Winkelmetrik in der affin-orthogonalen Ebene.

Von

KURT SCHÜTTE in Marburg a. d. Lahn.

Einleitung.

Gegenstand unserer Betrachtung ist die affine Ebene mit Orthogonalität unter Ausschluß isotroper Geraden. Für die Existenz einer metrischen Grundform war in einer vorigen Note[1]) ein Schließungssatz aufgewiesen. Einen weiteren Schließungssatz erhalten wir mit der Forderung, daß sich die Winkel in üblicher Weise durch Streckenverhältnisse rechtwinkliger Dreiecke bestimmen lassen. Beide Schließungssätze ergeben (bei Gültigkeit des Fano-Axioms) eine Geometrie über einem kommutativen Körper oder über einer Quaternionenalgebra. In dieser Geometrie gilt der Lotesatz. Hiermit ist eine eindeutige Antragung beliebiger Winkel an beliebige Geraden gegeben. Die Transitivität dieser Winkelantragung hat den Höhenschnittpunktsatz zur Folge. Um zur Bewegungsgruppe zu gelangen, gehen wir von der Forderung aus, daß es an jeder Geraden eine Spiegelung gibt. Die entsprechenden Schließungssätze zeigen, daß die hier betrachtete Geometrie dieser Forderung genügt. Im Rahmen der übrigen vorliegenden Axiome erweist sich der für die Winkelbestimmung maßgebende Schließungssatz als äquivalent mit einer einfachen Transitivitätseigenschaft von Spiegelungsprodukten.

§ 1. Grundlagen der Winkelbestimmung.

In der affinen DESARGUESschen Ebene möge eine symmetrische Orthogonalitätsrelation $g \perp h$ vorliegen, so daß es durch jeden Punkt genau eine Senkrechte zu jeder Geraden gibt, keine Gerade auf sich selbst senkrecht steht und aus $g \perp h$ und $h \parallel k$ stets $g \perp k$ folgt. Zur Einführung eines Winkelmaßes für zwei Geraden a, b mit Schnittpunkt S wählen wir auf a einen Punkt $A \neq S$. A_b sei Fußpunkt des Lotes von A auf b, A_{ba} Fußpunkt des Lotes von A_b auf a. Die kollinearen Punkte S, A_{ba}, A bestimmen ein Streckenverhältnis[2]) $SA_{ba} : SA$. Dieses ist genau dann Null, wenn a senkrecht auf b steht.

Damit das Streckenverhältnis $SA_{ba} : SA$ als *Winkelmaß* für das ungeordnete Geradenpaar a, b dienen kann, muß es unabhängig von der Wahl des Punktes A auf a und invariant gegenüber der Vertauschung von a mit b sein. Beide Forderungen sind genau dann erfüllt, wenn

$$SA_{ba} : SA = SB_{ab} : SB$$

[1]) Literaturverzeichnis [6].

[2]) Kollineare Punktetripel S, P_1, P_2 und S, Q_1, Q_2 auf zwei verschiedenen Geraden sollen dasselbe Streckenverhältnis ausdrücken, wenn $P_1Q_1 \parallel P_2Q_2$ ist. Mit dem Satz von DESARGUES erweist sich diese Gleichheit von Streckenverhältnissen als eine Äquivalenzrelation. Vgl. K. REIDEMEISTER, Grundlagen der Geometrie. Berlin 1930.

für beliebige A auf a und B auf b gilt, wobei B_{ab} durch B entsprechend wie A_{ba} durch A bestimmt sein soll. Der hierdurch ausgedrückte Schließungssatz (Fig. 1), ein Spezialfall (bezüglich rechter Winkel) des Satzes von PAPPUS-PASCAL, lautet:

(W) $\begin{cases} \textit{Sind } A, A_{ba}, B_a \textit{ Punkte auf } a \textit{ und } A_b, B, B_{ab} \textit{ Punkte auf } b \textit{ mit} \\ A_b A_{ba} \parallel B B_a \perp a \textit{ und } A A_b \parallel B_a B_{ab} \perp b, \textit{ so ist } AB \parallel A_{ba} B_{ab}. \end{cases}$

Bezeichnen wir die Vektoren SA, SA_b, SA_{ba}, SB der Reihe nach mit $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}\alpha$, $\mathfrak{u}\beta$, so erhalten wir $SB_a = \mathfrak{v}\beta\alpha$, $SB_{ab} = \mathfrak{u}\alpha\beta$ und $\alpha\beta = \beta\alpha$. Der Schließungssatz (W) besagt somit:

(1) Aus $\mathfrak{u} - \mathfrak{v} \perp \mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v} \perp \mathfrak{u} - \mathfrak{v}\alpha$ folgt $\alpha\beta = \beta\alpha$ für alle β.

Wir nehmen den für die metrische Grundform benötigten Schließungssatz hinzu:

(M) $\begin{cases} \textit{Sind } P, P_1, P_2, P_3 \textit{ bzw. } P', P'_1, P'_2, P'_3 \textit{ je vier verschiedene Punkte, so} \\ \textit{folgt aus fünf der Relationen } PP_i \perp P'_{i+1}P'_{i+2}, P'P'_i \perp P_{i+1}P_{i+2} (i = 1, 2, 3 \\ \bmod 3) \textit{ die sechste.} \end{cases}$

Wie in der Note [6] gezeigt wurde, läßt sich dann die Orthogonalität $\mathfrak{x} \perp \mathfrak{y}$ durch das Verschwinden eines Skalarproduktes $\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}$ ausdrücken[3]), und (1) geht über in:

(2) Bei $\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{u} = \mathfrak{v}\cdot\mathfrak{u}$ liegt $\alpha = (\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{v})^{-1}(\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{u})$ im Zentrum.

Das Skalarprodukt kann als so normiert angenommen werden, daß es einen Vektor $\mathfrak{e}$ mit $\mathfrak{e}\cdot\mathfrak{e} = 1$ gibt. Dann gilt:

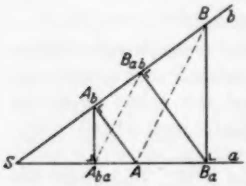

Fig. 1.

Satz 1. Der Schließungssatz (W) *ist genau dann erfüllt, wenn jedes Vektorquadrat*[4]) $\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{x}$ *im Zentrum des Koordinaten-Schiefkörpers liegt.*

Beweis: Es sei $\mathfrak{y}\cdot\mathfrak{x} = (\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y})^{\mathfrak{J}}$, wo $\mathfrak{J}$ ein involutorischer Antiautomorphismus ist[5]), und $\mathfrak{s} \perp \mathfrak{e}$. Für $\mathfrak{u} = \mathfrak{e}$, $\mathfrak{v} = \mathfrak{e} + \mathfrak{s}\xi$ gilt $\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{u} = \mathfrak{v}\cdot\mathfrak{u} = 1$, so daß $\alpha = (\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{v})^{-1}(\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{u}) = (1 + \xi^{\mathfrak{J}}(\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{s})\xi)^{-1}$ gemäß (2) ein Zentrumselement ist. Da dies für alle ξ gilt, liegen auch $\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{s}$ und $\xi^{\mathfrak{J}}\xi$ im Zentrum. Folglich hat jeder Vektor $\mathfrak{x} = \mathfrak{e}\xi + \mathfrak{s}\eta$ ein Quadrat $\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{x} = \xi^{\mathfrak{J}}\xi + \eta^{\mathfrak{J}}(\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{s})\eta$ im Zentrum. Andererseits ist (2) erfüllt, wenn jedes Vektorquadrat im Zentrum liegt.

Wir schließen nun die Charakteristik 2 aus, was bekanntlich durch das *Fano-Axiom* geschieht: *„Die Diagonalen eines Rechtecks besitzen einen Schnittpunkt."*

Satz 2. Mit dem Fano-Axiom und dem Schließungssatz (M) *ist der Schließungssatz* (W) *genau dann erfüllt, wenn der Koordinatenbereich entweder*

[3]) Hierbei ist $\mathfrak{x}\cdot(\mathfrak{y}+\mathfrak{z}) = \mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y} + \mathfrak{x}\cdot\mathfrak{z}$, $(\mathfrak{x}+\mathfrak{y})\cdot\mathfrak{z} = \mathfrak{x}\cdot\mathfrak{z} + \mathfrak{y}\cdot\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}\alpha = (\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y})\alpha$.

[4]) Statt von Vektorquadraten kann man auch von Formwerten sprechen, da $\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}$ als metrische Grundform dient.

[5]) Vgl. [6]. Mit [3]) erhält man $\mathfrak{x}\xi\cdot\mathfrak{y}\eta = \xi^{\mathfrak{J}}(\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y})\eta$.

ein kommutativer Körper oder eine Quaternionen-Divisionsalgebra ist, wobei im letzten Falle $\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{x}$ das zu $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y}$ konjugierte Quaternion ist.

Beweis: Liegen alle Vektorquadrate im Zentrum, so auch alle $\xi^{\mathfrak{J}} \xi$, also auch $(\xi + 1)^{\mathfrak{J}}(\xi + 1) - \xi^{\mathfrak{J}} \xi - 1 = \xi + \xi^{\mathfrak{J}}$. Bei $\sigma^{\mathfrak{J}} = \sigma$ liegt somit 2σ und, da die Charakteristik $\neq 2$ ist, auch σ im Zentrum. Mit Satz 1 folgt: (W) gilt genau dann, wenn alle $\mathfrak{J}$-symmetrischen Elemente, d. h. alle Elemente σ mit $\sigma^{\mathfrak{J}} = \sigma$, dem Zentrum angehören. Hieraus ergibt sich die Behauptung mit den Ergebnissen von J. DIEUDONNÉ[6]). Der Vollständigkeit halber geben wir hier einen kurzen Beweis an: Hat der Koordinaten-Schiefkörper K ein Zentrum $Z \neq K$, so gibt es $\lambda \notin Z$. Dann ist $\alpha = \lambda - \lambda^{\mathfrak{J}} \neq 0$ mit $\alpha^{\mathfrak{J}} = -\alpha$. Da $\lambda \notin Z$, $\lambda + \lambda^{\mathfrak{J}} \in Z$ und $2\lambda = \alpha + (\lambda + \lambda^{\mathfrak{J}})$, so $\alpha \notin Z$. Es gibt also $\mu \neq 0$ mit $\alpha \mu \neq \mu \alpha$. Man hat $\delta = \mu - \mu^{\mathfrak{J}} \neq 0$ mit $\delta^{\mathfrak{J}} = -\delta$. Da $\mu + \mu^{\mathfrak{J}}$, aber nicht μ mit α vertauschbar ist, ist auch $\delta = 2\mu - (\mu + \mu^{\mathfrak{J}})$ nicht mit α vertauschbar, also $\beta = \frac{1}{2}(\delta - \alpha^{-1} \delta \alpha) \neq 0$. Man erhält $\beta^{\mathfrak{J}} = -\beta$ und (mit $\alpha^2 = -\alpha^{\mathfrak{J}} \alpha \in Z$) $\beta \alpha = -\alpha \beta$. Über dem Körper der $\mathfrak{J}$-symmetrischen Elemente erzeugen α, β eine Quaternionenalgebra. Zu dieser gehört jedes Element $\xi \in K$. Setzen wir nämlich $\xi_1 = \frac{1}{2}(\xi + \xi^{\mathfrak{J}})$, $\xi_2 = \frac{1}{2}(\alpha^{-1} \xi - \xi^{\mathfrak{J}} \alpha^{-1})$,

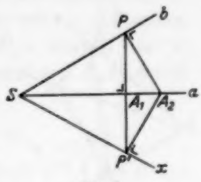

Fig. 2.

$$\xi_3 = \tfrac{1}{4}(\xi \beta^{-1} - \alpha \xi \alpha^{-1} \beta^{-1} - \beta^{-1} \xi^{\mathfrak{J}} + \beta^{-1} \alpha^{-1} \xi^{\mathfrak{J}} \alpha), \; \xi_4 = \tfrac{1}{4}(\xi \beta^{-1} \alpha^{-1} + \\ + \alpha^{-1} \xi \beta^{-1} + \beta^{-1} \xi^{\mathfrak{J}} \alpha^{-1} + \alpha^{-1} \beta^{-1} \xi^{\mathfrak{J}}),$$

so gilt $\xi = \xi_1 + \xi_2 \alpha + \xi_3 \beta + \xi_4 \alpha \beta$ mit $\mathfrak{J}$-symmetrischen Elementen $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$. Dabei ist $\xi^{\mathfrak{J}} = \xi_1 - \xi_2 \alpha - \xi_3 \beta - \xi_4 \alpha \beta$ konjugiert zu ξ.

Bei der durch die Streckenverhältnisse erklärten Winkelgleichheit gibt es im allgemeinen mehr als 2 gleiche Winkel mit einem festen Schenkel und Scheitelpunkt. Aufschluß über die Anzahl von solchen gleichen Winkeln gibt

Satz 3. Es gibt eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Geraden x durch S, die mit einer festen Geraden a durch S einen gleichen nicht-rechten Winkel bilden, und den Elementen der multiplikativen Gruppe aller ε mit $\varepsilon^{\mathfrak{J}} \varepsilon = 1$.

Beweis: Sind (a, b) und (a, x) gleiche nicht-rechte Winkel mit dem Scheitel S, so gibt es definitionsgemäß A_1, A_2 auf a und P bzw. P' auf b bzw. x (Fig. 2) mit $P A_1 P' \perp a$, $SP \perp P A_2$, $SP' \perp P' A_2$. Für die Vektoren $\mathfrak{x}_1 = S A_1$, $\mathfrak{x}_2 = A_1 A_2$, $\mathfrak{y} = A_1 P$, $\mathfrak{y} \varepsilon = A_1 P'$ gilt $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2 \perp \mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{y} \perp \mathfrak{x}_2 - \mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{y} \varepsilon \perp$ $\perp \mathfrak{x}_2 - \mathfrak{y} \varepsilon$, also $\mathfrak{x}_1 \cdot \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{y} \cdot \mathfrak{y} = \varepsilon^{\mathfrak{J}} (\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{y}) \varepsilon$. Die letzte Gleichung gilt, da $\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{y}$ im Zentrum liegt, genau dann, wenn $\varepsilon^{\mathfrak{J}} \varepsilon = 1$ ist.

Man hat stets mindestens 2 gemäß Satz 3 gleiche Winkel, nämlich für $\varepsilon = 1$ und für $\varepsilon = -1$. Nur wenn $\mathfrak{J}$ die Identität ist, sind dies die einzigen. Andernfalls gibt es nämlich α mit $\alpha^{\mathfrak{J}} \neq \alpha$ und $\alpha^{\mathfrak{J}} \neq -\alpha$. Dann ist $\varepsilon = \alpha^{\mathfrak{J}} \alpha^{-1}$ ein Element mit $\varepsilon^{\mathfrak{J}} \varepsilon = (\alpha^{\mathfrak{J}})^{-1} \alpha \alpha^{\mathfrak{J}} \alpha^{-1} = 1$ und $\varepsilon \neq \pm 1$. *Die Forderung, daß sich ein Winkel auf höchstens zwei Arten antragen läßt, hat also den Höhenschnittpunktsatz*[7]) *zur Folge.*

---

[6]) Literaturverzeichnis [2].

[7]) Gemäß [6] gilt dieser Satz genau dann, wenn $\mathfrak{J}$ die Identität ist.

§ 2. Der Lotesatz.

Unter den verschiedenen Möglichkeiten für die Antragung eines gegebenen Winkels an eine gegebene Gerade, die nach Satz 3 bestehen, können wir eine bestimmte auszeichnen, indem wir je drei Geraden a, b, x durch S mit $a \neq b$ eine Gerade x' folgendermaßen zuordnen: P sei ein beliebiger Punkt $\neq S$ auf x, P_a bzw. P_b Fußpunkt des Lotes von P auf a bzw. b (Fig. 3). Dann soll x' die Senkrechte zu $P_a P_b$ durch S sein. Nach dem Satz von DESARGUES [der aus (M) folgt] ist x' unabhängig vom Hilfspunkt P, also allein durch a, b, x bestimmt. Wir sagen: „Die Antragung von (x, a) an b führt zu x'" und schreiben hierfür „$xa \to bx'$". Definitionsgemäß ist $xa \to bx'$ äquivalent $xb \to ax'$.

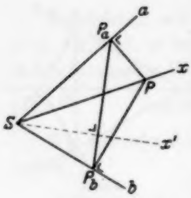

Fig. 3.

Der *Lotesatz* besagt, daß bei $xa \to bx'$ die Winkel (x, a) und (b, x') gleich sind. Wir beweisen den Lotesatz mit Hilfe der Schließungssätze (M) und (W). Mit (M) ergibt sich:

(3) Aus $xa \to bx'$ folgt $x'a \to bx$.

Beweis: Q sei ein Punkt $\neq S$ auf x', Q_a bzw. Q_b Fußpunkt des Lotes von Q auf a bzw. b. Dann ist $SQ_a \perp PP_a$, $SQ_b \perp PP_b$, $SQ \perp P_a P_b$, $SP_a \perp QQ_a$, $SP_b \perp QQ_b$, also nach (M) auch $SP \perp Q_a Q_b$, d. h. $x'a \to bx$.

Bei festen a, b (mit $a \neq b$) ist durch $xa \to bx'$ eine eindeutige Abbildung $x \to x'$ der Geraden durch S auf sich gegeben. Gemäß (3) ist diese Abbildung involutorisch. Mit dem Schließungssatz (W) ergibt sich:

(4) Aus $xa \to bx'$, $ya \to by'$ und $x' \perp y$ folgt $x \perp y'$.

Beweis: Ist x (bzw. y) $\perp b$, so konstruktionsgemäß x' (bzw. y') $\perp a$. Aus $x' \perp y$ folgt dann $y = a$ (bzw. $x' = b$) und konstruktionsgemäß $y' = b$ (bzw. $x = a$), also $x \perp y'$. Andernfalls hat PP_b mit y einen Schnittpunkt $Q \neq S$. Q_a sei Fußpunkt des Lotes von Q auf a. Wie Fig. 4 zeigt, ist (4) äquivalent dem Schließungssatz:

(W') $\left\{\begin{array}{l}\textit{Sind } P_a, S, Q_a \textit{ bzw. } P, P_b, Q \textit{ verschiedene Punkte auf Geraden } a \textit{ bzw.} \\ c \textit{ mit } PP_a \parallel QQ_a \perp a,\ P_aP_b \parallel SQ \textit{ und } P_bS \perp c, \textit{ so ist } PS \parallel P_bQ_a.\end{array}\right.$

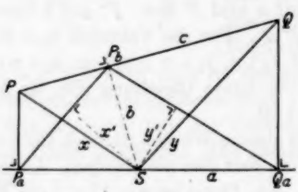

Fig. 4.

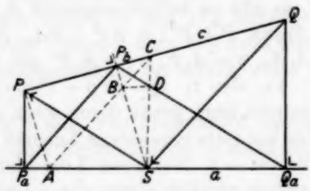

Fig. 5.

Die beiden Spezialfälle (W) und (W') des Satzes von PAPPUS-PASCAL sind im Rahmen der DESARGUESschen Geometrie äquivalent. Um (W') aus (W) zu erhalten, gebrauchen wir die Hilfspunkte (Fig. 5): A Schnittpunkt von a mit der Senkrechten zu c durch P, C Schnittpunkt von c mit der Senkrechten

zu a durch S, B Schnittpunkt von AC mit SP_b, D Schnittpunkt von SC mit P_bQ_a. Die Anwendung von (W) auf die Punkte P_a, A, S und P, P_b, C liefert $AC \parallel P_aP_b$, also $BC \parallel SQ$. Nach dem Satz von DESARGUES (für die Dreiecke BCD, SQQ_a) ist $BD \parallel a$ und (für die Dreiecke P_bBD, PAS) $PS \parallel P_bQ_a$. (Entsprechend ist umgekehrt (W) aus (W′) zu gewinnen.) Somit folgt (4) aus (W).

Gemäß (3) und (4) bleibt bei der Abbildung $x \to x'$ die Orthogonalität erhalten. Wir drücken diese Abbildung algebraisch aus, indem wir $\mathfrak{x} = SP$ setzen und beliebige Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ auf a, b wählen. Dann ist $SP_a = \mathfrak{a}(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a})^{-1}(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{x})$ und $SP_b = \mathfrak{b}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b})^{-1}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{x})$. Die Vektoren $\mathfrak{x}'$ auf x' sind wegen $x' \perp P_aP_b$ durch die Gleichung

$$(5) \qquad (\mathfrak{x}'\cdot\mathfrak{a})(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a})^{-1}(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}'\cdot\mathfrak{b})(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b})^{-1}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{x})$$

bestimmt. Diese erhält in Matrizenschreibweise die Gestalt $\mathfrak{x}'^{\mathfrak{J}}A\,\mathfrak{x} = 0$ mit $A^{\mathfrak{J}} = A$. Hiermit erhalten wir eine semilineare Transformation $\mathfrak{x}^* = \mathfrak{x}^{\mathfrak{J}}A$ für die Abbildung $P \to x'$, wobei $\mathfrak{x}^*$ der Geradenkoordinatenvektor von x' ist. Durch die metrische Grundform $\mathfrak{x}'\cdot\mathfrak{y}'$ wird im dualen Vektorraum eine Grundform $\mathfrak{x}^*\cdot\mathfrak{y}^*$ induziert. Da bei unserer semilinearen Transformation die Orthogonalität erhalten bleibt, gilt

$$(6) \qquad \mathfrak{x}^*\cdot\mathfrak{y}^* = \varkappa(\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y})$$

mit einer $\mathfrak{J}$-symmetrischen Konstanten $\varkappa$.

Um auch das Winkelmaß $W(a, b)$, das durch $SA_{ba} : SA$ gemäß Fig. 1 gegeben ist, algebraisch auszudrücken, setzen wir $\mathfrak{a} = SA$. Ist $\mathfrak{b}$ ein Vektor auf b, so $SA_b = \mathfrak{b}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b})^{-1}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a})$ und $SA_{ba} = \mathfrak{a}(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a})^{-1}(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b})^{-1}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a})$. Für die Geraden a, b erhalten wir somit das Winkelmaß

$$(7) \qquad W(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a})^{-1}(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b})^{-1}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a}).$$

Beim Übergang zum dualen Vektorraum entsteht aus $W(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}')$ ein entsprechend gebildeter und gleicher Ausdruck $W(\mathfrak{x}^*, \mathfrak{y}^*)$. Aus (6) folgt, da $\varkappa$ im Zentrum liegt, $W(\mathfrak{x}^*, \mathfrak{y}^*) = W(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ und somit $W(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}') = W(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$. Hiermit haben wir

Satz 4. Bei $xa \to bx'$ und $ya \to by'$ ist $W(x, y) = W(x', y')$. Insbesondere gilt, da konstruktionsgemäß $aa \to bb$ ist, der

Lotesatz. Ist x' gemäß Fig. 3 mittels a, b, x konstruiert (also $xa \to bx'$), so $W(a, x) = W(b, x')$.

Auf Grund des Lotesatzes kann an jede Gerade $b \nparallel a$ ein Winkel (a, x) in einer eindeutigen Weise angetragen werden. Umgekehrt kann auch diese Antragung zur Definition der Winkelgleichheit dienen. Wir definieren:

D 1. Ist $a_1b_1 \to a_2b_2$ gemäß Konstruktion des Lotesatzes, so sei $\sphericalangle(a_1, b_1) = \sphericalangle(a_2, b_2)$ und $\sphericalangle(a_2, b_2) = \sphericalangle(a_1, b_1)$.

D 2. Ist $\sphericalangle(a_1, b_1) = \sphericalangle(a_2, b_2)$ und $\sphericalangle(a_2, b_2) = \sphericalangle(a_3, b_3)$ gemäß D 1, so sei $\sphericalangle(a_1, b_1) = \sphericalangle(a_3, b_3)$.

D 3. $\sphericalangle(a, b) = \sphericalangle(a, b)$.

Offenbar ist $\sphericalangle(a_1, b_1) = \sphericalangle(a_2, b_2)$ *nur* bei gleichem Winkelmaß $W(a_1, b_1) = W(a_2, b_2)$. Es gilt aber auch umgekehrt:

Satz 5. Aus $W(a_1, b_1) = W(a_2, b_2)$ folgt $\sphericalangle(a_1, b_1) = \sphericalangle(a_2, b_2)$ oder $\sphericalangle(a_1, b_1) = \sphericalangle(b_2, a_2)$.

Beweis: Ist $b_1 \neq a_2$, so gibt es x mit $a_1 b_1 \to a_2 x$. Im Falle $x = b_2$ ist $\sphericalangle(a_1, b_1) = \sphericalangle(a_2, b_2)$ gemäß D 1. Andernfalls erhält man mit einem Punkt P auf a_2 wegen $W(a_2, b_2) = W(a_2, x)$ eine Gerade $P_x P_{b_2} \perp a_2$ (wo P_x bzw. P_{b_2} Fußpunkt des Lotes von P auf x bzw. b_2 ist). Dann ist $a_2 x \to b_2 a_2$ und somit $\sphericalangle(a_1, b_1) = \sphericalangle(b_2, a_2)$ gemäß D 2. Entsprechendes gilt für $a_1 \neq b_2$. Ist schließlich $a_1 = b_2$ und $a_2 = b_1$, so $\sphericalangle(a_1, b_1) = \sphericalangle(b_2, a_2)$ gemäß D 3.

Mit D 1—D 3 kann sich $\sphericalangle(a, b) = \sphericalangle(b, a)$ nur dann ergeben, wenn es x, y mit $ab \to xy$ und $xy \to ba$ gibt. Dies ist stets der Fall, wenn $a \perp b$ ist. (Man kann dann beliebige von a, b verschiedene Geraden $x \perp y$ nehmen.)

Satz 6. Ist a nicht senkrecht b, so $\sphericalangle(a, b) = \sphericalangle(b, a)$ genau dann, wenn $\mathfrak{J}$ nicht die Identität ist.

Beweis: $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ seien Vektoren auf a bzw. b. Um $ab \to xy$ und $xy \to ba$ zu erhalten, brauchen wir gemäß (5) zwei Vektoren $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$, die nicht auf b liegen, mit

$$(\mathfrak{y}\cdot\mathfrak{b})(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b})^{-1}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a}) = (\mathfrak{y}\cdot\mathfrak{x})(\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{x})^{-1}(\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{a}),\ (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{y})(\mathfrak{y}\cdot\mathfrak{y})^{-1}(\mathfrak{y}\cdot\mathfrak{x}) = (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b})^{-1}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{x}).$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{s}$, $\mathfrak{x} = \mathfrak{b}\,\xi + \mathfrak{s}$, $\mathfrak{y} = \mathfrak{b}\,\eta + \mathfrak{s}$ mit $\mathfrak{b} \perp \mathfrak{s}$ ansetzen. Berücksichtigt man, daß die $\mathfrak{J}$-symmetrischen Elemente im Zentrum liegen, so erhält man nach einfacher Rechnung die Bedingungsgleichungen

$$(1 - \xi^{\mathfrak{J}})\,\eta = \xi + (\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b})^{-1}(\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{s}),\quad \eta + \eta^{\mathfrak{J}}\,\xi = \xi - (\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b})^{-1}(\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{s}).$$

Da keine Gerade isotrop sein soll, ist $(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b})^{-1}(\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{s}) \neq -1$, so daß $\xi \neq 1$ sein muß. Es folgt

$$\eta = (1 - \xi^{\mathfrak{J}})^{-1}\,[\xi + (\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b})^{-1}(\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{s})] \text{ mit } [\xi^{\mathfrak{J}}\,\xi + (\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b})^{-1}(\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{s})]\,[\xi + \xi^{\mathfrak{J}} - 2] = 0.$$

Die Ausschließung isotroper Geraden erfordert auch $\xi^{\mathfrak{J}}\xi + (\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b})^{-1}(\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{s}) \neq 0$. Unsere Gleichungen sind somit genau dann erfüllbar, wenn es $\xi \neq 1$ mit $\xi + \xi^{\mathfrak{J}} = 2$ gibt. Dies ist nur dann der Fall, wenn $\mathfrak{J}$ nicht die Identität ist. (Man kann dann $\xi = 1 + \alpha - \alpha^{\mathfrak{J}}$ mit beliebigem $\alpha \neq \alpha^{\mathfrak{J}}$ nehmen.)

Satz 6 zeigt, daß durch D 1—D 3 nur dann *orientierte Winkel* (mit Ausnahme der rechten Winkel) definiert werden, wenn in der ganzen Ebene der Höhenschnittpunktsatz gilt. Dieselbe Bedingung ergibt sich für die Transitivität der Winkelantragung:

„Aus $a_1 b_1 \to a_2 b_2$ und $a_2 b_2 \to a_3 b_3$ folgt $a_1 b_1 \to a_3 b_3$".

Satz 7. Die Transitivität der durch den Lotesatz erklärten Winkelantragung hat den Höhenschnittpunktsatz zur Folge.

Beweis: Für rechtwinklige Dreiecke ist der Höhenschnittpunktsatz trivial. Wir können daher von einem nicht rechtwinkligen Dreieck $A_1 A_2 A_3$ ausgehen (Fig. 6). H_1 sei Fußpunkt des Lotes von A_1 auf $A_2 A_3$, H_2 Fußpunkt des Lotes von A_2 auf $A_1 A_3$, S Schnittpunkt der Höhen $A_1 H_1$ und $A_2 H_2$, B Schnittpunkt der Höhe $A_2 H_2$ mit der Senkrechten zu $A_3 S$ durch A_3, C vierter Eckpunkt des Rechtecks über $S A_3 B$, D Schnittpunkt von $A_3 C$ und $A_1 A_2$, E Schnittpunkt von $A_3 B$ und $H_1 H_2$, F Schnittpunkt von $A_3 C$ und $A_1 H_1$, G Schnitt-

punkt von A_1A_3 und BD, s Lot von A_3 auf H_1H_2. Die Punkte D, E, F, G können auch uneigentlich sein. Alle anderen Punkte sind eigentlich zufolge der Voraussetzung, daß $A_1A_2A_3$ nicht rechtwinklig ist. Nach dem Satz von DESARGUES (für die Dreiecke $H_1H_2A_1$ und A_3BD) sind E, F, G kollinear. Gemäß Konstruktion gilt $A_3C, A_3B \to A_3S, A_3H_2$ und $A_3S, A_3H_2 \to A_3H_1, s$. Die Transitivität der Winkelantragung ergibt $A_3C, A_3B \to A_3H_1, s$. Daraus folgt: Ist $A_3B \parallel H_1H_2$, so $A_3C \parallel H_1A_1$, andernfalls $EF \perp A_3B$. Auf jeden Fall liegt der uneigentliche Schnittpunkt von A_3S und BC auf der (uneigentlichen bzw. eigentlichen) Geraden EFG. Der Satz von DESARGUES (für die Dreiecke A_3SA_1 und BCD) ergibt nun $A_1D \parallel A_3B$ und somit $A_3S \perp A_1A_2$. Die drei Höhen schneiden sich also in S.

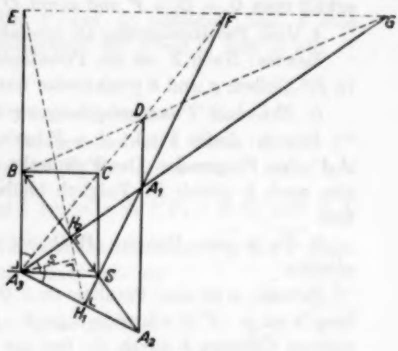

Fig. 6.

Von der hier betrachteten Winkelgleichheit (auf Grund der Streckenverhältnisse bzw. gemäß dem Lotesatz) ist die aus der Bewegungsgruppe entspringende Winkelkongruenz zu unterscheiden. Zwei Winkel mögen kongruent heißen, wenn es eine lineare orthogonale Transformation gibt, die den einen Winkel auf den anderen abbildet. Kongruente Winkel besitzen natürlich gleiches Winkelmaß $W(a, b)$, da die orthogonalen Transformationen die metrische Grundform bis auf einen $\mathfrak{S}$-symmetrischen Faktor invariant lassen. Es gilt aber nicht allgemein die Umkehrung, denn die lineare Gruppe braucht nicht jede Gerade auf jede andere abzubilden und somit nicht beliebige Winkelantragungen zuzulassen.

§ 3. Die Konsequenzen des Spiegelungsaxioms.

Um die betrachtete Geometrie durch ihre Bewegungsgruppe zu charakterisieren, ergänzen wir die affinen Inzidenzaxiome und trivialen Orthogonalitätsaxiome (unter Ausschluß isotroper Geraden) zunächst nur durch das

Spiegelungsaxiom: Zu jeder Geraden gibt es mindestens eine involutorische Kollineation, welche die Orthogonalität erhält und die betreffende Gerade punktweise festhält.

Eine solche Kollineation, bei der die Gerade g punktweise festbleibt, bezeichnen wir als eine „*Spiegelung an g*". Ein Produkt von zwei Spiegelungen an senkrechten Geraden durch einen Punkt P soll eine „*Punktspiegelung an P*" heißen. Ein Produkt von zwei Spiegelungen an parallelen Geraden heiße eine „*Translation*". Es gelten folgende Sätze:

1. *Jede orthogonale Kollineation, die alle Punkte einer Geraden g und einen weiteren Punkt P festhält, ist die Identität.*

Beweis: Jede Gerade, die P mit einem Punkt von g verbindet, besitzt 2 Fixpunkte, bleibt also fest. Ferner bleibt jede Senkrechte zu g fest. Hiermit ergibt sich jeder Punkt als Fixpunkt.

2. *Bei einer Spiegelung an g bleiben außer g nur die Senkrechten zu g fest.* (Andernfalls erhielte man einen nicht auf g liegenden Fixpunkt, entgegen 1.)

3. *P ist einziger Fixpunkt einer Punktspiegelung an P.*

Beweis: α, β seien Spiegelungen an Senkrechten a, b durch P. Bei der Punktspiegelung $\alpha\beta$ bleiben a und b fest. Q sei ein Fixpunkt von $\alpha\beta$. Dann sind auch die Fußpunkte Q_a, Q_b der Lote von Q auf a, b Fixpunkte von $\alpha\beta$. Folglich ist Q_a bzw. Q_b Fixpunkt der Geradenspiegelung β bzw. α. Mit 1. erhält man $Q_a = Q_b = P$ und somit $Q = P$.

4. *Jede Punktspiegelung ist involutorisch.*

Beweis: Nach 3. ist die Punktspiegelung $\alpha\beta$ ungleich der Identität. Bei $(\alpha\beta)^2$ bleiben a und b punktweise fest. Daher ist nach 1. $(\alpha\beta)^2$ die Identität.

5. *Bei einer Punktspiegelung an P bleiben nur die Geraden durch P fest.*

Beweis: Jeder Punkt $A \neq P$ besitzt nach 3. ein Bild $A' \neq A$. Gemäß 4. ist AA' eine Fixgerade. Der Fußpunkt des Lotes von P auf AA' ist Fixpunkt, also nach 3. gleich P. Folglich bleiben alle Geraden durch P und nur diese fest.

6. *Zu je zwei Punkten P, Q gibt es eine Geradenspiegelung, die P auf Q abbildet.*

Beweis: a sei eine Parallele zu PQ und P' das Bild von P bei einer Spiegelung α an a. $P'Q$ schneide a in S. β sei eine Spiegelung an der zu a senkrechten Geraden b durch S. Bei der Punktspiegelung $\alpha\beta$ (an S) bleibt $P'Q$ fest. Folglich wird P durch $\alpha \cdot \alpha\beta$ auf einen Punkt von $P'Q$ abgebildet. Andererseits liegt das Bild von P bezüglich $\beta = \alpha \cdot \alpha\beta$ auf der zu b senkrechten Geraden PQ. Da $P'Q$ und PQ nur den Punkt Q gemeinsam haben, ist Q das Bild von P bezüglich β.

7. *Eine Translation besitzt keinen Fixpunkt.*

Beweis: Angenommen, P sei ein Fixpunkt des Produktes $\alpha\beta$ von Spiegelungen an Parallelen a, b. Eine nicht durch P gehende Senkrechte c zu a, b möge diese Geraden in A, B schneiden. γ sei eine Spiegelung an c. Bei der Punktspiegelung $\alpha\gamma$ (an A) geht P nach 3. in einen Punkt $P' \neq P$ über. Da P bei $\alpha\beta = \alpha\gamma \cdot \gamma\beta$ festbleibt, geht P' bei der Punktspiegelung $\gamma\beta$ (an B) in P über. Zufolge 4. und 5. geht PP' durch A und durch B. Dies widerspricht der Festsetzung, daß P nicht auf c liegen soll.

8. *Bei einer Translation geht jede Gerade in sich oder in eine Parallele über.*

Beweis: Bei der Translation $\alpha\beta$ geht jede zu den Spiegelgeraden a, b senkrechte Gerade in sich über. Angenommen, eine andere Gerade g habe mit ihrem Bild g' einen Schnittpunkt P. c sei die Senkrechte zu a, b durch P. Da $c \neq g$ ist und c, g auf c, g' abgebildet werden, wäre P ein Fixpunkt der Translation, im Widerspruch zu 7.

9. *Eine Translation ist durch das Bild P' eines beliebigen Punktes P eindeutig bestimmt.* (Folgt aus 8.)

10. *Zu je zwei Punkten P, Q gibt es eine Translation, die P auf Q abbildet.*

Beweis: Nach 6 gibt es eine Spiegelung α an einer Geraden a, die P auf Q abbildet. β sei eine Spiegelung an der Parallelen zu a durch Q. Die Translation $\alpha\beta$ bildet P auf Q ab.

11. *Die Translationen bilden zusammen mit der Identität eine Gruppe.* (Folgt aus 8.—10.)

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$ bedeute, daß Q' das Bild von Q ist bei der Translation, die P auf P' abbildet.

12. *Ist P' Bild von P bei einer Spiegelung an g und Q Fußpunkt des Lotes von P auf g, so $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'}$.*

Beweis: α sei eine Spiegelung, die P auf Q abbildet, und β eine Spiegelung an g. Dann ist $\alpha\beta$ eine Translation, die P auf Q und Q auf P' abbildet.

13. *Ist P' Bild von P bei einer Punktspiegelung an Q, so $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'}$.*

Beweis: α, β seien Spiegelungen an Senkrechten a, b durch Q und P^* Bild von P bezüglich α. Für den Fußpunkt P_a des Lotes von P auf a und den Fußpunkt P_b^* des Lotes von P^* auf b ergibt sich $\overrightarrow{PP_a} = \overrightarrow{QP_b^*}$ und $\overrightarrow{P_aQ} = \overrightarrow{P_b^*P'}$, woraus mit der Gruppeneigenschaft der Translationen $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'}$ folgt.

14. *An jeder Geraden und an jedem Punkt gibt es genau eine Spiegelung.*

Beweis: Bei einer Spiegelung an g bzw. Q ist das Bild P' eines Punktes P gemäß 12. bzw. 13. durch P und g bzw. Q eindeutig bestimmt.

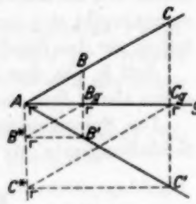

Fig. 7.

Wir können nun die dem Spiegelungsaxiom äquivalenten Schließungssätze aufsuchen. Mit der Existenz von Translationen ist bekanntlich der *affine kleine Desarguessche Satz* gegeben. Nach 12. sind die Geradenspiegelungen eindeutig durch die Translationen bestimmt. Das Spiegelungsaxiom erfordert, daß die gemäß 12. gebildeten Abbildungen *involutorische orthogonale Kollineationen* sind. Sie sind jedenfalls *involutorisch*, sofern sie von der Identität verschieden sind. Damit dies der Fall ist, muß aus $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{P'P''}$ und $P \neq P'$, stets $P \neq P''$ folgen. Diese Forderung ist mit dem *Fano-Axiom* äquivalent.

Damit die gemäß 12. gebildeten Abbildungen *Kollineationen* sind, muß folgendes gelten:

(K) $\left\{\right.$ A, B, C seien kollinear, A auf g, B_g bzw. C_g Fußpunkte der Lote von B bzw. C auf g, $\overrightarrow{BB_g} = \overrightarrow{B_gB'}$ und $\overrightarrow{CC_g} = \overrightarrow{C_gC'}$. Dann sind auch A, B', C' kollinear.

Um diese Forderung auf den Satz von Desargues zurückzuführen, ziehen wir die Parallelen zu ABC durch B_g bzw. C_g (Fig. 7). Ihre Schnittpunkte mit der Senkrechten zu g durch A seien B^* bzw. C^*. Mit dem affinen kleinen Satz von Desargues ist (K) äquivalent dem Satz von Desargues für die Dreiecke $B'B_gB^*$ und $C'C_gC^*$.

Damit die gemäß 12. gebildeten Abbildungen die *Orthogonalität erhalten*, muß folgendes gelten:

(O) $\left\{\begin{array}{l}\text{Es sei } AC \perp CB,\ A \text{ und } B \text{ auf } g,\ C_g \text{ Fußpunkt des Lotes von } C \text{ auf } g \\ \text{und } \overrightarrow{CC_g} = \overrightarrow{C_gC'}.\ \text{Dann ist } AC' \perp C'B.\end{array}\right.$

Um diese Forderung einfacher auszudrücken, ergänzen wir AC_gC bzw. BC_gC zu Rechtecken (Fig. 8). Die vierten Eckpunkte seien A^* bzw. B^*. Mit dem affinen kleinen Satz von Desargues ist (O) äquivalent der Forderung: Steht die Diagonale AC des Rechtecks AC_gCA^* senkrecht auf der Diagonale CB des Rechtecks C_gBB^*C, so ist $A^*C_g \perp C_gB^*$. Hieraus folgt mit dem zu (K) äquivalenten speziellen Satz von Desargues der

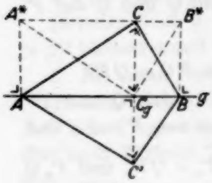

Fig. 8.

Rechtecksatz: Steht in zwei Rechtecken, deren entsprechende Seiten zueinander parallel sind, ein Paar entsprechender Diagonalen aufeinander senkrecht, so auch das andere Paar.

Dieser Satz ist offenbar ein Spezialfall des Schließungssatzes (M), aber auch ein Spezialfall eines Schließungssatzes von K. Reidemeister[8]). Durch zweimalige Anwendung des Rechtecksatzes ergibt sich der zu (K) äquivalente spezielle Satz von Desargues. Somit haben wir das Ergebnis:

Satz 8. Die dem Spiegelungsaxiom äquivalenten Schließungssätze sind: der affine kleine Satz von Desargues, *der Rechtecksatz und das Fano-Axiom.*

Das Spiegelungsaxiom ist also in der vorher betrachteten Geometrie (mit Schließungssatz (M) und Fano-Axiom) erfüllt.

§ 4. Die Axiome der Bewegungsgruppe.

Als Bewegungsgruppe sehen wir die von den Geradenspiegelungen erzeugte Gruppe an. Die affine Ebene, in der das Spiegelungsaxiom gilt, läßt sich in entsprechender Weise durch ihre Bewegungsgruppe kennzeichnen, wie dies von Arnold Schmidt[9]) für die absolute Geometrie (mit dem hier nicht vorausgesetzten Satz von den drei Spiegelungen) durchgeführt wurde. Gemäß 14. lassen sich nämlich die Geraden durch ihre Spiegelungen repräsentieren. Ist P ein Punkt auf einer Geraden g und h die Senkrechte zu g durch P, so gilt nach 14. für die entsprechenden Spiegelungen $P = hg$, also $Pg = h$. Hiermit erkennt man leicht, daß Pg bzw. gh dann und nur dann involutorisch ist, wenn P auf g liegt bzw. g senkrecht auf h steht. Diese Eigenschaften sollen nun nach dem Vorbild von Arnold Schmidt als Definitionen der Inzidenz und Orthogonalität dienen. Mit den Geradenspiegelungen als einzigen Grundelementen (Punktspiegelungen sind involutorische Produkte von zwei Geradenspiegelungen) erhält man dann als affine Inzidenzaxiome und triviale Orthogonalitätsaxiome die in den Arbeiten [5] bzw. [1] aufgestellten Axiome:

B 1. *Zu P, Q gibt es g, so daß Pg und Qg involutorisch sind.*

B 2. *Sind Pg, Qg, Ph und Qh involutorisch, so ist $P = Q$ oder $g = h$.*

---

[8]) Literaturverzeichnis [3].

[9]) Literaturverzeichnis [5].

B 3. *Zu P, g gibt es h, so daß Ph und gh involutorisch sind.*

Hierzu kommt noch ein *Existenzaxiom B 4* (nach dem es mindestens 3 nicht kollineare Punkte gibt) und das *Parallelenaxiom B 5.*

Die Anwendung der Geradenspiegelung g auf eine Geradenspiegelung h ergibt eine Geradenspiegelung ghg. Das Spiegelungsaxiom erfordert somit als weiteres Axiom der Bewegungsgruppe:

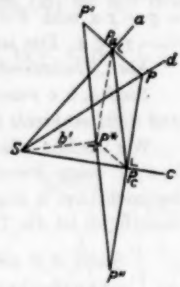
Fig. 9.

B 6. *ghg ist eine Geradenspiegelung.*

Man erkennt leicht, daß mit B 1—B 6 das Spiegelungsaxiom erfüllt ist. Mit den nun geltenden Translationseigenschaften der Spiegelungsprodukte paralleler Geraden folgt:

15. *Ist $a \parallel b$, so abc dann und nur dann involutorisch, wenn auch $a \parallel c$ ist.*

Das Produkt zweier Punktspiegelungen ist eine Translation in Richtung der Verbindungsgeraden. Folglich ist PQg dann und nur dann involutorisch, wenn $g \perp PQ$ ist. Der Schließungssatz (M) läßt sich daher mit Hilfe der Spiegelungen folgendermaßen ausdrücken:

B 7. *Sind P, P_1, P_2, P_3 bzw. P', P'_1, P'_2, P'_3 je vier verschiedene Punktspiegelungen, ferner Pg_i, $P_i g_i$, $P'g'_i$, $P'_i g'_i$ involutorisch und fünf der Produkte $P_{i+1} P_{i+2} g'_i$, $P'_{i+1} P'_{i+2} g_i$ ($i = 1, 2, 3 \bmod 3$) involutorisch, so ist auch das sechste involutorisch.*

Einfacher als der Schließungssatz (M) läßt sich der Schließungssatz (W) durch die Bewegungsgruppe ausdrücken. Wir gebrauchen hierzu die

Definition: Drei verschiedene Geraden a, b, c mögen „zusammengehörig" heißen, wenn das Spiegelungsprodukt abc eine Geradenspiegelung ist.

Die Zusammengehörigkeit erweist sich mit B 6 als invariant gegenüber beliebigen Vertauschungen der drei Geraden. Zusammengehörig mit zwei parallelen Geraden ist gemäß 15. genau jede zu ihnen parallele Gerade. Weiterhin folgt aus B 1—B 7:

16. *Drei paarweise nicht parallele Geraden a, b, c sind genau dann zusammengehörig, wenn sie einen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen und in jedem Dreieck mit Seiten parallel a, b, c der Höhenschnittpunktsatz gilt.*

Beweis: Der Schnittpunkt S von a und b möge bei Spiegelung an c in S' übergehen. Damit abc involutorisch ist, muß S' bei ab festbleiben, also $S = S'$ sein und somit S auf c liegen. b' sei Senkrechte zu b durch S. Das Produkt $abc = ab'Sc = ab'cS$ ist dann und nur dann eine Geradenspiegelung, wenn $ab'c$ eine Geradenspiegelung ist. Es sei $ab'c = d$ und $P \neq S$ auf d (Fig. 9). P_a bzw. P_c sei Fußpunkt des Lotes von P auf a bzw. c und $\overrightarrow{PP_a} = \overrightarrow{P_aP'}$, $\overrightarrow{PP_c} = \overrightarrow{P_cP''} = \overrightarrow{P_aP^*}$. Mit den hieraus folgenden Vektorgleichheiten ergibt sich, daß $ab'c$ nur dann gleich d ist, wenn b' in P^* auf $P'P''$ senkrecht steht, also wenn in dem Dreieck SP_aP_c (mit Seiten a, $P_aP_c \parallel b$ und c) der Höhenschnittpunktsatz gilt. Auf Grund des aus B 7 folgenden Satzes von Desargues gilt der Höhenschnittpunktsatz dann in jedem Dreieck mit Seiten parallel a, b, c.

Unter Bezugnahme auf die metrische Grundform erhalten wir:

17. *In einem Dreieck ABC mit dem Fußpunkt H des Lotes von C auf AB gilt der Höhenschnittpunktsatz genau dann, wenn $HA \cdot HB = HB \cdot HA$ ist.*

Beweis: Es sei $HA = \mathfrak{x}$, $HB = \mathfrak{x}\,\alpha$ und $HC = \mathfrak{y} \perp \mathfrak{x}$. Damit der Höhenschnittpunktsatz gilt, muß es $HS = \mathfrak{y}\,\beta$ geben mit $AS = \mathfrak{y}\,\beta - \mathfrak{x} \perp BC = \mathfrak{y} - \mathfrak{x}\,\alpha$ und $BS = \mathfrak{y}\,\beta - \mathfrak{x}\,\alpha \perp AC = \mathfrak{y} - \mathfrak{x}$, also mit $(\mathfrak{y}\cdot\mathfrak{y})\,\beta = -\,\mathfrak{x}\,\alpha\cdot\mathfrak{x} = -\,\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{x}\,\alpha$. Das ist genau bei $\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{x}\,\alpha = \mathfrak{x}\,\alpha\cdot\mathfrak{x}$ der Fall.

Als „*Transitivität der Zusammengehörigkeit*" bezeichnen wir die Aussage: *Sind a, b, c zusammengehörig und a, b, d zusammengehörig, wobei a ungleich und nicht senkrecht b ist, so sind auch a, c, d zusammengehörig.*

Wir suchen die Bedingungen, unter denen diese Transitivität besteht. b', c', d' seien Parallele zu b, c, d mit einem gemeinsamen Schnittpunkt A, der nicht auf a liegt. Die Schnittpunkte von a mit b', c', d' seien B, C, D. Gemäß 16. ist die Transitivität der Zusammengehörigkeit äquivalent mit

(T) Steht AB nicht senkrecht auf der Geraden BCD und gilt der Höhenschnittpunktsatz für die Dreiecke ABC und ABD, so gilt er auch für das Dreieck ACD.

Mit dem Fußpunkt H des Lotes von A auf BCD bilden wir die Vektoren $\mathfrak{x} = HB$, $\mathfrak{x}\,\gamma = HC$, $\mathfrak{x}\,\delta = HD$. Mit 17. ergibt sich (T) als äquivalent zu

(T′) Aus $\mathfrak{x} \neq 0$, $\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{x}\,\gamma = \mathfrak{x}\,\gamma\cdot\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{x}\,\delta = \mathfrak{x}\,\delta\cdot\mathfrak{x}$ folgt $\mathfrak{x}\,\gamma\cdot\mathfrak{x}\,\delta = \mathfrak{x}\,\delta\cdot\mathfrak{x}\,\gamma$.

Mit $\gamma = (\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{x})^{-1}\alpha$, $\delta = (\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{x})^{-1}\,\beta$ wird hieraus

(T″) Aus $\alpha^{\mathfrak{J}} = \alpha$, $\beta^{\mathfrak{J}} = \beta$ und $\mathfrak{x} \neq 0$ folgt $\alpha^{\mathfrak{J}}(\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{x})^{-1}\beta = \beta^{\mathfrak{J}}(\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{x})^{-1}\alpha$.

Da dies für alle $\mathfrak{x} \neq 0$ gelten soll, ergibt sich (T″) als äquivalent mit der Forderung, daß je zwei $\mathfrak{J}$-symmetrische Elemente kommutieren. Ist dies der Fall, so ist das Produkt $\mathfrak{J}$-symmetrischer Elemente $\mathfrak{J}$-symmetrisch. Die $\mathfrak{J}$-symmetrischen Elemente bilden dann einen kommutativen Körper. Hieraus folgt, daß die $\mathfrak{J}$-symmetrischen Elemente im Zentrum des Koordinaten-Schiefkörpers liegen. Ist nämlich $\alpha^{\mathfrak{J}} = \alpha$ und $\xi \neq 0$, so ist auch $\beta = \alpha(\xi - \xi^{\mathfrak{J}}) - (\xi - \xi^{\mathfrak{J}})\,\alpha$ $\mathfrak{J}$-symmetrisch. Ferner ist $(\xi - \xi^{\mathfrak{J}})\alpha\,(\xi - \xi^{\mathfrak{J}})$ und $(\xi - \xi^{\mathfrak{J}})^2$ $\mathfrak{J}$-symmetrisch, also auch $(\xi - \xi^{\mathfrak{J}})\,\beta$. Wäre $\beta \neq 0$, so müßte auch $\xi - \xi^{\mathfrak{J}}$ $\mathfrak{J}$-symmetrisch sein, woraus $\xi = 0$ folgt. Daher ist $\alpha(\xi - \xi^{\mathfrak{J}}) = (\xi - \xi^{\mathfrak{J}})\alpha$. Wegen der $\mathfrak{J}$-Symmetrie von $\xi + \xi^{\mathfrak{J}}$ haben wir auch $\alpha(\xi + \xi^{\mathfrak{J}}) = (\xi + \xi^{\mathfrak{J}})\alpha$. Daraus folgt $2\,\alpha\,\xi = 2\,\xi\,\alpha$ und, da die Charakteristik $\neq 2$ ist, $\alpha\,\xi = \xi\,\alpha$. Das heißt, die $\mathfrak{J}$-symmetrischen Elemente liegen im Zentrum. Mit Satz 2 haben wir nun das Ergebnis:

Satz 9. Der Schließungssatz (W) *ist im Rahmen der Axiome* B 1—B 7 *äquivalent mit der Transitivität der Zusammengehörigkeit von drei Geraden.*

Wir erhalten also (W) mit dem Axiom:

B 8. *Sind abc und abd Geradenspiegelungen mit $ab \neq ba$*[10]*, so ist auch acd eine Geradenspiegelung.*

Durch die Axiome B 1—B 8 ist die Bewegungsgruppe derjenigen affin-orthogonalen Geometrie, in der das Fano-Axiom und die Schließungssätze (M) und (W) gelten und keine isotropen Geraden existieren, charakterisiert. Die

[10]) Dies ist genau dann der Fall, wenn $a \neq b$ und a nicht senkrecht b ist.

Axiome B 7 und B 8 folgen natürlich aus dem stärkeren *Axiom der drei Spiegelungen* (das den Höhenschnittpunktsatz liefert):

B 9. *Haben a, b, c einen gemeinsamen Schnittpunkt, so ist das Produkt abc eine Geradenspiegelung.*

Der Beweis von B 8 mit B 1—B 6 und B 9 ist bekannt. Ein einfacher Beweis für den durch B 7 ausgedrückten Schließungssatz (M) ist mit dem *Satz vom Gegenpunkt* zu erbringen:

Die Verbindungsgeraden PP_i bzw. $P_{i+1}P_{i+2}$ seien g_i bzw. h_i ($i = 1, 2, 3 \bmod 3$) (Fig. 10). Die Spiegelungsprodukte $h_i g_{i+1} h_{i+2}$ sind gemäß B 9 Geradenspiegelungen. Diese besitzen einen gemeinsamen Schnittpunkt P' (wie aus der beweisbaren Umkehrung von B 9 folgt), den „Gegenpunkt von P in dem Dreieck $P_1P_2P_3$". Lot von P' auf h_i sei g'_i, Fußpunkt P'_i. Für die Verbindungsgerade h'_i von P'_{i+1} mit P'_{i+2} gilt nach dem Lotesatz (vgl. [5]) $g_i \perp h'_i$. Hiermit haben wir eine spezielle Konfiguration des Schließungssatzes (M). Aus dieser speziellen Konfiguration folgt (M) allgemein mit dem Satz von DESARGUES.

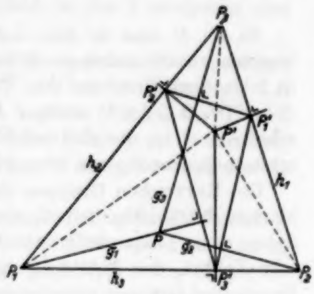

Fig. 10.

Literatur.

[1] F. BACHMANN: Zur Begründung der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Math. Ann. **123**, 341—344 (1951). — [2] J. DIEUDONNÉ: On the structure of unitary groups. Trans. Amer. Math. Soc. **72**, 367—385 (1952). — [3] H. NAUMANN u. K. REIDEMEISTER: Über Schließungssätze der Rechtwinkelgeometrie. Erscheint in Abh. math. Sem. Univ. Hamburg. [4] K. REIDEMEISTER: Grundlagen der Geometrie. Berlin 1930. — [5] ARNOLD SCHMIDT: Die Dualität von Inzidenz und Senkrechtstehen in der absoluten Geometrie. Math. Ann. **118**, 609—625 (1943). — [6] K. SCHÜTTE: Ein Schließungssatz für Inzidenz und Orthogonalität. Math. Ann. **129**, 424—430 (1955).

(Eingegangen am 21. April 1955.)

WEIER, J.
Math. Annalen, Bd. 130, S. 196—201 (1955).

Die Randsingularitäten von Abbildungen offener Mengen in sich.

Von

JOSEF WEIER in Fulda.

Es sei U eine in dem n-dimensionalen Euklidischen Raum R^n, $n > 1$, liegende zusammenhängende beschränkte offene Menge. Und $\overline{U}$ lasse sich in folgendem Sinne auf eine Teilmenge von U retrahieren: es existiert eine Schar (r^τ, $0 \leqq \tau \leqq 1$) stetiger Abbildungen r^τ von $\overline{U}$ in sich mit den Eigenschaften: r^0 ist die identische Abbildung, $r^\tau(\overline{U}) \subset U$ für $0 < \tau \leqq 1$. Die so erklärte Bedeutung von U und r^τ bleibe bis zum Schluß der Arbeit.

Die BETTIschen Gruppen der Menge U sind, wie aus der vorstehend erklärten Retrahierbarkeitseigenschaft leicht folgt, endlich erzeugt. Man kann daher, wenn f eine stetige Abbildung von U in sich bedeutet, die LEFSCHETZsche Zahl λ_f der Abbildung f, also die Wechselsumme über die von f den BETTIschen Gruppen eingeprägten Spuren, definieren.

Obschon mit einer wohl bestimmten LEFSCHETZschen Zahl versehen, hat f jedoch folgende Eigenschaft, die jeder stetigen Abbildung g eines endlichen Polyeders P in sich zukommt, nicht notwendig: Wenn die Anzahl der Fixpunkte von g endlich ist, gilt für die Indexsumme σ_g von g und die LEFSCHETZsche Zahl λ_g von g die Gleichung $|\lambda_g| = |\sigma_g|$. Dabei heiße „Indexsumme" von g, falls g keinen Fixpunkt hat, die Zahl Null, sonst die Summe der Indexe der Fixpunkte von g.

Ja selbst die LEFSCHETZsche Fixpunkteigenschaft[1]), mit $\lambda_f \neq 0$ notwendig wenigstens einen Fixpunkt zu haben, besitzt f nicht mehr. Man kann nämlich zeigen: es gibt eine zu f homotope Abbildung h von U in sich, die keinen Fixpunkt hat. Hingegen ist, da die LEFSCHETZsche Zahl homotopieinvariant, $\lambda_f = \lambda_h$. Noch schärfer gilt, wie ich an anderer Stelle beweisen werde: ist α irgendeine ganze Zahl, so gibt es eine zu f homotope Abbildung, die höchstens endlich viele Fixpunkte und die Indexsumme α hat.

Indes zeigt die Abbildung f ein mit der LEFSCHETZschen Fixpunkteigenschaft verwandtes Verhalten, und dies zu beweisen, stellt den Zweck der vorliegenden Arbeit dar: *Ist $\lambda_f \neq 0$ und hat f keinen Fixpunkt, so hat f wenigstens eine Randsingularität*; mit folgender Erklärung des letzteren Begriffes.

Definition. *Sind a ein Punkt aus $\overline{U} - U$ und $a_1, a_2, \ldots$ gegen a konvergierende Punkte aus U und gilt*

$$\lim f(a_i) = a,$$

so heißt a eine „Randsingularität" von f.

---

[1]) S. LEFSCHETZ: On the Fixed Point Formula. Ann. of Math. 38, 819—822 (1937).

Einige weitere Sätze, die unten bewiesen werden, ergänzen das bisher Gesagte.

1. Abbildungen mit nur endlich vielen Randsingularitäten.

Bereits die beiden Sätze dieses Abschnittes zeigen, daß der Begriff der Randsingularität eine zweckmäßige Ergänzung zum Begriff des Fixpunktes darstellt. Ist f gleichmäßig stetig, so geht Satz 1 in eine triviale Aussage über.

Satz 1. *Hat jede stetige Abbildung von $\bar{U}$ in sich einen Fixpunkt und ist f eine fixpunktfreie stetige Abbildung von U in sich, so hat f wenigstens eine Randsingularität.*

Beweis. Zunächst habe f die Eigenschaft, daß zu jedem Paar positiver Zahlen δ, ε ein Punkt p in U existiert mit $\varrho(p, \bar{U} - U) < \delta$ und $\varrho(p, f(p)) < \varepsilon$. Bedeutet dann q_i für jede natürliche Zahl i einen Punkt aus U mit $\varrho(q_i, \bar{U} - U) < 1/i$ und $\varrho(q_i, f(q_i)) < 1/i$, so enthält die Folge $q_1, q_2, \ldots$ eine konvergente Teilfolge $r_1, r_2, \ldots$. Der Punkt $\lim r_i$ ist eine Randsingularität von f.

Nun seien δ_0, ε_0 positive Zahlen derart, daß $\varrho(p, f(p)) \geqq \varepsilon_0$ für alle Punkte p aus U mit $\varrho(p, \bar{U} - U) < \delta_0$. Da f fixpunktfrei und $\bar{U}$ kompakt ist, gibt es dann weiter eine positive Zahl ε_1 derart, daß sogar $\varrho(p, f(p)) > 2\,\varepsilon_1$ für $p \in U$. Wegen $r^0(p) = p$, $p \in \bar{U}$, gibt es eine Zahl α mit $0 < \alpha < 1$ derart, daß $\varrho(p, r^\alpha(p)) < \varepsilon_1$ für $p \in \bar{U}$.

Ist hierauf g die durch $g(p) = r^\alpha f(p)$, $p \in U$, bestimmte Abbildung von U in sich, so gilt in allen p aus U, daß $\varrho(p, g(p)) \geqq \varrho(p, f(p)) - \varrho(f(p), r^\alpha f(p)) > \varepsilon_1$ und $g(p) \in r^\alpha(U)$.

Es sei V eine offene Menge im R^n derart, daß $r^\alpha(U) \subset V$ und $\bar{V} \subset U$; ferner λ eine stetige Abbildung von $\bar{U}$ in $[0,1]$, so daß $\lambda(p) = 0$ für $p \in \bar{V}$ und $\lambda(p) = 1$ für $p \in \bar{U} - U$; hierauf $h(p) = g\, r^{\lambda(p)\alpha}(p)$ für $p \in \bar{U}$. Wegen $r^\tau(U) \subset U$, $0 \leqq \tau \leqq 1$, und $r^\alpha(\bar{U} - U) \subset U$ ist die Erklärung der Abbildung h möglich.

Dann ist $h(p) = g(p) \neq p$ für $p \in V$. Wegen $h(U - V) \subset g(U) \subset r^\alpha(U) \subset V$ ist $h(p) \neq p$ für $p \in U - V$. Für $p \in \bar{U} - U$ ist $h(p) = g\, r^\alpha(p)$, wegen $r^\alpha(p) \in U$ und $g(U) \subset U$ also $h(p) \in U$, daher $h(p) \neq p$. Somit stellt h eine fixpunktfreie stetige Abbildung von $\bar{U}$ in sich dar, obschon doch jede stetige Abbildung von $\bar{U}$ in sich wenigstens einen Fixpunkt besitzt; ein Widerspruch.

Satz 2. *Ist f eine stetige Abbildung von U in sich, so gibt es eine zu f homotope Abbildung von U in sich, die höchstens endlich viele Fixpunkte und keine Randsingularität hat.*

Beweis. Für $0 \leqq \tau \leqq 1$ sei g^τ die durch $g^\tau(p) = r^\tau f(p)$, $p \in U$, bestimmte Abbildung von U in sich. Dann ist g^1 zu f homotop, und es gilt $g^1(U) \subset r^1(U)$.

Da $r^1(\bar{U}) \subset U$, kann man jedem Punkt p der Menge $r^1(\bar{U})$ ein offenes n-dimensionales Simplex $S(p)$ zuordnen mit $p \in S(p)$ und $\overline{S(p)} \subset U$. Da weiter $r^1(\bar{U})$ kompakt, gibt es endlich viele Punkte p_i in $r^1(\bar{U})$ derart, daß $r^1(\bar{U}) \subset V$ und $\bar{V} \subset U$ für $V = \Sigma\, S(p_i)$. Es gibt weiter eine offene Menge W, so daß $r^1(\bar{U}) \subset W$ und $\bar{W} \subset V$. Ferner existiert eine positive Zahl δ, so daß jede stetige Abbildung g' von $\bar{V}$ in sich mit $\varrho(g^1|\bar{V}, g') < \delta$ die Eigenschaft besitzt: $\overline{g^1(p)\, g'(p)} \subset W$ für alle Punkte p aus $\bar{V}$.

Hierauf bedeute h eine stetige Abbildung von $\bar{V}$ in sich mit $\varrho(g^1|\bar{V}, h) < \delta$ und höchstens endlich vielen Fixpunkten. Eine solche Abbildung existiert nach einem bekannten Approximationssatz[2]).

Schließlich sei λ eine stetige Abbildung von $\bar{V}$ in $[0, 1]$ derart, daß $\lambda(p) = 1$ für $p \in \bar{W}$ und $\lambda(p) = 0$ für $p \in \bar{V} - V$; alsdann

$$f'(p) = (1 - \lambda(p))\, g^1(p) + \lambda(p)\, h(p) \quad \text{für} \quad p \in \bar{V}$$

und $f'(p) = g^1(p)$ für $p \in U - V$. Wegen $\lambda(p) = 0$, $p \in \bar{V} - V$, ist die Abbildung f' stetig.

Aus $f'(U - V) = g^1(U - V) = r^1 f(U - V) \subset r^1(U) \subset V$ folgt, daß f' keine Randsingularität und in $U - V$ keinen Fixpunkt hat. Für $p \in V - W$ ist $f'(p)$ in $\overline{g^1(p)\, h(p)}$ gelegen, wegen $\varrho(g^1|\bar{V}, h) < \delta$ und der Bedeutung von δ daher $f'(p) \in W$, also $p \neq f'(p)$. Auf W stimmen f' und h überein, also hat f' auf W höchstens endlich viele Fixpunkte. Damit ist Satz 2 bewiesen.

2. Indexsumme und Lefschetzsche Zahl in U.

Den eingangs angeführten Satz, daß, wenn f eine stetige Abbildung von U in sich mit $p \neq f(p)$, $p \in \dot{U}$, und $\lambda_f \neq 0$ bedeutet, f wenigstens eine Randsingularität hat, wollen wir verschärfen zu

Satz 3. *Ist f eine stetige Abbildung von U in sich, die höchstens endlich viele Fixpunkte und keine Randsingularität hat, so sind Indexsumme von f und Lefschetzsche Zahl von f einander gleich.*

Beweis. Dem nachstehenden Hilfssatz zufolge kann man annehmen, daß $\overline{f(U)} \subset U$. Hierauf bedeute P ein endliches Euklidisches Polyeder, das die folgenden Eigenschaften 1) bis 3) hat: 1) es ist

$$\overline{f(U)} \subset \dot{P} \subset U;$$

2) jeder Fixpunkt von f liegt im Innern von P; 3) es gibt eine Schar $(s^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen s^τ von $\bar{U}$ in sich, so daß s^0 die Identität, $s^\tau(\bar{U}) \subset U$ für $0 < \tau \leqq 1$ und $s^1(\bar{U}) = P$ ist. Das Polyeder P existiert. Denn 1) und 2) läßt sich trivialerweise erreichen. Die Existenz der Schar $(s^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ folgt leicht aus der Erklärung der Schar $(r^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$.

Alsdann stellt $g = f \mid P$ eine stetige Abbildung von P in sich dar. Die Indexsumme σ_f von f und die Indexsumme σ_g von g sind gleich. Überdies ist, wenn wieder λ_f, λ_g die Lefschetzsche Zahl von f bzw. g bedeutet, $\sigma_g = \lambda_g$.

Zum Beweis, daß $\lambda_f = \lambda_g$, zunächst die Bemerkung, daß die Bettischen Gruppen von P und die entsprechenden Gruppen von U isomorph sind. Dies zu zeigen, genügt der Nachweis: bedeutet Z einen Zyklus in U, so gibt es einen Zyklus Z' in P derart, daß Z und Z' innerhalb U homotop sind. Das ist aber wegen der Erklärung von $(s^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ richtig.

Alsdann braucht es zur Bestätigung von $\lambda_f = \lambda_g$ nur noch einen Nachweis folgender Behauptung. Die von f in die Bettischen Gruppen von P induzierten Homomorphismen und die von g in die gleichen Gruppen induzierten Homomorphismen stimmen überein. Eine Aussage, die wegen $g = f \mid P$ trivialerweise richtig ist.

---

[2]) H. Hopf: Über die algebraische Anzahl von Fixpunkten. Math. Z. **29**, 493—524 (1929).

Aus $\sigma_f = \sigma_g$, $\sigma_g = \lambda_g$ und $\lambda_g = \lambda_f$ folgt $\sigma_f = \lambda_f$, also Satz 3.

Wir haben Gebrauch gemacht von folgendem

Hilfssatz. Ist f eine stetige Abbildung von U in sich, die höchstens endlich viele Fixpunkte und keine Randsingularität hat, so gibt es eine zu f homotope Abbildung f' mit den Eigenschaften: f' hat höchstens endlich viele Fixpunkte, die Indexsummen von f und f' stimmen überein, $\overline{f'(U)} \subset U$.

Beweis. Da f keine Randsingularität hat, gibt es eine offene Menge V im R^n mit $\overline{V} \subset U$ und eine positive Zahl δ derart, daß $\varrho(p, f(p)) > \delta$ für $p \in U - V$. Weiter gibt es wegen $r^0(p) = p$, $p \in U$, eine Zahl α mit $0 < \alpha < 1$ derart, daß $\varrho(p, r^\tau(p)) < \delta$ für alle (p, τ) mit $p \in \overline{U}$ und $0 \leq \tau \leq \alpha$.

Es bedeute W eine offene Menge im R^n mit $\overline{V} \subset W$ und $\overline{W} \subset U$; ferner λ eine stetige Abbildung von U in $[0, 1]$ derart, daß $\lambda(p) = 0$ für $p \in \overline{V}$ und $\lambda(p) = 1$ für $p \in U - W$. Wenn dann $f'(p) = r^{\lambda(p)\alpha} f(p)$ für $p \in U$, so ist $f'(p) = f(p)$ für $p \in \overline{V}$. Für $p \in U - V$ ist $\varrho(p, f(p)) > \delta$ und $\varrho(f(p), f'(p)) < \delta$, also $p \neq f'(p)$.

Zum Nachweis, daß $\overline{f'(U)} \subset U$, genügt es, da $\overline{f'(U)} = \overline{f'(W)} + \overline{f'(U - W)}$ und $\overline{f'(W)} \subset U$, zu zeigen, daß $\overline{f'(U - W)}$ in U liegt. Dies ist aber richtig, da $f'(U - W) = r^\alpha f(U - W) \subset r^\alpha(U)$ und $\overline{r^\alpha(U)} \subset U$.

3. Mindestzahlen von Randsingularitäten.

Wie schon in der Einleitung bemerkt, existiert zu jeder stetigen Abbildung f von U in sich eine homotope Abbildung f' von U in sich, die keinen Fixpunkt hat. Nach Satz 2 gibt es weiter eine zu f homotope Abbildung f'', die keine Randsingularität hat. Ein Ergebnis, gleichzeitig Mindestzahl von Fixpunkten und Mindestzahl von Randsingularitäten betreffend, wird durch den folgenden Satz geliefert.

Satz 4. *Ist f eine stetige Abbildung von U in sich, so gibt es eine zu f homotope Abbildung von U in sich, die keinen Fixpunkt und höchstens eine Randsingularität hat.*

Beweis. Nach Satz 2 gibt es eine zu f homotope Abbildung g von U in sich, die höchstens endlich viele Fixpunkte und keine Randsingularität hat. Es seien $q_1, \ldots, q_m$ die Fixpunkte von g und q ein Punkt aus $\overline{U} - U$.

Da U zusammenhängend ist, existieren stetige Abbildungen $h_1, \ldots, h_m$ von $[0, 1]$ in $\overline{U}$ mit den Eigenschaften: für alle i ist $h_i(0) = q_i$ und $h_i(1) = q$; für alle (i, τ) mit $0 \leq \tau < 1$ ist $h_i(\tau) \in U$; für alle (j, k, τ) mit $j \neq k$ und $0 \leq \tau < 1$ ist $h_j(\tau) \neq h_k(\tau)$; für alle (i, α, β) mit $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ ist $h_i(\alpha) \neq h_i(\beta)$. Wir bezeichnen den Punkt $h_i(\tau)$ auch mit q_i^τ.

Dann existiert, wie leicht aus dem nachstehenden Hilfssatz folgt, eine halboffene Schar $(f^\tau, 0 \leq \tau < 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von U in sich mit den Eigenschaften: $f^0 = f$; für $0 \leq \tau < 1$ sind die Punkte $q_1^\tau, \ldots, q_m^\tau$ die Fixpunkte von f^τ; zu jeder positiven Zahl δ gibt es eine Zahl α mit $0 < \alpha < 1$ derart, daß $f^\tau(p) = f^\alpha(p)$ in allen (p, τ) mit $\varrho(p, \overline{U} - U) > \delta$ und $\alpha \leq \tau < 1$; zu jedem Punkt $p \in (\overline{U} - U) - q$ gibt es eine positive Zahl $\varepsilon > 0$ derart, daß $\varrho(p' f^\tau(p')) > \varepsilon$ in allen Punkten (p', τ), für die gleichzeitig $p' \in U$, $\varrho(p, p') < \varepsilon$ und $0 \leq \tau < 1$ ist.

Wir ordnen jedem Punkt a aus U eine Zahl $\zeta(a)$ mit $0 \leqq \zeta(a) < 1$ zu. Und zwar sei $\zeta(a)$ die untere Grenze aller Zahlen η folgender Art: für alle (p, τ) mit $\varrho(p, \bar{U} - U) > \frac{1}{2}\varrho(a, \bar{U} - U)$ und $\eta < \tau < 1$ ist $f^\tau(p) = f^\eta(p)$. Nach der Erklärung von $(f^\tau, 0 \leqq \tau < 1)$ existieren Zahlen η.

Dann gilt für jeden Punkt a aus U, daß $f^\tau(p) = f^{\zeta(a)}(p)$ in allen (p, τ) mit $\varrho(p, \bar{U} - U) > \frac{1}{2}\varrho(a, \bar{U} - U)$ und $\zeta(a) < \tau < 1$. Hierauf bezeichne f^1 die durch

$$f^1(p) = f^{\zeta(p)}(p), \quad p \in U,$$

bestimmte eindeutige Abbildung von U in sich. In allen (p, τ) mit $p \in U$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$ sei $F(p, \tau) = f^\tau(p)$. Zum Beweis, daß die Abbildung F stetig ist, genügt es, die Stetigkeit von F in den Punkten $(p, 1)$ mit $p \in U$ zu prüfen.

Es sei b ein Punkt aus U und V eine offene Menge derart, daß $b \in V$, $\bar{V} \subset U$ und für je zwei Punkte p_1, p_2 aus $\bar{V}$ stets $\varrho(p_1, p_2) < \frac{1}{2}\varrho(p_1, \bar{U} - U)$ ist. Wenn die Umgebung V nur hinreichend eng ist, hat sie die verlangten Eigenschaften.

Für jeden Punkt p aus U bezeichnen wir mit W_p die Menge aller Punkte p' aus U mit $\varrho(p', \bar{U} - U) > \frac{1}{2}\varrho(p, \bar{U} - U)$. Dann wollen wir zeigen, daß

$$\bar{V} \subset W_p \text{ für alle Punkte } p \text{ aus } \bar{V}.$$

Zum Beweis genügt es zu zeigen, daß $c \in W_d$, wenn c und d zwei Punkte aus $\bar{V}$ bedeuten. Nun ist $\varrho(c, \bar{U} - U) \geqq \varrho(d, \bar{U} - U) - \varrho(d, c)$, nach der Erklärung von V weiter $\varrho(c, d) < \frac{1}{2}\varrho(d, \bar{U} - U)$, also $\varrho(c, \bar{U} - U) > \frac{1}{2}\varrho(d, \bar{U} - U)$, daher $c \in W_d$, wie behauptet.

Es sei $\mu = \min(\zeta(p);\ p \in \bar{V})$ und e ein Punkt aus $\bar{V}$ mit $\zeta(e) = \mu$. Dann ist $f^\tau(p) = f^\mu(p)$ in allen (p, τ) mit $p \in W_e$ und $\mu < \tau < 1$, wegen $\bar{V} \subset W_e$ also im besonderen $f^\tau(p) = f^\mu(p)$ in allen (p, τ) mit $p \in \bar{V}$ und $\mu < \tau < 1$. In jedem Punkt p aus $\bar{V}$ ist $\zeta(p) \geqq \mu$, also $f^{\zeta(p)}(p) = f^\mu(p)$, somit $f^\tau(p) = f^\mu(p)$ sogar für $\mu < \tau \leqq 1$. Mithin ist F in $(b, 1)$ stetig.

Die Abbildung f^1 ist durch F zu f homotop, hat keinen Fixpunkt und höchstens eine Randsingularität, womit Satz 4 bewiesen ist. Der folgende Hilfssatz, der im Beweis benutzt wurde, leuchtet fast unmittelbar ein.

Hilfssatz. Es seien V eine offene Vollkugel im R^n und a^τ, $0 \leqq \tau \leqq 1$, von τ stetig abhängende Punkte aus V, ferner f eine stetige Abbildung von $\bar{V}$ in den R^n und a^0 der einzige Fixpunkt von f. Dann gibt es eine Schar $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von $\bar{V}$ in den R^n mit den Eigenschaften: in allen (p, τ), für die entweder $p \in \bar{V}$ und $\tau = 0$ oder $p \in \bar{V} - V$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$, ist $f^\tau(p) = f(p)$; für $0 \leqq \tau \leqq 1$ ist a^τ der einzige Fixpunkt der Abbildung f^τ.

4. Über nicht retrahierbare offene Mengen.

Es seien A eine Gerade im R^2 und $a, a_1, a_2, \ldots$ Punkte aus A mit $\varrho(a_i, a) > \varrho(a_{i+1}, a) > 0$ und $\lim a_i = a$, ferner b_i für alle natürlichen Zahlen i der Mittelpunkt der Strecke $\overline{a_i a_{i+1}}$, weiter S_i die 1-Sphäre mit b_i als Mittelpunkt und $\varrho(a_i, b_i)$ als Radius.

Für jeden Punkt p der Menge ΣS_i bedeute $\delta(p)$ den Abstand zwischen p und der aus den Punkten $b_1, b_2, \ldots$ bestehenden Menge; ferner $V(p)$ die

offene 2-dimensionale Vollkugel im R^2 mit p als Mittelpunkt und $\delta(p)$ als Durchmesser. Es sei W die offene Menge $\Sigma V(p)$, wobei über alle Punkte p aus ΣS_i summiert wird. Schließlich bezeichne f die identische Abbildung von W.

Man überlegt sich leicht, daß $a \in \overline{W} - W$ und daß W zusammenhängend ist.

Wir wollen zeigen, daß der Punkt a Randsingularität einer jeden zu f homotopen Abbildung von W in sich ist. Hieraus und aus Satz 2 ergibt sich dann, daß W nicht retrahierbar und daher das Fixpunktverhalten nicht retrahierbarer Mengen von dem der eingangs erklären Menge U abweicht.

Es bedeute f' eine zu f homotope Abbildung von W in sich. Zum Beweis, daß a Randsingularität von f' ist, genügt es anzunehmen, ε sei eine positive Zahl, und hierauf zu zeigen: es gibt einen Punkt p in W mit $\varrho(a, p) < \varepsilon$ und $\varrho(a, f'(p)) < \varepsilon$.

Zu diesem Zweck bedeute j eine solche natürliche Zahl, daß $\varrho(a, p) < \varepsilon$ für alle Punkte p aus S_j; ferner A_j jenen Halbstrahl auf der Geraden A, der in b_j beginnt und a enthält; S_j^* eine Orientierung von S_j und $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Schar stetiger Abbildungen f^τ von W in sich mit $f^0 = f$ und $f^1 = f'$. Da $f(S_j^*)$ bezüglich b_j eine Ordnung $\neq 0$ hat und $b_j \notin f^\tau(S_j)$ für $0 \leq \tau \leq 1$, hat auch $f'(b_j)$ bezüglich a_j eine Ordnung $\neq 0$. Somit umkreist $f'(S_j)$ den Punkt b_j wenigstens einmal. Hieraus folgt $f'(S_j) \cdot A_j \neq 0$, aus $f'(S_j) \subset W$ und $W \cdot A_j = W \cdot \overline{b_j a}$ daher weiter $f'(S_j) \cdot \overline{b_j a} \neq 0$. Es gibt also einen Punkt p in S_j mit $f'(p) \in \overline{b_j a}$. Für diesen Punkt ist $\varrho(a, p) < \varepsilon$ und $\varrho(a, f'(p)) < \varepsilon$.

(Eingegangen am 8. Februar 1955.)

RIZZA, G. B.
Math. Annalen, Bd. 130, S. 202—218 (1955).

Dirichlet Problem for n-Harmonic Functions and Related Geometrical Properties.

By
GIOVANNI BATTISTA RIZZA in Genova (Italia).

1 — It is known that an important class of harmonic functions of $2n$ real variables is the class of n-harmonic functions, namely the class of the real components of analytic functions of n complex variables.

The relative DIRICHLET's problem consists in determining a function U, which shall be n-harmonic in a domain D of the $2n$-dimensional euclidean space S_{2n} and which, on the boundary Φ of D, shall reduce to an assigned function u.

F. SEVERI in 1931 has given necessary and sufficient conditions on the function u for the existence of the solution of DIRICHLET's problem[1]).

This result is the starting point of my work[2]), which intends to give an explicit integral representation of the solution U in D in terms of the function u assigned on Φ.

Thus, an extension of an interesting relation due to E. MARTINELLI and concerning the case of bi-harmonic functions ($n = 2$) is obtained[3]).

The essential point of my research consists in establishing the fundamental relation in Section 9, expressing the normal derivative of the unknown function in terms of the given function u.

We obtain the result starting from the consideration of the congruence (s) of curves on Φ, whose tangents are conjugate to the corresponding normals to Φ (Sec. 3).

The proof (Sec. 3/8) proceeds in analogy with the case $n = 2$, but in the actual case more difficulties are to be overcome. The aim is reached by using geometrical properties of a convenient $(2n-1)$-tuple of congruences on Φ, associated with (s).

The fundamental relation in Sec. 9, and therefore the final result, involves the differential parameter $\Delta_\tau^2 u$, relative to the $(2n-2)$-dimensional characteristic spaces tangent to Φ (Sec. 5), and the differential expression $\mathfrak{L}(\varphi)$, which in the present research appears as a natural extension of the classical E. E. LEVI's invariant (Sec. 8 and 9).

Some of the properties of LEVI's invariant can be extended immediatly to $\mathfrak{L}(\varphi)$ (Sec. 10), but the behaviour of this expression with respect to the pseudo-conformal transformations is different (Sec. 11 and 12).

[1]) See the fundamental papers of this Author to numbers [10] and [11] of the list of references at the end of the paper.

[2]) Some of the results here established were given notice of at the International Congress of Mathematicians (Amsterdam 1954) [See [7]].

[3]) See E. MARTINELLI, [5] and [6].

Finally, Section 10 is devoted to the case of hyper-planoids, which appears exceptional for DIRICHLET's problem and is related to the identical vanishing of $\mathfrak{L}(\varphi)$.

2 — In the $2n$-dimensional real euclidean space $S_{2n}(x^1, \dots, x^{2n})$ we consider a simple, bounded domain D, whose boundary Φ is assumed to be connected, closed, analytic and having only simple points.

We suppose next that the function $u(x^1, \dots, x^{2n})$, assigned on Φ, be *the real part of an analytic function $f = u + iv$ of the n complex variables $z^p = x^p + i\,x^{n+p}\,(p = 1, \dots, n)$ on the primal Φ* [4]. Consequently there exists one and only one analytic function $F = U + iV$ of the n complex variables z^p, which is regular in D and reduces on Φ to $f = u + iv$; thus, *the function U, n-harmonic in D, is the solution of* DIRICHLET'*s problem* [5]).

Denoting by $P \equiv (\underset{0}{z^p}) \equiv (\underset{0}{x^p}, \underset{0}{x^{n+p}})$ a point inside of D and by $Q \equiv (z^p) \equiv$ $\equiv (x^p, x^{n+p})$ a point, varying on the boundary Φ, we can write for the harmonic function U the ordinary GREEN's formula

$$U(P) = \frac{(n-2)!}{4\pi^n} \int_{\Phi} \left[u(Q) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{2n-2}} - \frac{1}{r^{2n-2}} \frac{\partial U}{\partial n} \right] d\Phi\,, \tag{1}$$

r being the distance from P to Q.

It appears now clearly that an explicit integral representation for U, what constitutes the aim of the present research, will be immediatly obtained if we will be able to express the normal derivative $\dfrac{\partial U}{\partial n}$ in terms of the given function u.

3 — We begin by recalling that two directions d_1, d_2 in S_{2n}, with direction cosines $\underset{1}{\delta}^h$, $\underset{2}{\delta}^h$ $(h = 1, \dots, 2n)$ respectively, constitute an *ordered couple of conjugate directions* if and only if

$$\underset{1}{\delta}^q = \underset{2}{\delta}^{n+q}\,, \qquad \underset{1}{\delta}^{n+q} = -\underset{2}{\delta}^q \qquad (q = 1, \dots, \ )\,. \tag{2}$$

The directions d_1, d_2 are evidently perpendicular. Moreover, if d_1, d_2 pass through a point of S_{2n}, the characteristic planes determined by d_1 and by d_2 coincide with the plane $d_1 d_2$ [6]).

At every point Q of Φ equations (2) define the direction s, passing through Q, which, with the normal n to Φ at point Q, forms the ordered couple (s, n) of conjugate directions. The couple (s, n), whose importance will appear pre-eminent in what follows, determines the characteristic plane π_n normal to Φ at point Q.

Starting from π_n, we construct an n-tuple of characteristic planes π_p through point Q, mutually perpendicular [7]).

---

[4]) Also in the actual case, as it happened in the case $n = 2$, the WIRTINGER's formal definition and the SEVERI's geometrical one, both referring to *analytic functions of several complex variables on a primal*, are equivalent.

[5]) See F. SEVERI, [12], where the case $n = 2$ is widely developed and the extension to the general case is also suggested.

[6]) For the basic geometrical notions in the complex S_n and in its real image S_{2n}, see B. SEGRE, [9], Cap. IV, § 1. For the notions and the above referred properties of the ordered couples of conjugate directions see E. MARTINELLI, [6], p. 145/147.

[7]) See B. SEGRE, [9], p. 372.

We consider then, on every characteristic plane π_p $(p = 1, \ldots, n)$ an arbitrary direction s_{2p-1} through Q and its conjugate s_{2p}, which, as follows from previous remarks, lies in π_p and makes a right angle with s_{2p-1}.

In conclusion, putting $s_{2n-1} = s$ and $s_{2n} = n$, we can state that *the directions s_h $(h = 1, \ldots, 2n)$ constitute a $2n$-hedron, with vertex Q, of perpendicular directions, which are distributed into n ordered couples (s_{2p-1}, s_{2p}) $(p = 1, \ldots, n)$ of conjugate directions.*

The preceding discussion shows easily that for every point Q of Φ there are $\infty^{(n-1)^2}$ $2n$-hedra of this kind.

We suppose now that the functions determining the directions s_h $(h = 1, \ldots, 2n)$ belong to class C^1, when Q is varying in a convenient neighbourhood on Φ, and be such that all the $2n$-hedra, we are getting along, keep always the considered property. Therefore the directions s_k $(k = 1, \ldots, 2n - 1)$, tangent to Φ, envelope in the above neighbourhood $2n - 1$ *congruences of orthogonal curves.*

We will see in Sec. 7 that it is possible to satisfy the previous hypotheses in infinite ways. Therein moreover a $(2n - 1)$-tuple of congruences of the considered kind will be explicitly constructed.

In the following we will denote by (s_k) the single ∞^{2n-1} congruences and by $\mathfrak{C}$ the $(2n - 1)$-tuple of (s_k).

Among the congruences of $\mathfrak{C}$ the congruence $(s) = (s_{2n-1})$ is above all important, while the remaining $2n - 2$ congruences, which can be distributed into $n - 1$ ordered couples of conjugate congruences, are only auxiliary elements and do not appear in the final result.

4 — We recall now that, being $F = U + iV$ an analytic function in D of the n complex variables z^p (Sec. 2), for every ordered couple (t_1, t_2) of conjugate directions, at every point of D, we have[8])

$$\frac{\partial U}{\partial t_1} = \frac{\partial V}{\partial t_2} . \tag{3}$$

Moreover, as follows at once from (2), $(t_2, -t_1)$ also is an ordered couple of conjugate directions, and so we have

$$\frac{\partial U}{\partial t_2} = -\frac{\partial V}{\partial t_1} . \tag{3'}$$

Applying the above equations to the couples (s_{2p-1}, s_{2p}) $(p = 1, \ldots, n)$ of the previous Section at point Q of Φ and reminding that on Φ the function U reduces to the assigned function u, we obtain the following relations

$$\frac{\partial u}{\partial s_{2p-1}} = \frac{\partial v}{\partial s_{2p}} , \qquad \frac{\partial u}{\partial s_{2p}} = -\frac{\partial v}{\partial s_{2p-1}} \qquad (p = 1, \ldots, n - 1) , \tag{4}$$

and the fundamental one

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial s_{2n}} = -\frac{\partial v}{\partial s_{2n-1}} = -\frac{\partial v}{\partial s} , \tag{5}$$

where v denotes the trace of V on Φ.

[8]) See E. MARTINELLI, [6], p. 147.

We introduce now a coordinate system ξ^j $(j = 1, \ldots, 2n-1)$ on Φ and let $ds^2 = g_{jk}\, d\xi^j\, d\xi^k$ be the first fundamental quadratic form, which gives on Φ the metric, induced by the metric of the euclidean space S_{2n}. We denote then by $\underset{l}{\lambda}{}^k$, $\underset{l}{\lambda}{}_k$ $(k = 1, \ldots, 2n-1)$ the contravariant and the covariant components of the unit tangent vectors relative to the curves $s_l (l = 1, \ldots, 2n-1)$ of $\mathfrak{C}$ on Φ [9]).

Differentiating now equations (4) with respect to directions s_{2p-1}, s_{2p} respectively and taking account of the commutation rule for the differentiation with respect to arcs[10]), we can write

$$(6)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial s_{2p-1}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial s_{2p}^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial s_{2p}\,\partial s_{2p-1}} - \frac{\partial^2 v}{\partial s_{2p-1}\,\partial s_{2p}} \\ &= \sum_1^{2n-1}{}_l \frac{\partial v}{\partial s_l}\Big(\underset{l,2p-1,2p}{\gamma} - \underset{l,2p,2p-1}{\gamma}\Big), \end{aligned}$$

where $p = 1, \ldots, n-1$. By $\underset{jkl}{\gamma}$ we denote the RICCI's rotation coefficients for the $(2n-1)$-tuple $\mathfrak{C}$ of congruences, defined by

$$(7)\qquad \underset{jkl}{\gamma} = \underset{j}{\lambda}{}_{r,m}\, \underset{k}{\lambda}{}^r\, \underset{l}{\lambda}{}^m \qquad (j, k, l = 1, \ldots, 2n-1),$$

dummy indices r, m taking the values $1, \ldots, 2n-1$ [11]).

Putting then

$$(8)\qquad \underset{l;p}{A} = \underset{l,2p-1,2p}{\gamma} - \underset{l,2p,2p-1}{\gamma}\,; \qquad \underset{l;p}{B} = \underset{l,2p-1,2p}{\gamma} + \underset{l,2p,2p-1}{\gamma}\,;$$

where $p = 1, \ldots, n-1$; $l = 1, \ldots, 2n-1$; from (6) we immediatly obtain the relation

$$\sum_1^{2n-2}{}_h \frac{\partial^2 u}{\partial s_h^2} = \sum_1^{n-1}{}_p \Big(\sum_1^{n-1}{}_q \frac{\partial v}{\partial s_{2q-1}} \underset{2q-1;p}{A} + \sum_1^{n-1}{}_q \frac{\partial v}{\partial s_{2q}} \underset{2q;p}{A} + \frac{\partial v}{\partial s_{2n-1}} \underset{2n-1;p}{A}\Big),$$

which, in consequence of (4) and (5), can be written in the form

$$(9)\qquad \begin{aligned} &\sum_1^{2n-2}{}_h \frac{\partial^2 u}{\partial s_h^2} + \frac{\partial U}{\partial n} \sum_1^{n-1}{}_p \underset{2n-1;p}{A} + \\ &+ \sum_1^{n-1}{}_q \Big(\frac{\partial u}{\partial s_{2q}} \sum_1^{n-1}{}_p \underset{2q-1;p}{A} - \frac{\partial u}{\partial s_{2q-1}} \sum_1^{n-1}{}_p \underset{2q;p}{A}\Big) = 0. \end{aligned}$$

At every point Q of Φ where the coefficient of $\dfrac{\partial U}{\partial n}$ is different from zero, relation (9) already gives an expression for the normal derivative in terms of the assigned function u. We will see later (Sec. 5, 6, 7, 8) how relation (9) can be simplified and thus it will appear that, as previously announced, in the final result, expressing the relation between $\dfrac{\partial U}{\partial n}$ and the function u, the auxiliary congruences s_h $(h = 1, \ldots, 2n-2)$ are not involved.

---

[9]) Here and in what follows we make use of the ordinary notations of tensor calculus. See for instance L. P. EISENHART, [2].

[10]) See T. LEVI-CIVITA, [4], p. 290.

[11]) See T. LEVI-CIVITA, [4], p. 287.

5 — We consider now the expression $\sum_{1}^{2n-2}{}_h \frac{\partial^2 u}{\partial s_h^2}$, which occurs in (9). Since we have

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s_h^2} = u_{,jk} \underset{h}{\lambda^j} \underset{h}{\lambda^k} - \sum_{1}^{2n-1}{}_m \underset{m,h,h}{\gamma} \frac{\partial u}{\partial s_m} \quad (h = 1, \ldots, 2n-2),$$

dummy indices j, k taking the values $1, \ldots, 2n-1$ [12]), we obtain immediatly the relation

$$\sum_{1}^{2n-2}{}_h \frac{\partial^2 u}{\partial s_h^2} = \sum_{1}^{2n-2}{}_h u_{,jk} \underset{h}{\lambda^j} \underset{h}{\lambda^k} - \sum_{1}^{2n-1}{}_m \frac{\partial u}{\partial s_m} \left(\sum_{1}^{2n-2}{}_h \underset{m,h,h}{\gamma} \right);$$

from which, making use of the formula

$$g^{jk} = \sum_{1}^{2n-1}{}_h \underset{h}{\lambda^j} \underset{h}{\lambda^k}, \tag{10}$$

it follows

$$\begin{aligned} \sum_{1}^{2n-2}{}_h \frac{\partial^2 u}{\partial s_h^2} = & \left(g^{jk} - \underset{2n-1}{\lambda^j} \underset{2n-1}{\lambda^k} \right) u_{,jk} - \sum_{1}^{n-1}{}_q \frac{\partial u}{\partial s_{2q-1}} \left(\sum_{1}^{2n-2}{}_h \underset{2q-1,h,h}{\gamma} \right) + \\ & - \sum_{1}^{n-1}{}_q \frac{\partial u}{\partial s_{2q}} \left(\sum_{1}^{2n-2}{}_h \underset{2q,h,h}{\gamma} \right) - \frac{\partial u}{\partial s_{2n-1}} \sum_{1}^{2n-2}{}_h \underset{2n-1,h,h}{\gamma}. \end{aligned} \tag{11}$$

Now, RICCI's rotation coefficients, having the first two indices equal, are zero [12a]); hence, by (7) and (10), we have

$$\sum_{2}^{2n-2}{}_h \underset{2n-1,h,h}{\gamma} = \sum_{1}^{2n-1}{}_h \underset{2n-1,h,h}{\gamma} = g^{jk} \underset{2n-1}{\lambda_{j,k}}.$$

Finally, making use of the expressions $\underset{l;p}{B}$, defined in Sec. 4, relation (11) can be written in the form

$$\begin{aligned} \sum_{1}^{2n-2}{}_h \frac{\partial^2 u}{\partial s_h^2} = & \left(g^{jk} - \underset{2n-1}{\lambda^j} \underset{2n-1}{\lambda^k} \right) u_{,jk} - g^{jk} \underset{2n-1}{\lambda_{j,k}} \frac{\partial u}{\partial s_{2n-1}} + \\ & - \sum_{1}^{n-1}{}_q \left(\frac{\partial u}{\partial s_{2q-1}} \sum_{1}^{n-1}{}_p \underset{2q-1;p}{B} + \frac{\partial u}{\partial s_{2q}} \sum_{1}^{n-1}{}_p \underset{2q;p}{B} \right). \end{aligned} \tag{12}$$

We introduce now *the differential expression*

$$\Delta_\tau^2 u = \Delta^2 u - \underset{2n-1}{\lambda^j} \underset{2n-1}{\lambda^k} u_{,jk} - g^{jk} \underset{2n-1}{\lambda_{j,k}} \frac{\partial u}{\partial s_{2n-1}}, \tag{13}$$

where $\Delta^2 u = g^{jk} u_{,jk}$ is BELTRAMI's differential parameter, relative to Φ.

We remark explicitly that *the auxiliary congruences* (s_h) $(h = 1, \ldots, 2n-2)$ *do not appear at right member of* (13); consequently *the expression $\Delta_\tau^2 u$ depends only upon the congruence* (s).

At every point Q of Φ the direction s results to be perpendicular to the $(2n-2)$-dimensional characteristic space τ, tangent to Φ. Therefore, since the metric on Φ is given, *the expression $\Delta_\tau^2 u$ depends only on τ.*

---

[12]) See T. LEVI-CIVITA, [4], p. 290.

[12a]) See T. LEVI-CIVITA, [4], p. 288.

In conclusion $\Delta_\tau^2 u$ *is a differential parameter of the second order related to the* $(2n-2)$*-dimensional characteristic spaces tangent to* Φ. A remark in Sec. 10 will wholly justify the notation.

In consequence of (12) and (13), relation (9) in Sec. 4 reduces now to the following one

$$\Delta_\tau^2 u + \frac{\partial U}{\partial n}\sum_1^{n-1}{}_p \underset{2n-1;p}{A} + \tag{14}$$
$$+\sum_1^{n-1}{}_q\left[\frac{\partial u}{\partial s_{2q}}\sum_1^{n-1}{}_p\left(\underset{2q-1;p}{A} - \underset{2q;p}{B}\right) - \frac{\partial u}{\partial s_{2q-1}}\sum_1^{n-1}{}_p\left(\underset{2q;p}{A} + \underset{2q-1;p}{B}\right)\right] = 0\,,$$

which shall be simplified more in Sec. 6.

6 — We can obtain the announced simplification by demonstrating the validity of the relations

$$\underset{2q-1;p}{A} - \underset{2q;p}{B} = 0\,; \qquad \underset{2q;p}{A} + \underset{2q-1;p}{B} = 0 \quad (p, q = 1, \ldots, n-1)\,. \tag{15}$$

Starting from the geometrical definition of Ricci's rotation coefficients, which extends evidently from the case $n = 2$ to the general case, E. Martinelli has observed that these coefficients can be defined either with respect to Levi-Civita's parallelism on Φ, either in relation to the ordinary parallelism in the euclidean S_{2n}[13]). Therefore, denoting respectively by $\underset{jkl}{\gamma}$ and by $\underset{jkl}{\bar\gamma}$ the rotation coefficients for the above mentioned cases, we have

$$\underset{jkl}{\gamma} = \underset{jkl}{\bar\gamma} \qquad (j, k, l = 1, \ldots, 2n-1)\,. \tag{16}$$

An analytic expression of $\underset{jkl}{\gamma}$ is given by (7) in Sec. 4; analogously for $\underset{jkl}{\bar\gamma}$ we have

$$\underset{jkl}{\bar\gamma} = \frac{\partial \underset{j}{\sigma_h}}{\partial x^m}\underset{k}{\sigma^h}\underset{l}{\sigma^m} \qquad (j, k, l = 1, \ldots, 2n-1)\,, \tag{17}$$

where dummy indices h, m take the values $1, \ldots, 2n$ and $\underset{j}{\sigma^h} = \underset{j}{\sigma_h}$ denote respectively the contravariant and the covariant components of the unit tangent vector, namely the direction cosines, of s_j in S_{2n}.

After these premises, we consider the expressions

$$\underset{kl}{\Delta^{hm}} = \underset{k}{\sigma^h}\underset{l}{\sigma^m} - \underset{k}{\sigma^m}\underset{l}{\sigma^h}\,, \qquad \underset{kl}{\Sigma^{hm}} = \underset{k}{\sigma^h}\underset{k}{\sigma^m} + \underset{l}{\sigma^h}\underset{l}{\sigma^m} \tag{18}$$

where $k, l = 1, \ldots, 2n-1$; $h, m = 1, \ldots, 2n$; using which, in consequence of (16) and (17), the symbols $\underset{l;p}{A}$ and $\underset{l;p}{B}$, defined by (8), can be written in the following form

$$\underset{l;p}{A} = \frac{\partial \underset{l}{\sigma_h}}{\partial x^m}\underset{2p-1,2p}{\Delta^{hm}}\,, \qquad \underset{l;p}{B} = \frac{\partial \underset{l}{\sigma_h}}{\partial x^m}\underset{2p-1,2p}{\Sigma^{hm}}\,, \tag{19}$$

where it is understood to sum with respect to dummy indices h, m taking the values $1, \ldots, 2n$.

[13]) See E. Martinelli, [6], p. 154.

Since the direction cosines $\underset{2p-1}{\sigma^h}$, $\underset{2p}{\sigma^h}$ of the ordered couple (s_{2p-1}, s_{2p}) of conjugate directions satisfy condition (2) in Sec. 3, it is easy to obtain the relations

$$(20') \qquad \underset{2p-1,2p}{\Delta^{\mu,\nu}} = \underset{2p-1,2p}{\Delta^{n+\mu,n+\nu}}\,; \qquad \underset{2p-1,2p}{\Delta^{\mu,n+\nu}} = -\underset{2p-1,2p}{\Delta^{n+\mu,\nu}}\,;$$

$$(20'') \qquad \underset{2p-1,2p}{\Sigma^{\mu,\nu}} = \underset{2p-1,2p}{\Sigma^{n+\mu,n+\nu}}\,; \qquad \underset{2p-1,2p}{\Sigma^{\mu,n+\nu}} = -\underset{2p-1,2p}{\Sigma^{n+\mu,\nu}}\,;$$

$$(21) \qquad \underset{2p-1,2p}{\Delta^{r,m}} = \underset{2p-1,2p}{\Sigma^{n+r,m}}\,; \qquad \underset{2p-1,2p}{\Delta^{n+r,m}} = \underset{2p-1,2}{\Sigma^{r,m}}\,;$$

where $p, r, \mu, \nu = 1, \ldots, n$ and $m = 1, \ldots, 2n$, which we shall use also in Sec. 8.

In conclusion we meet no difficulty now in proving relation (15), making use of (19) and (21).

After that equation (14) in Sec. 5 reduces simply to

$$(22) \qquad \Delta_\tau^2 u + \frac{\partial U}{\partial n} \sum_1^{n-1}{}_p \underset{2n-1;p}{A} = 0\,.$$

Remark: In the case $p = q$, relation (15) follows immediatly from the definition (8) of the expressions $\underset{l;p}{A}$ and $\underset{l;p}{B}$, since RICCI's coefficients are skew-symmetric in the first two indices[14]. Therefore when $p = q$ relation (15) can be derived *without using the hypothesis that the directions s_{2q-1}, s_{2q} form an ordered couple of conjugate directions.*

That would not appear to be possible in the case $p \neq q$.

We note explicitly that when $n = 2$ the indices p and q are equal ($p = q = 1$).

7 — Next it is important to observe that all previous results hold true referring to every $(2n-1)$-tuple $\mathfrak{C}$ of congruences defined in Sec. 3.

On the other hand, as follows from a remark in Sec. 5 relative to the expression $\Delta_\tau^2 u$, relation (22) shows that the coefficient $\sum_1^{n-1}{}_h \underset{2n-1;p}{A}$ of the normal derivative *does not depend upon the auxiliary congruences* s_h $(h = 1, \ldots, 2n-2)$. Therefore *this coefficient can be evaluated with respect to every one of the $(2n-1)$-tuples* $\mathfrak{C}$.

Before proceeding to the evaluation of that expression, we make some premises.

We begin by extending the real S_{2n} $(x^1, \ldots, x^{2n})$ to the complex field, introducing the well known complex variables

$$z^q = x^q + i\,x^{n+q}, \quad \bar z^q = x^q - i\,x^{n+q} \quad (q = 1, \ldots, n);$$

so the metric in the complex S_{2n} is given by $ds^2 = \sum_1^{2n}{}_h\, dx^h\, dx^h = \sum_1^{n}{}_q\, dz^q\, d\bar z^q$.

For every direction d in the real S_{2n}, having the direction cosines δ^h $(h = 1, \ldots, 2n)$, we introduce the contravariant components, in the new variables, of the unit tangent vector $D^q = \delta^q + i\delta^{n+q}$, $\bar D^q = \delta^q - i\delta^{n+q}$

---

[14]) See T. LEVI-CIVITA, [4], p. 287.

($q = 1, \ldots, n$), which satisfy the condition

$$\sum_1^n{}_q D^q \bar{D}^q = 1 , \tag{23}$$

and will be frequently used in the following.

It is immediatly realized that, if d and e are perpendicular directions, defined by D^q, $\bar{D}^q$; E^q, $\bar{E}^q$ respectively, we have

$$\sum_1^n{}_q D^q \bar{E}^q + \bar{D}^q E^q = 0 . \tag{24}$$

Moreover condition (2) in Sec. 3 expressing that d_1 and d_2 form an ordered couple of conjugate directions reduces now simply to

$$\underset{1}{D^q} = - i \underset{2}{D^q} \qquad (q = 1, \ldots, n) . \tag{25}$$

From (24) and (25) it follows then easily that *a necessary and sufficient condition that two ordered couples* (d_1, d_2), (e_1, e_2) *of conjugate directions be perpendicular is given by*

$$\sum_1^n{}_q \underset{1}{D^q} \underset{1}{\bar{E}^q} = 0 , \tag{26'}$$

or by the equivalent relation

$$\sum_1^n{}_q \underset{2}{D^q} \underset{2}{\bar{E}^q} = 0 . \tag{26''}$$

Our purpose is now to give, starting from the fundamental couple $(s_{2n-1}, s_{2n}) = (s, n)$, an explicit construction of an n-tuple of ordered couples (s_{2p-1}, s_{2p}) of conjugate directions, relative to a point Q of Φ and mutually perpendicular (Sec. 3).

Denoting by $\underset{t}{\sigma^h}$ ($h = 1, \ldots, 2n$) the direction cosines (Sec. 6) and by $\underset{t}{S^q} = \underset{t}{\sigma^q} + i \underset{t}{\sigma^{n+q}}$, $\underset{t}{\bar{S}^q} = \underset{t}{\sigma^q} - i \underset{t}{\sigma^{n+q}}$ ($q = 1, \ldots, n$) the contravariant components of the unit tangent vector of the direction s_t ($t = 1, \ldots, 2n$), we begin to associate to $s_{2n} = n$ a direction s_{2n-2} satisfying the condition $\sum_1^n{}_q \underset{2n}{S^q} \underset{2n-2}{\bar{S}^q} = 0$. We associate then to the directions s_{2n}, s_{2n-2} a direction s_{2n-4} under the conditions $\sum_1^n{}_q \underset{2n}{S^q} \underset{2n-4}{\bar{S}^q} = 0$, $\sum_1^n{}_q \underset{2n-2}{S^q} \underset{2n-4}{\bar{S}^q} = 0$; and so on till to obtain the n-tuple $s_{2(n-\tau)}$ ($\tau = 0, 1, \ldots, n-1$).

Considering next the direction s_{2p-1}, forming with s_{2p} the ordered couple (s_{2p-1}, s_{2p}) of conjugate direction, it follows immediatly from (26″) that the n-tuple of couples (s_{2p-1}, s_{2p}) ($p = 1, \ldots, n$), relative to the point Q has the required properties.

The proceeding, as is readily verified, shows that the proposed question can be solved in $\infty^{(n-1)^2}$ ways. This way, all solutions indicated on Sec. 3 are obtained and every $\underset{k}{S^q}$ ($k = 1, \ldots, 2n-1$) can be expressed in terms of the $\underset{2n}{S^q}$'s ($q = 1, \ldots, n$) only.

In particular, if $\underset{2n}{S^1} \neq 0$, we assume to be zero every complex number $\underset{2(n-\xi)}{S^q}$ $(q = 1, \ldots, n)$ when $q > \xi + 1$, ξ being any integer among $1, \ldots, n-1$.

The geometrical meaning of this hypothesis is evident and, since the complex numbers $\underset{2n}{S^q}$ cannot be all zero, it is not difficult to see how we could proceed in the case when $\underset{2n}{S^1} = 0$.

Now, when the quantities $\underset{2n}{S^q}, \underset{2(n-1)}{S^q}, \ldots, \underset{2(n-\tau+1)}{S^q}$ $(q = 1, \ldots, n)$ satisfying condition (23) are determined, we can obtain every $\underset{2(n-\tau)}{S^q}$ $(q = 1, \ldots, n)$ noting that if $q > \tau + 1$ one has $\underset{2(n-\tau)}{\bar{S}^q} = 0$, while if $q \leqq \tau + 1$ the $\underset{2(n-\tau)}{\bar{S}^q}$'s result to be proportional to the minors of maximum order in the matrix

$$\mathfrak{H}_{\tau-1} = \left\| \begin{matrix} \underset{2n}{S^1} & \underset{2n}{S^2} & \underset{2n}{S^3} & . & . & . & \underset{2n}{S^\tau} & \underset{2n}{S^{\tau+1}} \\ \underset{2(n-1)}{S^1} & \underset{2(n-1)}{S^2} & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ \underset{2(n-\tau+1)}{S^1} & \underset{2(n-\tau+1)}{S^2} & \underset{2(n-\tau+1)}{S^3} & . & . & . & \underset{2(n-\tau+1)}{S^\tau} & 0 \end{matrix} \right\|$$

respectively multiplied by $(-1)^{q+1}$. The modulus of the proportionality factor $\bar{\varrho}_{\tau+1}$ is then determined, since $\underset{2(n-\tau)}{S^q}$ $(q = 1, \ldots, n)$ must satisfy the condition (23).

It is simple now to express $\underset{2(n-\tau)}{S^q}$ $(q = 1, \ldots, n)$ in terms of $\underset{2n}{S^q}$ $(q = 1, \ldots, n)$. *Namely we obtain the formulas*

$$\begin{aligned} &\underset{2(n-\tau)}{S^q} = \varrho_{\tau+1}\, \bar{\varrho}_\tau\, \underset{2n}{S^q}\, \underset{2n}{\bar{S}^{\tau+1}} && (q = 1, \ldots, \tau), \\ (27) \quad &\underset{2(n-\tau)}{S^{\tau+1}} = \varrho_{\tau+1}\, \bar{\varrho}_\tau\, \underset{2n}{S^{\tau+1}}\, \underset{2n}{\bar{S}^{\tau+1}} - \frac{\bar{\varrho}_\tau}{\bar{\varrho}_{\tau+1}} = -\frac{\varrho_{\tau+1}}{\varrho_\tau}, && \\ &\underset{2(n-\tau)}{S^q} = 0 && (q = \tau + 2, \ldots, n), \end{aligned}$$

valid when $\tau = 1, \ldots, n-1$, where

$$(28) \qquad \varrho_t\, \bar{\varrho}_t = (\underset{2n}{S^1}\, \underset{2n}{\bar{S}^1} + \cdots + \underset{2n}{S^t}\, \underset{2n}{\bar{S}^t})^{-1} \qquad (t = 1, \ldots, n),$$

and $\varrho_1 = (\underset{2n}{\bar{S}^1})^{-1}$.

In addition to (27) we consider then the relations, analogous to (25), concerning the couples $\underset{2p-1}{S^q}, \underset{2p}{S^q}$ $(p = 1, \ldots, n)$.

In conclusion, as soon as we fix the argument of every ϱ_t $(t = 2, \ldots, n)$, *a $2n$-hedron $\mathfrak{E}$ of directions through the considered point Q, having the required properties, is determined.*

We note at once that in the actual case, as follows from (27) and (25) and in consequence of the hypotheses in Sec. 2, the functions determining the directions s_k $(k = 1, \ldots, 2n-1)$ of $\mathfrak{E}$ satisfy the hypotheses of Sec. 3

and therefore, when the point Q varies in a convenient neighbourhood on Φ, *the s_k's generate a $(2n-1)$-tuple $\mathfrak{C}^*$ of orthogonal congruences of the kind considered in Sec. 3* [15]).

8 — Our task is now to evaluate the coefficient of $\dfrac{\partial U}{\partial n}$ in relation (22), making use of the $(2n-1)$-tuple $\mathfrak{C}^*$ of congruences.

Taking account of (19) in Sec. 6 and of (2) in Sec. 3 referred to the ordered couple (s_{2n-1}, s_{2n}) of conjugate directions, we have immediatly

$$\underset{2n-1;p}{A} = \sum_1^n {}_\mu \left[\frac{\partial \underset{2n}{\sigma_{n+\mu}}}{\partial x^m} \underset{2p-1,2p}{\Delta^{\mu,m}} - \frac{\partial \underset{2n}{\sigma_{\mu}}}{\partial x^m} \underset{2p-1,2p}{\Delta^{n+\mu,m}} \right] \quad (p = 1, \ldots, n-1),$$

where the dummy index m takes the values $1, \ldots, n$.

In consequence of (20′), it follows then the relation

$$\underset{2n-1,p}{A} = \sum_1^n {}_{\mu,\nu} \left[\left(\frac{\partial \underset{2n}{\sigma_{n+\mu}}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \underset{2n}{\sigma_{\mu}}}{\partial x^{n+\nu}} \right) \underset{2p-1,2p}{\Delta^{\mu,\nu}} + \left(\frac{\partial \underset{2n}{\sigma_{n+\mu}}}{\partial x^{n+\nu}} + \frac{\partial \underset{2n}{\sigma_{\mu}}}{\partial x^\nu} \right) \underset{2p-1,2p}{\Delta^{\mu,n+\nu}} \right],$$

from which, noting that the symbols $\underset{kl}{\Delta^{hm}}$ are skew-symmetric with respect to upper indices [(18) Sec. 6] and making use of (20′), we obtain

$$(29) \qquad \underset{2n-1,p}{A} = \sum_{\mu<\nu}^{1,\ldots,n} \left[H_{\mu,\nu} \underset{2p-1,2p}{\Delta^{\mu,\nu}} + K_{\mu,\nu} \underset{2p-1,2p}{\Delta^{\mu,n+\nu}} \right] + \sum_1^n {}_q W_q \underset{2p-1,2p}{\Delta^{q,n+q}},$$

where $H_{\mu,\nu}$, $K_{\mu,\nu}$, W_q, are defined by

$$(30) \qquad \begin{aligned} H_{\mu,\nu} &= \frac{\partial \underset{2n}{\sigma_{n+\mu}}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \underset{2n}{\sigma_{\mu}}}{\partial x^{n+\nu}} - \frac{\partial \underset{2n}{\sigma_{n+\nu}}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \underset{2n}{\sigma_{\nu}}}{\partial x^{n+\mu}}, \\ K_{\mu,\nu} &= \frac{\partial \underset{2n}{\sigma_{n+n}}}{\partial x^{n+\nu}} + \frac{\partial \underset{2n}{\sigma_{\mu}}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \underset{2n}{\sigma_{n+\nu}}}{\partial x^{n+\mu}} + \frac{\partial \underset{2n}{\sigma^{\nu}}}{\partial x^\mu}, \\ W_q &= \frac{\partial \underset{2n}{\sigma_{n+q}}}{\partial x^{n+q}} + \frac{\partial \underset{2n}{\sigma_{q}}}{\partial x^q}. \end{aligned}$$

We remark now that using the contravariant components $\underset{h}{S^q} = \underset{h}{\sigma^q} + i \underset{h}{\sigma^{n+q}}$, $\underset{h}{\bar{S}^q} = \underset{h}{\sigma^q} - i \underset{h}{\sigma^{n+q}}$ $(q = 1, \ldots, n)$ of the unit tangent vector of s_h $(h = 1, \ldots, 2n-1)$, we obtain immediatly from (18) the equalities

$$(31) \qquad \begin{aligned} \underset{2p-1,2p}{\Delta^{\mu,\nu}} &= \underset{2p}{\sigma^\nu} \underset{2p}{\sigma^{n+\mu}} - \underset{2p}{\sigma^\mu} \underset{2p}{\sigma^{n+\nu}} = -\frac{i}{2} \left(\underset{2p}{S^\mu} \underset{2p}{\bar{S}^\nu} - \underset{2p}{\bar{S}^\mu} \underset{2p}{S^\nu} \right), \\ \underset{2p-1,2p}{\Delta^{\mu,n+\nu}} &= \underset{2p}{\sigma^{n+\mu}} \underset{2p}{\sigma^{n+\nu}} + \underset{2p}{\sigma^\mu} \underset{2p}{\sigma^\nu} = \frac{1}{2} \left(\underset{2p}{S^\mu} \underset{2p}{\bar{S}^\nu} + \underset{2p}{\bar{S}^\mu} \underset{2p}{S^\nu} \right), \end{aligned}$$

---

[15]) More generally we could take as argument for ϱ_t $(t = 2, \ldots, n)$ an arbitrary continuous function of point Q in the fixed neighbourhood on Φ.

where $\mu, \nu = 1, \ldots, n$. Hence, taking account of (27), we have the following relations

$$
\begin{aligned}
&\underset{2p-1,2p}{\Delta^{\mu,\nu}} = |\varrho_{n-p+1}\,\varrho_{n-p}\underset{2n}{S^{n-p+1}}|^2 \underset{2n-1,2n}{\Delta^{\mu,\nu}}\,;\\
&\underset{2p-1,2p}{\Delta^{\mu,n+\nu}} = |\varrho_{n-p+1}\,\varrho_{n-p}\underset{2n}{S^{n-p+1}}|^2 \underset{2n-1,2n}{\Delta^{\mu,n+\nu}} \qquad (p<n-\nu+1),\\
(32)\qquad &\underset{2p-1,2p}{\Delta^{\mu,\nu}} = -|\varrho_\nu|^2 \underset{2n-1,2n}{\Delta^{\mu,\nu}}\,;\quad \underset{2p-1,2p}{\Delta^{\mu,n+\nu}} = -|\varrho_\nu|^2 \underset{2n-1,2n}{\Delta^{\mu,n+\nu}} \quad (p=n-\nu+1),\\
&\underset{2p-1,2p}{\Delta^{\mu,\nu}} = 0\,;\quad \underset{2p-1,2p}{\Delta^{\mu,n+\nu}} = 0 \qquad (p>n-\nu+1),
\end{aligned}
$$

where $\mu < \nu$.

Likewise we come to

$$
(33)\qquad \underset{2p-1,2p}{\Delta^{q,n+q}} = |\varrho_{n-p+1}\,\varrho_{n-p}\underset{2n}{S^{n-p-1}}\underset{2n}{S^q}|^2\,;\quad \underset{2p-1,2p}{\Delta^{q,n+q}} = \left|\frac{\varrho_q}{\varrho_{q-1}}\right|^2;\quad \underset{2p-1,2p}{\Delta^{q,n+q}} = 0\,;
$$

respectively valid according as $p \lesseqgtr n-q+1$.

From relation (28) we have then immediatly

$$
|\underset{2n}{S^{n-p+1}}|^2 = |\varrho_{n-p+1}|^{-2} - |\varrho_{n-p}|^{-2} = (|\varrho_{n-p}|^2 - |\varrho_{n-p+1}|^2)\cdot|\varrho_{n-p+1}\,\varrho_{n-p}|^2\,;
$$

and so we can write

$$
(34)\qquad |\varrho_{n-p+1}\,\varrho_{n-p}\underset{2n}{S^{n-p+1}}|^2 = |\varrho_{n-p}|^2 - |\varrho_{n-p+1}|^2 .
$$

In consequence of (32), (33) and (34) and noting that $|\varrho_n|^2 = 1$, we finally obtain

$$
\begin{aligned}
(35)\qquad &\sum_1^{n-1}{}_p \underset{2p-1,2p}{\Delta^{\mu,\nu}} = -\underset{2n-1,2n}{\Delta^{\mu,\nu}}\,;\quad \sum_1^{n-1}{}_p \underset{2p-1,2p}{\Delta^{\mu,n+\nu}} = -\underset{2n-1,2n}{\Delta^{\mu,n+\nu}} \qquad (\mu<\nu),\\
&\sum_1^{n-1}{}_p \underset{2p-1,2p}{\Delta^{q,n+q}} = \sum_{(q)}{}_\tau |\underset{2n}{S^\tau}|^2 ,
\end{aligned}
$$

where the symbol $\sum_{(q)}{}_\tau$ indicates the sum with respect to index τ taking the values $1, \ldots, q-1,\ q+1, \ldots, n$.

In conclusion from (29) we obtain the relation

$$
\sum_1^{n-1}{}_p \underset{2n-1;p}{A} = \sum_1^{n}{}_q [W_q \sum_{(p)}{}_\tau |\underset{2n}{S^\tau}|^2] - \sum_{\mu<\nu}^{1,\ldots,n} [H_{\mu,\nu} \underset{2n-1,2n}{\Delta^{\mu,\nu}} + K_{\mu,\nu} \underset{2n-1,2n}{\Delta^{\mu,n+\nu}}],
$$

and the equivalent one

$$
(36)\qquad \sum_1^{n-1}{}_p \underset{2n-1;p}{A} = \sum_{\mu<\nu}^{1,\ldots,n} [W_\mu |\underset{2n}{S^\nu}|^2 + W_\nu |\underset{2n}{S^\mu}|^2 - K_{\mu,\nu} \underset{2n-1,2n}{\Delta^{\mu,n+\nu}} - H_{\mu,\nu} \underset{2n-1,2n}{\Delta^{\mu,\nu}}].
$$

Now let $\varphi(x^1, \ldots, x^{2n}) = 0$ be the equation representing the primal Φ. We consider *the differential expressions*

$$\begin{aligned} L(z^\mu, z^\nu) = & \left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^\mu\,\partial x^\mu} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^{n+\mu}\,\partial x^{n+\mu}}\right]\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^{n+\nu}}\right)^2\right] + \\ & + \left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^\nu\,\partial x^\nu} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^{n+\nu}\,\partial x^{n+\nu}}\right]\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^{n+\mu}}\right)^2\right] + \\ & - 2\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^{n+\mu}\,\partial x^{n+\nu}}\right]\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu} + \frac{\partial\varphi}{\partial x^{n+\mu}}\frac{\partial\varphi}{\partial x^{n+\nu}}\right] + \\ & - 2\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^\mu\,\partial x^{n+\nu}} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^\nu\,\partial x^{n+\mu}}\right]\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^{n+\nu}} - \frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^{n+\mu}}\right] \end{aligned}$$

where $\mu, \nu = 1, \ldots, n$. We will see later the geometrical meaning of the introduced expressions; at present we just note that these expressions appear as *formal generalizations of the ordinary* E. E. LEVI'*s invariant*[16]).

Putting next

$$\text{(38)} \qquad \frac{1}{\eta} = \sqrt{\sum_1^{2n}{}_l \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^l}\right)^2}\,;$$

the direction cosines of the normal $s_{2n} = n$ to Φ at the generic point Q are given by

$$\text{(39)} \qquad \underset{2n}{\sigma^h} = \eta\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^h} \qquad (h = 1, \ldots, 2n)\,.$$

In conclusion, taking account of (30), (31) and (39) the right member of (36) can be expressed in terms of η and φ. Since the terms involving the first derivatives of η cancel each other, relation (36) reduces simply to

$$\text{(40)} \qquad \sum_1^{n-1}{}_p \underset{2n-1;p}{A} = \eta^3 \sum_{\mu<\nu}^{1,\ldots,n} L(z^\mu, z^\nu) = \eta^3\,\mathfrak{L}(\varphi)\,,$$

$L(z^\mu, z^\nu)$ being defined by (37).

Thus, the evaluation of the coefficient of the normal derivative in equation (22) of Sec. 6 is obtained.

9 — The result of the previous Section permits us to derive from (22) the *fundamental relation*

$$\text{(41)} \qquad \Delta_\tau^2 u + \eta^3\,\mathfrak{L}(\varphi)\,\frac{\partial U}{\partial n} = 0$$

where $\Delta_\tau^2 u$, η, $\mathfrak{L}(\varphi)$ are defined by (13), (38), and (40) respectively. This relation constitutes the essential point of my research and includes as special case ($n = 2$) a formula due to E. MARTINELLI[17]).

A remark we made in Sec. 5 about $\Delta_\tau^2 u$ and the definitions (38) and (40) of η and $\mathfrak{L}(\varphi)$ lead us to the conclusion that *equation* (41) *is completely independent on the auxiliary congruences* (s_h) ($h = 1, \ldots, 2n-2$). Therefore it appears as *a relation between the normal derivative* $\dfrac{\partial U}{\partial n}$ *and the assigned function u, in which only the congruence of the curves s, conjugate to the normals n to Φ, is involved.*

[16]) See E. E. LEVI, [3], p. 80.

[17]) E. MARTINELLI, [5], p. 4; [6], p. 160.

We note moreover that the product $\eta^3\,\mathfrak{L}(\varphi)$ depends on Φ, but not on the equation $\varphi = 0$ representing Φ. This result follows immediatly proceeding as in the case $n = 2$[18]).

Now we suppose that $\mathfrak{L}(\varphi)$ does not vanish identically on Φ.

So, if Q is a point of Φ where $\mathfrak{L}(\varphi)$ is different from zero, we have at once

$$\frac{\partial U}{\partial n} = -\frac{\Delta_2^{\frac{1}{2}} u}{\eta^3\,\mathfrak{L}(\varphi)}\,. \tag{42}$$

If on the contrary at point Q of Φ we have $\mathfrak{L}(\varphi) = 0$, a remark by MARTINELLI, which extends immediatly to the actual case, shows that relation (42) is still valid, provided that we substitute to the right member its limit[19]).

In conclusion, taking account of (42), from relation (1) in Sec. 2 and under the same hypotheses on P, Q and r *we obtain the following explicit integral representation of the unknown function*

$$U(P) = \frac{(\eta-2)!}{4\,\pi^n}\int_{\Phi}\left[u(Q)\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{1}{r^{2n-2}} + \frac{\Delta_2^{\frac{1}{2}} u}{\eta^3\,\mathfrak{L}(\varphi)\,r^{2n-2}}\right]d\,\Phi\,. \tag{43}$$

Thus, the aim of the present research is attained.

We wish now to make some remarks concerning relation (41) and the introduced expressions.

We begin by observing that relation (41) has been derived without using some of the hypotheses about the boundary Φ, we have put at the beginning of Sec. 2, which hypotheses refer properly to the existence of a unique solution of DIRICHLET's problem. One can easily realize that relation (41) holds true, more generally, for every primal having only simple points, whose equation $\varphi = 0$ has the left member of class C^2.

Another remark concerns the geometrical meaning of the expressions defined by (37), whose sum, denoted by $\mathfrak{L}(\varphi)$, appears in relation (41).

If $\Phi_{\mu\nu}$ indicates the section of Φ by a generic space $S_4^{\mu\nu}$, parallel to the characteristic space $S_4(x^\mu, x^\nu, x^{n+\mu}, x^{n+\nu})$, it is immediatly seen that *the expression $L(z^\mu, z^\nu)$, when evaluated on $\Phi_{\mu\nu}$, reduces to the ordinary* E. E. LEVI's *invariant relative to $\Phi_{\mu\nu}$ in the section space $S_4^{\mu\nu}$.*

It follows then obviously that $\mathfrak{L}(\varphi)$ *vanishes identically on each primal, whose sections by every $S_4^{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, \ldots, n)$ are always hyper-planoids*[20]).

10 — In the present Section we suppose that the primal Φ is an *hyper-planoid,* namely the analytic locus of ∞^1 $(2n-2)$-dimensional characteristic manifolds.

It is well known that hyper-planoids cannot be closed primals having only simple points[21]). Therefore in this case the hypotheses in Sec. 2 are not satisfied; moreover the case of hyper-planoids is exceptional in relation to DIRICHLET's problem[22]).

[18]) E. MARTINELLI, [6], p. 162.

[19]) E. MARTINELLI, [6], p. 161.

[20]) For the notion and the main properties of hyper-planoids see for instance F. SEVERI, [13], and [14].

[21]) See for example F. SEVERI, [11] and [12].

[22]) See F. SEVERI, [11].

However, from a remark in the previous Section we know that the fundamental relation (41) is valid also in the actual case.

We note now that from the definition of hyper-planoid it follows that *the congruence of the curves s on Φ is normal*[23]). Therefore the expressions

$$\underset{2n-1;p}{A} = \underset{2n-1,2p-1,2p}{\gamma} - \underset{2n-1,2p,2p-1}{\gamma} \qquad (p=1,\ldots,n-1)$$

are all zero[24]); hence equation (40), being $\eta \neq 0$, gives $\mathfrak{L}(\varphi) = 0$.

In conclusion, *if Φ is an hyper-planoid, then expression $\mathfrak{L}(\varphi)$ is identically zero.* Thus an extension to the general case of a well known result concerning Levi's invariant (case $n = 2$) is obtained[25]).

We consider next the expression $\Delta^2_\tau u$, defined by (13) in Sec. 5.

Taking the curves $s = s_{2n-1}$ as coordinate curves ξ^{2n-1} on the hyper-planoid Φ, the characteristic manifolds which constitute Φ are represented by $\xi^{2n-1} = \text{constant}$.

Now a reasoning by Martinelli, which extends obviously to the actual case, leads to the equality[26])

$$(44) \qquad \Delta^2_\tau u = \overset{*}{\Delta}{}^2 u$$

where $\overset{*}{\Delta}{}^2 u$ is Beltrami's differential parameter of the second order, relative to the characteristic manifold $\xi^{2n-1} = \text{constant}$, evaluated with respect to the metric induced on that manifold by the metric of Φ.

Thus the notation we have introduced in Sec. 5 is evidently justified.

Moreover, since on every characteristic manifold, whose Φ is the locus, we have $\overset{*}{\Delta}{}^2 u = 0$ [27]), from (44) it follows that *if Φ is an hyper-planoid, then the expression $\Delta^2_\tau u$ is identically zero.*

This result is in accordance with the identical vanishing of $\mathfrak{L}(\varphi)$ on the hyper-planoid Φ, since, as we have previously remarked, relation (41) is valid also in the actual case.

11 — Our purpose now is to study the behaviour of the expression $\mathfrak{L}(\varphi)$, defined in Sec. 8, in relation with the pseudo-conformal transformations of the real S_{2n}.

Let $\varphi(x^1, \ldots, x^{2n}) = 0$ be the equation representing the primal Φ. Following Wirtinger[28]) we put

$$(45) \quad \begin{aligned} \varphi_p &= \frac{\partial\varphi}{\partial z^p} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^p} - i\frac{\partial\varphi}{\partial x^{n+p}}\right), \qquad \varphi_{\bar p} = \frac{\partial\varphi}{\partial \bar z^q}\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^q} + i\frac{\partial\varphi}{\partial x^{n+q}}\right), \\ \varphi_{\mu\bar\nu} &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\mu\,\partial \bar z^\nu} = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^{n+\mu}\,\partial x^{n+\nu}}\right) - i\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^{n+\mu}\,\partial x^\nu} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^\mu\,\partial x^{n+\nu}}\right)\right], \end{aligned}$$

where $p, q, \mu, \nu = 1, \ldots, n$.

---

[23]) For the case $n = 2$ see E. Martinelli, [6], p. 148.

[24]) T. Levi-Civita, [4], p. 292.

[25]) See for example F. Severi, [13], p. 22.

[26]) E. Martinelli, [6], p. 159.

[27]) For the case $n = 2$ see for example E. Martinelli, [6], p. 161.

[28]) W. Wirtinger, [15], p. 357.

We consider next *the direct pseudo-conformal transformations of the real* $S_{2n}(x^1, \ldots, x^{2n})$, namely the real images of the analytic transformations of the complex $S_n(z^1, \ldots, z^n)$[29]).

They are represented by the equations

$$z^{p'} = z^{p'}(z^1, \ldots, z^n) \qquad (p = 1, \ldots, n), \tag{46}$$

where the $z^{p'}$'s are analytic functions of the z^p's and it is different from zero the determinant $|J|$ of the jacobian matrix

$$J = \left\| \frac{\partial z^{p'}}{\partial z^p} \right\|, \tag{47}$$

the indices p, p' referring to rows and columns respectively.

We consider then the conjugate equations

$$z^{\bar{p}'} = z^{\bar{p}'}(z^{\bar{1}}, \ldots, z^{\bar{n}}) \qquad (\bar{p} = \bar{1}, \ldots, \bar{n}), \tag{$\overline{46}$}$$

relative to the conjugate variables $z^{\bar{p}'}$, $z^{\bar{p}}$ and the jacobian matrix

$$\bar{J} = \left\| \frac{\partial z^{\bar{p}'}}{\partial z^{\bar{p}}} \right\| \tag{$\overline{47}$}$$

under the same convention of (47) about the indices $\bar{p}$, $\bar{p}'$.

Defining in analogy with (45) the derivatives $\varphi_{p'}$, $\varphi_{\bar{q}'}$, $\varphi_{\mu'\bar{\nu}'}$ with respect to the new variables $z^{r'}$, $z^{\bar{r}'}$, we obtain

$$\varphi_{p'} = \frac{\partial z^p}{\partial z^{p'}} \varphi_p; \quad \varphi_{\bar{q}'} = \frac{\partial z^{\bar{q}}}{\partial z^{\bar{q}'}} \varphi_{\bar{q}}; \quad \varphi_{\mu'\bar{\nu}'} = \frac{\partial z^{\mu}}{\partial z^{\mu'}} \frac{\partial z^{\bar{\nu}}}{\partial z^{\bar{\nu}'}} \varphi_{\mu\bar{\nu}}; \tag{48}$$

where it is understood to sum with respect to the dummy indices p, μ; $\bar{q}, \bar{\nu}$ taking the values $1, \ldots, n$; $\bar{1}, \ldots, \bar{n}$ respectively.

Equations (48) show that φ_p, $\varphi_{\bar{q}}$, $\varphi_{\mu\bar{\nu}}$ are *the covariant components in the complex variables* z^r, $z^{\bar{r}}$ *of three tensors*[30]).

After these premises we begin by considering the case $n = 2$.

The expression $\mathfrak{L}(\varphi)$ reduces now to the ordinary LEVI's invariant $L(z^1, z^2)$ which, as we know, may be written[31])

$$L(z^1, z^2) = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_{\bar{1}} & \varphi_{1\bar{1}} & \varphi_{2\bar{1}} \\ \varphi_{\bar{2}} & \varphi_{1\bar{2}} & \varphi_{2\bar{2}} \end{vmatrix}. \tag{49}$$

Introducing then the constant tensors $e^{p\mu}$, $e^{\bar{q}\bar{\nu}}$ [32]), we can write in the form

$$\mathfrak{L}(\varphi) = L(z^1, z^2) = e^{p\mu}\, e^{\bar{q}\bar{\nu}}\, \varphi_p\, \varphi_{\bar{q}}\, \varphi_{\mu\bar{\nu}}. \tag{50}$$

---

[29]) See for example B. SEGRE, [9], p. 383.

[30]) Here and in what follows geometrical quantities of this kind, having ordinary and conjugate indices, are used. We call them simply *tensors*. See for example J. A. SCHOUTEN, [8], p. 51 where these quantities are divided in quantities of the first, of the second kind and hybrid quantities.

[31]) See for example H. BEHNKE-P. THULLEN, [1], p. 29.

[32]) See for example J. A. SCHOUTEN, [8], p. 25.

Since $e^{\nu\mu}$ and $e^{\bar\varrho\bar\tau}$ are relative tensors of weight 1 and anti-weight 1 respectively[33]), it appears clearly from (50) that the E. E. LEVI's classical expression is a pseudo-conformal relative scalar of weight 1 and anti-weight 1 [34]).

Therefore, defining $\mathfrak{L}'(\varphi) = L(z^{1'}, z^{2'})$ in the new variables $z^{r'}$, we have

$$\mathfrak{L}(\varphi) = \mathfrak{L}'(\varphi)\, |J| \cdot |\bar J| \,, \tag{51}$$

where $|J|$ and $|\bar J|$ are the determinants of the matrices (47) and $(\overline{47})$ of the transformations (46) and $(\overline{46})$ respectively, in the case $n = 2$.

12 — We pass now to consider the case $n > 2$.

By means of a suitable example it is simple to realize that *the expression* $\mathfrak{L}(\varphi)$, *defined by* (41), *is no more a pseudo-conformal relative scalar, as it happened in the case* $n = 2$ [35]).

Therefore, in the actual case, introducing the corresponding expression $\mathfrak{L}'(\varphi)$ in the new variables $z^{r'}$, relation (51) *does not hold* for a generic transformation (46).

However, relation (51) may still be valid, also when $n > 2$, if we consider pseudo-conformal transformations of particular kind.

In order to examinate the question, we introduce, in analogy with the case $n = 2$, *the contravariant tensor*

$$T^{\varrho_1 \cdots \varrho_{n-2}\, \bar\tau_1 \cdots \bar\tau_{n-2}} = e^{\nu\mu\varrho_1 \cdots \varrho_{n-2}}\, e^{\bar q \bar\nu \bar\tau_1 \cdots \bar\tau_{n-2}}\, \varphi_\nu\, \varphi_{\bar q}\, \varphi_{\mu\bar\nu} \tag{52}$$

where $e^{\nu\mu\varrho_1 \cdots \varrho_{n-2}}$ and $e^{\bar q\bar\nu\bar\tau_1 \cdots \bar\tau_{n-2}}$ are the usual constant tensors[36]).

If two indices ϱ_h, ϱ_k or $\bar\tau_h$, $\bar\tau_k$ at left member are equal, then the corresponding component of the tensor is zero. If, on the contrary, the indices ϱ_h and $\bar\tau_h$ are all different respectively and we form any permutation of ϱ_h and $\bar\tau_h$ indices separately, we obtain components of tensor (52), which differ at most in the sign.

Moreover, if $\varrho_1 \ldots \varrho_n$ is a permutation of the integers $1, \ldots, n$, we have

$$T^{\varrho_1 \cdots \varrho_{n-2}\, \bar\varrho_1 \cdots \bar\varrho_{n-2}} = L\left(z^{\varrho_{n-1}}, z^{\varrho_n}\right); \tag{53}$$

therefore, in consequence of previous remark, the expression $\mathfrak{L}(\varphi)$, defined by (41), can be written in the form

$$\mathfrak{L}(\varphi) = \frac{1}{(n-2)!} \sum_{\varrho_1 \cdots \varrho_{n-2}}^{1 \ldots n} T^{\varrho_1 \cdots \varrho_{n-2}\, \bar\varrho_1 \cdots \bar\varrho_{n-2}}, \tag{54}$$

the sum referring to the $(n-2)$-permutations $\varrho_1 \ldots \varrho_{n-2}$ (with repetitions) of the n integers $1, \ldots, n$.

Considering now the transformations (46) and putting

$$A_{\varrho'\bar\tau'} = \sum_1^n{}_{\varrho} \frac{\partial z^\varrho}{\partial z^{\varrho'}} \frac{\partial z^{\bar\varrho}}{\partial z^{\bar\tau'}} \qquad (\varrho', \tau' = 1, \ldots, n)\,, \tag{55}$$

we have

$$\sum_{\varrho_1 \cdots \varrho_{n-2}}^{1 \ldots n} T^{\varrho_1 \cdots \varrho_{n-2}\, \bar\varrho_1 \cdots \bar\varrho_{n-2}} = A_{\varrho_1'\bar\tau_1'} \cdots A_{\varrho_{n-2}'\bar\tau_{n-2}'}\, T^{\varrho_1' \cdots \varrho_{n-2}'\, \bar\tau_1' \cdots \bar\tau_{n-2}'}\, |J|\, |\bar J|\,; \tag{56}$$

[33]) See J. A. SCHOUTEN, [8], p. 25. For the notion of anti-weight see p. 12.

[34]) See H. BEHNKE-P. THULLEN, [1], p. 30.

[35]) It suffices to consider the transformation $z^{1'} = 2\,z^1$, $z^{p'} = z^p$ $(p = 2, \ldots, n)$.

[36]) See for example J. A. SCHOUTEN, [8], p. 25.

where it is understood to sum at right member with respect to the dummy indices ϱ'_k, $\bar{\tau}'_k$ taking the values $1, \ldots, n$; $\bar{1}, \ldots, \bar{n}$ respectively.

From (54) and (56) it follows immediatly that *a sufficient condition for the validity of relation* (51) *is given by*

$$\left\| A_{\varrho_k \bar{\tau}'_k} \right\| = I \tag{57}$$

where I denotes the identity matrix.

From (55) we have next $\left\| A_{\varrho'_k \bar{\tau}'_k} \right\| = J^{-1} \bar{J}^{-1}_{-1}$; therefore condition (57) can be written in the equivalent form

$$J \bar{J}_{-1} = I \tag{58}$$

involving the jacobian matrices (47), ($\overline{47}$).

It is easily proved that the transformations (46) satisfying the condition (58) are linear and consequently they are the well known direct pseudo-conformal congruences[37, 38]).

In conclusion, *the expression* $\mathfrak{L}(\varphi)$ *is a relative scalar of weight* 1 *and anti-weight* 1 *with respect to the direct pseudo-conformal congruences.*

References.

[1] H. BEHNKE u. P. THULLEN: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Erg. Math. 3, 3 (1934). — [2] L. P. EISENHART: An introduction to Differential Geometry with use of the tensor calculus. Princeton Univ. Press, Princeton 1947. — [3] E. E. LEVI: Studio sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o più variabili complesse. Ann. di Mat. 3, 17 (1910). — [4] T. LEVI-CIVITA: Lezioni di calcolo differenziale assoluto. Roma: Stock 1925. — [5] E. MARTINELLI: Intorno alla teoria delle funzioni biarmoniche e delle funzioni analitiche di due variabili complesse. Atti II° Congresso U.M.I. 1940. — [6] E. MARTINELLI: Studio di alcune questioni della teoria delle funzioni biarmoniche e delle funzioni analitiche di due variabili complesse con l'ausilio del calcolo differenziale assoluto. Atti Acc. Italia 12 (1941). — [7] G. B. RIZZA: On DIRICHLET's problem for components of analytic functions of several complex variables. Proc. Int. Congress Math., Amsterdam 1954. — [8] J. A. SCHOUTEN: RICCI Calculus. Berlin: Springer 1954. — [9] B. SEGRE: Forme differenziali e loro integrali, I. Roma: Docet 1951. — [10] F. SEVERI: Il problema di DIRICHLET per le funzioni biarmoniche. Mem. Acc. Italia 2, 1 (1931). — [11] F. SEVERI: Contributi alla teoria delle funzioni biarmoniche. Mem. Acc. Italia 2, 5 (1931). — [12] F. SEVERI: Risoluzione generale del problema di DIRICHLET per le funzioni biarmoniche. Rend. Acc. Lincei 6, 13 (1931). — [13] F. SEVERI: Risultati, vedute e problemi della teoria delle funzioni analitiche di due variabili complesse. Rend. Sem. Mat. Univ. Roma 2, 7 (1932). — [14] F. SEVERI: La geometria delle funzioni analitiche di più variabili complesse. Ann. di Mat. 6, 16 (1938). — [15] W. WIRTINGER: Zur formalen Theorie der Funktionen von mehreren komplexen Veränderlichen. Math. Ann. 97 (1927).

(Eingegangen am 23. März 1955.)

[37]) For the notion and the properties of the pseudo-conformal congruences see for example B. SEGRE, [9], p. 374.

[38]) We recall that all transformations characterizing REINHARDT domains, spheroids, CARTAN and HARTOGS domains, which have been considered in the theory of analytic functions of several complex variables, are always belonging to the group of the direct pseudo-conformal congruences.

STELLMACHER, K. L.
Math. Annalen, Bd. 130, S. 219—233 (1955).

Eine Klasse huyghenscher Differentialgleichungen und ihre Integration*).

Von

KARL L. STELLMACHER in Göttingen.

1.

Eine vollständige Integrationstheorie des Cauchyschen Anfangswertproblems linearer hyperbolischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung wurde schon durch die Hadamardschen Untersuchungen [4] gegeben**). Doch ist besonders ein Teilproblem übriggeblieben, das bisher noch seiner Lösung harrt, nämlich die Bestimmung aller „huyghenschen" Differentialgleichungen. Es sind das diejenigen Differentialgleichungen, für die das huyghensche Prinzip im engeren Sinne Gültigkeit besitzt ([4], S. 75). Das heißt, sie haben die Eigenschaft, daß ihre Lösung des Cauchyschen Anfangswertproblems im Punkte P nur von demjenigen Teil der Anfangsdaten und ihrer Ableitungen bis zu einer gewissen Ordnung abhängt, die auf der Schnittmannigfaltigkeit zwischen dem charakteristischen Konoid mit der Spitze in P einerseits und der (raumartigen) Trägerfläche der Anfangsdaten andererseits liegen.

HADAMARD fand, daß es nur huyghensche Differentialgleichungen geben kann mit einer geraden Anzahl von unabhängigen Veränderlichen. Ferner gab er als notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür, daß eine Differentialgleichung huyghensch sei, das Verschwinden des logarithmischen Anteils der Grundlösung an.

Er wies besonders auf die Notwendigkeit hin, alle huyghenschen Differentialgleichungen zu bestimmen ([4], S. 324/325).

Als weiterer Vorstoß gelang M. MATTHISSON [7] im Jahre 1938 der Beweis dafür, daß es unter den linearen hyperbolischen Differentialgleichungen in 4 unabhängigen Veränderlichen mit konstantem Hauptteil keine huyghenschen Differentialgleichungen gibt außer der gewöhnlichen Wellengleichung $u_{tt} - u_{x_1 x_1} - u_{x_2 x_2} - u_{x_3 x_3} \equiv \Box\, u = 0$, und solcher, die durch Trans-

*) Über die Ergebnisse dieser Note ist berichtet in den Proc. Internat. Congr. of Mathem. Amsterdam 1954, Vol. I.

**) Die zahlreichen und z. T. höchst interessanten neueren Lösungswege (z. B. von M. RIESZ) werden hier nicht benutzt. Für Literatur s. etwa A. DOUGLIS: Comm. pure and appl. Math. 7, 271 (1954).— Ferner sei darauf verwiesen, daß der Gleichungstyp (1.1) bzw. (2.2), der in der vorliegenden Note behandelt ist, den Typ der Darbouxschen Differentialgleichung (für $\lambda_i = 0, i \neq 0$; $\lambda_0 \neq 0$) umfaßt. Dadurch ergeben sich Berührungspunkte der vorliegenden Note mit neueren Untersuchungen über diesen Gleichungstyp von DIAZ u. WEINBERGER: Proc. Amer. Math. Soc. 4, 703 (1953); DIAZ u. WEINSTEIN: Studies in Math. and Mech. presented to R. v. MISES. New York 1954, S. 97—103; DIAZ u. LUDFORD, Annali di Mat. pura ed appl. 38, 33 (1955.)

formationen daraus hervorgehen. — Dieser Beweis wurde später von HADAMARD dadurch vereinfacht, daß sein oben erwähntes Kriterium benutzt wurde [5]. Ich selbst fand kürzlich ein Beispiel [8] einer huyghenschen Differentialgleichung in 6 unabhängigen Veränderlichen. In der folgenden Note werden weitere Beispiele huyghenscher Differentialgleichungen bei einer Variablenanzahl von $n \geqq 6$ mitgeteilt. Der huyghensche Charakter dieser Differentialgleichungen wird an einer explizit zu gewinnenden Lösungsformel abgelesen werden können. Deren Konstruktion erfolgt so, daß dabei der ausgezeichnete Charakter dieser Klasse von Differentialgleichungen hervortritt. Das gelingt mit Hilfe des *Mittelwertsatzes* von ASGEIRSSON [2][1]), der sich als unserer Problemstellung besonders angemessen erweist.

Im einzelnen wird folgender Satz bewiesen: Die Differentialgleichungen der Gestalt

$$(1.1) \qquad \left(u_{tt} + \frac{\lambda_0}{t^2} u\right) - \sum_{i=1}^{m} \left(u_{x_i x_i} + \frac{\lambda_i}{x_i^2} u\right) = 0$$

sind dann und nur dann huyghensch, wenn gilt:

$$1;1) \quad m + 1 \text{ gerade}$$

$$1;2) \quad -\lambda_i = \nu_i(\nu_i + 1); \qquad \nu_i = 0, 1, 2, \ldots$$

$$1;3) \quad \sum_{i=0}^{m} \nu_i \leqq \frac{m-3}{2}.$$

Bei der Durchführung der Integration beschränken wir uns auf die Voraussetzungen 1), 2) und beweisen, daß 3) dann notwendig und hinreichend für huyghensches Verhalten der betreffenden Differentialgleichung ist. Im letzten Abschnitt wird die Grundlösung nach HADAMARD konstruiert, wobei sich dann ergibt, daß für keine anderen Werte der λ_i als die eben angegebenen die Differentialgleichungen (1) huyghensch sind.

2. Transformationstheorie.

Um den Mittelwertsatz von ASGEIRSSON auf (1.1) anwenden zu können, ist es zweckmäßig, die folgende Transformation durchzuführen: setze $\lambda_i = -\nu_i(\nu_i + 1)$; $i = 0, 1, 2, \ldots, m$ $\left(\text{vorausgesetzt, daß } \frac{1}{4} - \lambda_i \geqq 0\right)$,

$$(2.1) \qquad u = \bar{u} \prod_{i=0}^{m} x_i^{\nu_i + 1},$$

so erhält man aus (1.1), wenn man nachträglich wieder u für $\bar{u}$ schreibt:

$$(2.2) \quad \sum_{i=0}^{m} g_{ii}\left(u_{x_i x_i} + \frac{2\nu_i + 2}{x_i} u_{x_i}\right) = 0; \quad g_{00} = 1;\ g_{ii} = -1;\ i \neq 0;\ x_0 \equiv t.$$

Daß diese Differentialgleichung dann und nur dann in die triviale Wellengleichung transformiert werden kann, wenn alle $\nu_i = 0$ oder 1 sind $\left(\text{Glieder von der Gestalt } \frac{2}{x_i} u_{x_i} \text{ lassen sich also wegschaffen}\right)$, erhellt aus folgendem

[1]) Vgl. auch [3], S. 417ff.

Satz: *Jede Differentialgleichung der Gestalt*

$$\square\, u + c(x)\, u = \sum_{i=0}^{m} g_{ii}\, u_{x_i x_i} + c(x)\, u = 0 \quad (c(x) \text{ stetig in } \mathfrak{G}(x)) \tag{2.3}$$

kann in $\mathfrak{G}(x)$ dann und nur dann durch Koordinatentransformation $\bar{x}_i = f_i(\bar{x})$, Multiplikation der unbekannten Funktion mit nicht verschwindendem Skalar $u = \mu(x)\,\bar{u}$ und Multiplikation der Gleichung mit einem nicht verschwindenden Skalar $\lambda(x)$ auf die „triviale Form“ $\square\, u = 0$ gebracht werden, wenn $c(x) = 0$ gilt. (Vorausgesetzt wird, daß die „zulässigen“ Transformationsfunktionen $f_i(\bar{x})$, $\lambda(x)$, $\mu(x)$ in $\mathfrak{G}$ zweimal stetig differenzierbar sind und daß dort $\left\| \frac{\partial f_i}{\partial \bar{x}_k} \right\| \neq 0$, $\lambda(x) \neq 0$, $\mu(x) \neq 0$.) Der Beweis dieses Satzes ergibt sich zunächst aus der Bemerkung, daß die Differentialgleichungen $\square\, u = 0$ und (2.3) selbstadjungiert sind, so daß man also nur solche Transformationen zuzulassen braucht, die den selbstadjungierten Charakter der Differentialgleichung bei koordinateninvarianter Schreibweise erhalten: nämlich neben Koordinatentransformationen die Transformationen

$$g_{ii} = \lambda(x)\, g_{ii};\; u = \lambda^{-\frac{m-1}{4}}\, \bar{u}\,;\; c = \frac{1}{\lambda}\,\bar{c}\,;\; \square\, u \to \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \sum_{i=0}^{m} (\bar{g}^{ii} \sqrt{\bar{g}}\; \bar{u}_{x_i})_{x_i} \tag{2.4}$$

vgl. (2.8a).

Ferner aus jenem verallgemeinerten „Satz von LIOUVILLE“: Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine quadratische Differentialform

$$d\, s^2 = \lambda(x) \sum_{i=0}^{m} \mathring{g}_{ii}(d\, x_i)^2; \quad (\mathring{g}_{ii} = \pm 1; \quad \text{Vorauss. über } \lambda(x),\ f_i \text{ wie oben}) \tag{2.5}$$

in $\mathfrak{G}$ durch Koordinatentransformation auf die pseudoeuklidische Normalform

$$d\, \bar{s}^2 = \Sigma\, \mathring{g}_{ii}(d\, \bar{x}_i)^2 \tag{2.6}$$

gebracht werden kann, ist, daß λ die Gestalt besitzt

$$\text{entweder } \lambda = A^2 \left(\sum_{0}^{m} \mathring{g}_{ii}(x_i - a_i)^2 \right)^{-2} \qquad (A,\ a_i \text{ const.}) \tag{2.7a}$$

$$\text{oder} \quad \lambda = A^2 \left(\sum_{0}^{m} b_i(x_i - a_i) + 1 \right) \qquad (A,\ a_i,\ b_i \text{ const};\ \Sigma\, \mathring{g}_{ii} b_i b_i = 0). \tag{2.7b}$$

Die Transformationen, die das leisten, bezeichnet man als die allgemeine konforme Gruppe, bestehend aus den Inversionen

$$\text{a) } x_i = \frac{\bar{x}_i}{\Sigma\, \mathring{g}_{ii}\, \bar{x}_i \bar{x}_i} \qquad \text{b) } x_i = \frac{\bar{x}_i - \frac{1}{2} b_i\, \Sigma\, \mathring{g}_{\nu\nu}\, \bar{x}_\nu \bar{x}_\nu}{(1 - \Sigma\, b_\nu x_\nu)} \tag{2.8}$$

sowie den Ähnlichkeiten und den „Bewegungen“, d. h. allen Transformationen, die die Gestalt (2.6) der Metrik erhalten. Dabei ist noch zu bemerken, daß der Faktor (2.7b) durch (2.8b) oder durch zwei passende aufeinander folgende Inversionen weggeschaft werden kann[2]).

Der Metrik (2.5) wird man die Differentialgleichung

$$\bar{\square}\, \bar{u} + \bar{c}(x)\, \bar{u} = 0$$

---

[2]) HAANTJES: Conformal representations of an n-dimensional euclidean space with a nondefinite fundamental form on itself. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. Amsterdam 40, 700—705 (1937). — Siehe auch: SCHOUTEN, STRUIK: Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie, Bd. II, Groningen 1938, S. 205—210.

zuordnen, wobei $\overline{\Box}$ den zur Metrik $\bar{g}_{ik} = \lambda\, \dot{g}_{ik}$ gehörigen Beltramischen Operator bedeutet [vgl. (2.4)]

$$\overline{\Box}\, u = \sum_i \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \left(\sqrt{\bar{g}}\, \bar{g}^{ii}\, \bar{u}_{x_i}\right)_{x_i} = \sum_{i=0}^{m} \lambda^{-\frac{m+1}{2}} \left(\dot{g}_{ii}\, \lambda^{\frac{m-1}{2}} \left[u \cdot \lambda^{-\frac{m-1}{4}}\right]_{x_i}\right)_{x_i} \tag{2.8a}$$

Speziell mit λ aus (2.7a) und (2.8a) erhält man so das Transformationsgesetz für den Koeffizienten $c(x)$: $\bar{c}(\bar{x}) = (\Sigma\, \dot{g}_{ii}\, \bar{x}_i^2)^{-2} \cdot c\left(\frac{\bar{x}_i}{\Sigma\, g_{\nu\nu}\, \bar{x}_\nu^2}\right)$. Man kann also (1) auf die allgemeine Gestalt

$$\mathfrak{L}u \equiv \Sigma\, \dot{g}_{ii} \left(u_{x_i x_i} + \frac{\alpha_i}{(A_i(x, x) + 2(a_i, x) + K_i)^2}\, u\right) = 0; \qquad (a_i, x) = \Sigma\, \dot{g}_{\nu\nu}\, a_{i\nu}\, x_\nu \tag{2.9}$$

bringen, wobei die $(m + 1)$ „Sphären“ $A_i(x, x) + 2(a_i, x) + K_i = 0$ $(i = 0, 1, \ldots m)$ a) mindestens einen reellen allen Sphären gemeinsamen Schnittpunkt ξ_i besitzen und b) die Bedingung erfüllen müssen, daß sie paarweise zueinander orthogonal sind im Sinne der indefiniten Metrik, d. h. es muß erfüllt sein

b) $$(a_i, a_k) - A_i K_k - A_k K_i = 0 \quad (i \neq k),$$

weil die Koordinatenebenen, aus denen diese Sphären hervorgegangen sind, diese invarianten Bedingungen erfüllen. Daß a), b) hinreicht, erkennt man, wenn man den Schnittpunkt ξ_i aller Sphären zum Nullpunkt der Inversion (2.8a) wählt. Durch die Transformation (2.8b) wird dieser Sachverhalt nicht geändert.

3.

Ein Integral über das Innere der Kugel $\mathfrak{K}_q$: $\Sigma\, \xi_i^2 = \mathfrak{R}^2$ ist auszuwerten unter der Voraussetzung, daß der Integrand nur abhängt von dem (euklidischen) Abstand des Argumentpunktes $\mathfrak{x}$ zum Ursprung des Koordinatensystems O, der im allgemeinen nicht mit dem Mittelpunkt von $\mathfrak{K}_q$ zusammenfallen soll.

$$J_q = \underset{\Sigma \xi_i^2 \le R^2}{\int \cdots \int} u(\mathfrak{x}_0 + \xi)\, d\,\xi_1 d\,\xi_2 \ldots d\,\xi_q; \qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \xi;\ x = |\mathfrak{x}| \quad u(\mathfrak{x}_0 + \xi) \equiv u(x). \tag{3.1}$$

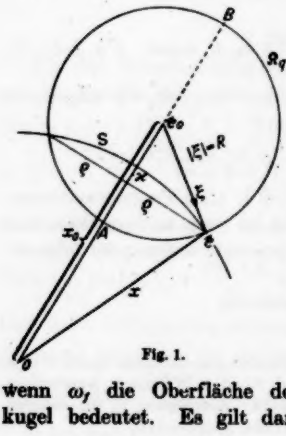

Fig. 1.

Man lege durch den Ursprung O und den Mittelpunkt $\mathfrak{x}_0$ der Kugel $\mathfrak{K}_q$ eine zweidimensionale Ebene, die in Fig. 1 gezeichnet ist. Man wird dann erst bei konstantem x, wobei ja auch u konstant bleibt, integrieren. Dabei erhält man als Faktor dasjenige Oberflächensegment S der q-dimensionalen Kugel x = const, das innerhalb der Kugel $\mathfrak{K}_q$ liegt. Mit den aus der Figur zu entnehmenden Bezeichnungen erhält man dann

$$S = \int \varrho^{q-2} \cdot \omega_{q-1}\, d\,s = \omega_{q-1}\, x \int_0^k \varrho^{q-3}\, dk,$$

wenn ω_f die Oberfläche der f-dimensionalen Oberfläche der Einheitskugel bedeutet. Es gilt dann (s. Fig. 1) $\varrho^2 = x^2 - (x - k)^2 = 2\,k\,x - k^2$,

also

$$S = \omega_{q-1} x \int_0^k [k(2x-k)]^{\frac{q-\circ}{2}} dk. \tag{3.2}$$

Dieser Ausdruck ist, im Falle daß q ungerade ist, ein Polynom in k, andernfalls eine irrationale Funktion von k. Setzen wir also in dem hier besonders interessierenden 1. Falle $\frac{q-3}{2} = \nu$ (ν ganz), so erhalten wir

$$S_{2\nu+1} = \omega_{q-1}\, x \cdot k^{\nu+1} \sum_{j=0}^{\nu} (2x)^{\nu-j} (-k)^j \frac{1}{j+\nu+1} \binom{\nu}{j}. \tag{3.3}$$

Hierin ist zu setzen

$$k = \frac{R^2 - (x-x_0)^2}{2x_0}.$$

Daher ist auch $S_{2\nu+1}$ ein Polynom vom Grade $(2\nu+1)$ in R^2. Damit erhält man für (2)

$$J_q = \int_{x_0-R}^{x_0+R} u(x)\, S_{2\nu+1}(R^2;\, x, x^0)\, dx. \tag{3.4}$$

Entsprechend werten wir auch das Oberflächenintegral

$$\mathfrak{J}_q = \int_{\Sigma \xi_i = R^2} \cdots \int u(\mathfrak{x}_0 + \xi)\, dO_q = \int \cdots \int u(x)\, R^{q-1} d\,\omega_q;\quad x = |\mathfrak{x}_0 + \xi| \tag{3.5}$$

aus unter derselben Voraussetzung bezüglich u wie oben (O_q ist die Oberfläche der Kugel $\mathfrak{K}_q$, ω_q die Oberfläche der q-dimensionalen Einheitskugel). Dazu benutzen wir die Zerlegungsformel für das $(f-1)$-dimensionale Oberflächenintegral über die Kugel

$$\begin{aligned}
&\int_{\Sigma \xi_i^2 + \Sigma \eta_i^2 = R^2} \cdots \int u(\xi_i, \eta_i)\, dO_f \\
&= \int \cdots \int \frac{R\, d\xi_1 \cdots d\xi_p}{\sqrt{R^2 - \Sigma \xi_i^2}} \int \cdots \int \frac{\sqrt{R^2 - \Sigma \xi_i^2}\, u(\xi_\nu, \eta_\nu)}{\sqrt{R^2 - \Sigma \xi_i^2 - \Sigma \eta_i^2}}\, d\eta_1\, d\eta_2 \ldots d\eta_{f-p-1} \\
&= \int_{\Sigma \xi_i^2 \le R^2} \cdots \int d\xi_1 \ldots d\xi_p\, (R^2 - \Sigma \xi_i^2)^{\frac{f-p-2}{2}} \int \cdots \int u\, d\,\omega_{f-p},
\end{aligned} \tag{3.6}$$

die wir auch später noch brauchen werden, jetzt nur für den Fall $p = 1$; $f = q$. Wir führen in der $(q-2)$-dimensionalen Oberfläche der Schnittkugel zwischen $\mathfrak{K}_q$ und $x = \text{const}$ die Integrationen durch:

$$\mathfrak{J}_q = \int \varrho^{q-2} u(x)\, ds \oint d\omega_{q-1},\ \text{wo}\ \oint d\omega_{q-1} = \omega_{q-1}\ \text{und}\ ds = \frac{d\xi_1}{\sqrt{R^2 - \xi_1^2}} \tag{3.5a}$$

die Bogenlänge etwa des in der Figur gezeichneten Meridians $A - B$ von $\mathfrak{K}_q$ bezeichnet: $ds = R/\varrho\; x/x_0\, dx$; ferner gilt

$$\begin{aligned}
\{-\varrho^2\}^{\frac{1}{2}(q-3)} &= \left\{\frac{1}{4x_0^2}\,[(x_0+x)^2 - R^2]\,[(x_0-x)^2 - R^2]\right\}^{\frac{1}{2}(q-3)} \\
&= \left\{\frac{1}{4x_0^2}\,[(x_0+R)^2 - x^2]\cdot[(x_0-R)^2 - x^2]\right\}^{\frac{1}{2}(q-3)} = P_{q-3}(R_i^2 x, x_0).
\end{aligned}$$

So erhält man schließlich für (3.5a) die beiden Formeln

$$\mathfrak{Z}_q = 2\frac{R}{x_0}\,\omega_{q-1}\int\limits_{x_0-R}^{x_0+R} u(x)\,\varrho^{\frac{p-3}{2}}\,x\,dx = \frac{2R}{x_0}\,\omega_{q-1}\int\limits_{x_0-R}^{x_0+R} u(x)\,P_{q-3}(R^2;\,x,x_0)\,x\,dx$$

(3.6a)

oder auch

$$(3.6\text{b})\quad \mathfrak{Z}_q = \frac{R}{x_0}\,\omega_{q-1}\int\limits_{(x_0-R)^2}^{(x_0+R)^2} u(\sqrt{\chi})\left[\frac{((x_0+R)^2-\chi)\cdot((x_0-R)^2-\chi)}{4x_0^2}\right]^{\frac{p-3}{2}} d\chi;\quad \chi = x^2.$$

Im Falle daß q ungerade ist $\left(\frac{q-3}{2} = \nu\right)$, ist der Integrand ein Polynom P_{q-3} vom Grade 2ν bezüglich R^2.

4. Lösung des Cauchyschen Anfangswertproblems.

Es sei nun das Cauchysche Anfangswertproblem gestellt, eine zweimal stetig differenzierbare Lösung der Differentialgleichung (2.2) zu finden, die für $t = \vartheta$ ($\vartheta \neq 0$) die Werte annimmt

$$(4.1)\qquad (U)_{t=\vartheta} = \varphi(\mathfrak{x});\ (u_t)_{t=\vartheta} = \psi(\mathfrak{x});\ \varphi \in C_{\frac{m+3}{2}};\ \psi \in C_{\frac{m+1}{2}} \text{ in } \mathfrak{G}$$

$(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \mathfrak{x}$ gesetzt, C_f bezeichnet die Menge aller $f$mal stetig differenzierbaren Funktionen.

Ferner wird vorausgesetzt, daß derjenige kompakte Bereich $\mathfrak{B}(x)$ $\mathfrak{B} \in \mathfrak{G}$, der von $t = \vartheta$ einerseits und dem charakteristischen Kegel mit der Spitze im Punkt P, in dem die Lösung bestimmt werden soll, andererseits begrenzt wird, keine Punkte der singulären Ebenen $x_i = 0$ ($2\nu_i + 2 \neq 0$) enthalten soll.

Nach bekannten Sätzen existiert in $\mathfrak{B}$ genau eine Lösung des Problems. Um diese zu berechnen, benutzen wir den *Satz von* ASGEIRSSON [1]: *Jede Lösung $u(\mathfrak{x}, \mathfrak{t})$ der Differentialgleichung*

$$(4.2)\qquad \sum_{i=1}^{l} u_{x_i x_i} = \sum_{i=1}^{l} u_{t_i t_i},$$

die für $(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0)^2 \leq r^2$ und für $(\mathfrak{t}-\mathfrak{t}_0)^2 \leq r^2$ von der Klasse C_2 ist, erfüllt den Integralsatz

$$(4.3)\qquad \int\cdots\int u(\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{a}\,r, \mathfrak{t}_0)\,dO_q = \int\cdots\int u(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{t}_0 + \mathfrak{a}\,r)\,dO_q.$$

Dabei wird beide Male integriert über die Oberfläche O_q der q-dimensionalen Kugel $(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0)^2 = r^2$ bzw. $(\mathfrak{t}-\mathfrak{t}_0)^2 = r^2$.

Wir beschränken uns zunächst auf den Fall der Differentialgleichung

$$(4.5)\qquad u_{tt} + \frac{2\lambda+2}{t}\,u_t = \sum_{i=1}^{q_1} u_{x_i x_i} + \left(u_{yy} + \frac{2\mu+2}{y}\,u_y\right) + \left(u_{zz} + \frac{2\nu+2}{z}\right).$$

Die Verallgemeinerung auf die Gl. (2.2) wird sich dann sehr selbstverständlich ergeben.

Um hierauf (4.3) anwenden zu können, beachte man, daß etwa jede Lösung der Differentialgleichung (4.5) auch Lösung der ultrahyperbolischen Differentialgleichung

$$(4.6)\qquad \sum_{i=1}^{f} u_{t_i t_i} = \sum_{i=1}^{q_1} u_{x_i x_i} + \sum_{i=1}^{q_2} u_{y_i y_i} + \sum_{i=1}^{q_3} u_{z_i z_i}; \quad q_1 + q_2 + q_3 = f$$

ist, wenn

$$(4.7)\qquad y^2 = \sum_1^{q_2} y_i^2;\quad z^2 = \sum_1^{q_3} z_i^2;\quad t^2 = \sum_1^{q_t} t_i^2;\quad q_2 = 2\mu + 3,\quad q_3 = 2\nu + 3,$$

$$q_t = 2\lambda + 3;\ q_1 = m - 2$$

gesetzt wird[3]). Umgekehrt erfüllt jede Lösung von (4.6), die bezüglich y_i, z_i, t_i nur von y, z, t abhängt, und von $t_{q_t+1}, \ldots, t_f$ überhaupt nicht, auch die Differentialgleichung (4.5). Demgemäß schreiben wir den Mittelwertsatz (4.3) noch einmal in der Gestalt:

$$(4.8)\qquad \begin{aligned} &\int\limits_{\Sigma \tau_i^2 = R^2} \cdots \int u(\mathfrak{t}_0 + \tau; \mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0, \mathfrak{z}_0)\, d_\tau O_f \\ &= \int\limits_{\Sigma \xi_i^2 + \Sigma \eta_i^2 + \Sigma \varphi_i^2 = R^2} \cdots \int u(\mathfrak{t}_0; \mathfrak{x}_0 + \xi, \mathfrak{y}_0 + \eta, \mathfrak{z}_0 + \varphi)\, d_{\xi,\eta,\varphi} O_f = \mathfrak{J}. \end{aligned}$$

Das Integral auf der rechten Seite zerlegen wir nach Formel (3.6)

$$\mathfrak{J} = \int \cdots \int \frac{d\xi_1\, d\xi_2 \ldots dq_1\, d\eta_1 \ldots d\eta_{q_2}}{\sqrt{R^2 - \varrho_1^2 - \varrho_2^2}} \cdot R \int \cdots \int \underline{u(\mathfrak{t}_0;\ x, y, z)\, d_\varphi O_{q_3};}$$

$$\varrho_1^2 = \Sigma \xi_i^2;\ \varrho_2^2 = \Sigma \eta_i^2 \qquad r^2 = R^2 - \varrho_1^2 - \varrho_2^2;\ r_1^2 = R^2 - \varrho_1^2.$$

Hier können wir das innere unterstrichene Oberflächenintegral ausintegrieren, weil u bezüglich der Variablen φ_i nur von z abhängt. Einsetzen der Formeln (3.5), (3.6) liefert

$$\mathfrak{J} = 2\frac{\varepsilon R}{z_0}\, \omega_{q_3-1} \int \cdots \int d\xi_1 \cdots d\xi_{q_1}\, d\eta_1 \cdots d\eta_{q_2} \int\limits_{z_0 - r}^{z_0 + r} u(\mathfrak{t}_0;\ \mathfrak{x}_0 + \xi, \mathfrak{y}_0 + \eta, z) \times$$

$$\times \{[(z_0 + z)^2 - r^2]\, [r^2 - (z_0 - z)^2]\}^{\frac{q_3 - 2}{2}}\, z\, dz.$$

Jetzt können wir weiter nach der anderen Hilfsformel (3.2) und (3.4) die Integration nach den η_i durchführen und erhalten für dasselbe

---

[3]) Der Lösungsweg, der hier eingeschlagen wird, bedeutet also eine Einbettung unserer Differentialgleichung in einen Raum mit der Metrik $d\sigma^2 = \sum^{f} dt_i^2 - \sum^{q_1} dx_i^2 - \sum^{q_2} dy_i^2 - \sum^{q_3} dz_i^2$. Eine ähnliche Einbettung ist übrigens bei jeder linearen Differentialgleichung 2. Ordnung möglich. Dieser Gesichtspunkt läßt es aussichtsreich erscheinen, auf ähnliche Weise weitere huyghensche Gleichungen zu suchen.

Integral

$$(4.9)\quad \mathfrak{Z} = \frac{2R}{z_0}\,\omega_{q_s-1}\,\omega_{q_s-1}\int\cdots\int_{\Sigma\xi_i^2\le R^2} d\xi_1\cdots d\xi_{q_s}\int_{y_0-r}^{y_0+r_1}\cdot\int_{z_0-r}^{z_0+r} u(t_0;\,\mathfrak{x}_0+\xi,y,z)\,\times$$

$$\times\, S_{2\mu+1}(r^2;\,y,y_0)\cdot P_{2\nu}(r_1^2,z,z_0)\,dy\,dz.$$

Wir merken insbesondere an, daß dies ein Integral ist über $\Sigma\,\xi_i^2+(z-z_0)^2+$ $+(y-y_0)^2\le R^2$. Da $S_{2\mu+1}$ und $P_{2\nu}$ Polynome in r_1^2 bzw. r^2 und also in R^2 sind, so geht das Integral $\mathfrak{Z}/R$ nach $2\mu+1+2\nu+1$-maliger Differentiation nach R^2 in ein Oberflächenintegral über.

Auf der linken Seite des Mittelwertsatzes (4.8) integriere man zunächst nach allen Veränderlichen t_i, von denen die Unbekannte u nicht abhängt:

$$\mathfrak{Z} = \omega_{f-q_t}\,R\int\cdots\int_{\Sigma\tau_i^2\le R^2} d\tau_1\ldots d\tau_{q_t}(R^2-\Sigma\,\tau_i^2)^{\frac{f-q_t-2}{2}}\;u(t_0+\tau;\,\mathfrak{x}_0,\mathfrak{y}_0,\mathfrak{z}_0).$$

Dann differenziere man die Gleichung $\frac{f-q_t}{2}$ mal nach R^2. Danach bleibt links das Oberflächenintegral über die q_t-dimensionale Kugel

$$\left(\frac{\partial}{\partial R^2}\right)^{\frac{f-q_t}{2}}\mathfrak{Z}/R = \omega_{f-q_t}\left(\frac{f-q_t-2}{2}\right)!\int\cdots\int_{\Sigma\tau_i^2=R^2} u(t;\,\mathfrak{x}_0,\mathfrak{y}_0,\mathfrak{z}_0)\,d_\tau O_{q_t}.$$

Hierauf kann man direkt die Hilfsformel (3.5) und (3.6b) anwenden und erhält

$$\left(\frac{\partial}{\partial R^2}\right)^{\frac{f-q_t}{2}}\mathfrak{Z}/R = \left(\frac{f-q_t-2}{2}\right)!\;\;\omega_{f-q_t}\cdot\omega_{q_t-1}\,R/\vartheta\int_{(\vartheta-R)^2}^{(\vartheta+R)^2} u\,\sqrt{T}\,\times$$

$$\times\,\{[(\vartheta+R)^2-T]\,[(\vartheta-R)^2-T]\}^{\frac{q_t-3}{2}}\,dT.$$

Diese Gleichung ist eine Volterrasche Integralgleichung 1. Art zur Bestimmung von $u(\vartheta,R;\,\mathfrak{x}_0,\mathfrak{y}_0,\mathfrak{z}_0)$.

Man beachte, daß diese Gleichung eine Identität in ϑ *und* R darstellt. Setzt man demgemäß

$$(\vartheta+R)^2=\alpha;\;\;(\vartheta-R)^2=\beta;\;\;\vartheta=\tfrac{1}{2}\,(\alpha^{1/2}+\beta^{1/2}),\;\;R=\tfrac{1}{2}\,(\alpha^{1/2}-\beta^{1/2}),$$

so erhält man

$$(4.10)\quad \left(\frac{\partial}{\partial R^2}\right)^{\frac{f-q_t}{2}}\mathfrak{Z}/R = \left(\frac{f-q_t-2}{2}\right)!\;\;\omega_{f-q_t}\cdot\omega_{q_t-1}\cdot R/\vartheta\int_\beta^\alpha u\,\sqrt{T}\,\times$$

$$\times\,\{(\alpha-T)\,(\beta-T)\}^{\frac{q_t-3}{2}}\,dT.$$

Dann ist die Gleichung (4.10), nachdem darin auch links R und ϑ durch α und β ausgedrückt sind, eine Identität in α und β, die als voneinander unabhängig angesehen werden dürfen. Daher kann man (4.10) bei festgehaltenem β nach α differenzieren. So erhält man die Lösungsformel

$$(4.11)\qquad (4\vartheta R)^{\frac{q_t-3}{2}} \cdot u(\vartheta + R) = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^{\frac{q_t-1}{2}} \vartheta/R \left(\frac{\partial}{\partial R^2}\right)^{\frac{f-q_t}{2}} \times$$
$$\times \mathfrak{J}/R \cdot \omega_{f-q_t} \cdot \omega_{q_t-1} \cdot \left(\frac{f-q_t-2}{2}\right)!$$

Hierin denke man noch

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{1}{4(\vartheta + R)} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\partial}{\partial R}\right)$$

eingesetzt (das ist die Differentiation in Richtung der Bicharakteristik durch P)[4]). Durch den Kunstgriff, ϑ und R als voneinander unabhängige Variablen zu benutzen, ist es hier im Gegensatz zu Asgeirsson [2], S. 343 (vgl. auch Courant-Hilbert [3], S. 421) möglich, sofort die Lösung für allgemeine Anfangswerte hinzuschreiben.

Aus der Formel (4.11) liest man das huyghensche Verhalten der Differentialgleichung (4.5) ab, wofern f und q_t ungerade sind und wofern gilt

$$(4.12)\qquad \frac{1}{2}\,(f - q_t) \geq 2\,(\mu + \nu + 1),$$

d. h. nach (4.6) und (4.7): $\frac{1}{2}\,(q_1 + q_2 + q_3 - q_t) = \mu + \nu - \lambda + \frac{1}{2}\,(m - 2 + 3) \geq$ $\geq 2(\mu + \nu + 1)$, also

$$(4.13)\qquad \frac{1}{2}\,(m - 3) \geq \mu + \nu + \lambda$$

in Übereinstimmung mit Voraussetzung 3) der Einleitung. Dies Ergebnis kann man nun leicht verallgemeinern von der Gl. (4.5) auf Gl. (2.2). Man hat dann nämlich, falls in (2.2) noch mehr Glieder $\frac{2\nu_i + 2}{x_i^1}\, u_{x_i}$ hinzutreten, in Gl. (4.9) die Integration der Hilfsformel (3.4) mehrmals anzuwenden. Man erhält dann unter dem Integral in (4.9) das Polynom $P_{2\nu_0} \cdot S_{2\nu_1+1} \cdot S_{2\nu_2+1} \cdots S_{2\nu_l+1}$ vom Grad $\sum\limits_{i=0}^{l} (2\,\nu_i + 1) - 1$. Anstatt (4.13) erhält man dann als Bedingung für huyghensches Verhalten mit den Bezeichnungen

$$q_i = 2\,\nu_i + 3;\ f = \sum_{i=1}^{l} q_i + m - l$$

$$(4.14)\qquad \frac{1}{2}\,(m - 3) \geq \sum_{i=0}^{l} \nu_i,$$

wie behauptet war.

---

[4]) Die Lösungsformel bleibt auch anwendbar im Fall $\lambda = \frac{1}{2}\,(q_t - 3) = 0$, allerdings muß man eventuell durch eine Transformation (2.1) dafür sorgen, daß das Glied $\frac{2}{t^2}\, u_t$ vorhanden ist.

5.

Um nun weiterhin den Beweis zu erbringen, daß für die Differentialgleichungen

$$(1.1)\qquad \sum_{i=0}^{m} g_{ii}\left(u_{x_i x_i} - \frac{\lambda_i}{x_i^2} u\right) = 0;\ g_{00} = +1;\ g_{ii} = -1 \text{ für } i \neq 0$$

die in der Einleitung angegebenen Bedingungen 1), 2), 3) notwendig und hinreichend dafür sind, daß (1.1) huyghensch ist (bisher war 1) und 2) ja vorausgesetzt), wird die Hadamardsche Grundlösung in der Gestalt

$$(5.1)\qquad \text{a) } u = \frac{\mathfrak{U}}{\Gamma^{\frac{m-1}{2}}} \text{ (m gerade)};\quad \text{b) } u = \frac{\mathfrak{U}}{\Gamma^{\frac{m-1}{2}}} + W \lg \Gamma \text{ (m ungerade)}$$

$$p = \frac{m-1}{2};\ \Gamma = \sum_{i=0}^{m} g_{ii}(x_i - a_i)^2$$

explizit berechnet. Diese Konstruktion der Grundlösung scheint mir jedoch auch an sich von Interesse zu sein, weil sich dabei eine vielleicht überraschende Anwendungsmöglichkeit der Theorie der hypergeometrischen Funktionen in mehreren Veränderlichen ergibt.

Notwendig und hinreichend für huyghensches Verhalten ist nach Hadamard das Verschwinden des logarithmischen Anteils W in (5.1) unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{U}$ und W als Potenzreihen in Γ mit Koeffizienten, die von x_i und a_i abhängen dürfen, gegeben sind.

Zur Durchführung der Konstruktion sehen wir die x_i und a_i als voneinander unabhängige Koordinaten in $\mathfrak{G}(x, a)$[5] an und machen die in diesen $2(m+1)$ Veränderlichen nicht-singuläre Transformation:

$$(5.2)\qquad z_i = \frac{g_{ii}\Gamma}{4\, a_i x_i};\ y_i = g_{ii}\frac{a_i}{x_i}\Gamma;\ x_i^2 = \frac{\Gamma^2}{z_i y_i};\ a_i^2 = \frac{y_i}{z_i}.$$

Da sich Γ als Funktion von y_i und z_i leicht berechnen läßt aus der Gleichung

$$\Gamma = \sum_{i=0}^{m} \pm (a_i^2 + x_i^2 - 2 a_i x_i) = \sum_{i=0}^{m}\left(\frac{y_i}{z_i} + \frac{\Gamma^2}{y_i z_i} - 4\frac{\Gamma}{z_i}\right) g_{ii}, \text{ wenn nur } \sum \frac{g_{ii}}{y_i z_i} \neq 0,$$

ist die Transformation wirklich nicht-singulär, solange

$$(5.2\text{a})\qquad \Gamma \neq 0;\ \sum_{i=0}^{m} g_{ii} x^2 \neq 0;\ x_i \neq 0;\ a_i \neq 0 \qquad (i = 0, 1, .., m).$$

Zur Bestimmung der Grundlösung (5.1) machen wir den Ansatz

$$(5.3)\qquad u = \Gamma^{-p} \cdot \mathfrak{U}(z).$$

---

[5]) $\mathfrak{G}(x, a)$ sei ein offener Bereich des Raumes der $2(m+1)$ Variabeln x_i, a_i, der keine Punkte der $2(m+1)$ Hyperebenen $x_j = 0$ oder $a_j = 0$ enthalte.

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung (1) erhält man

$$\mathfrak{L}\,u \equiv \Gamma^{-(p+1)}\,\Sigma g_{jj}\,y_j z_j\left\{\mathfrak{U}_{z_j z_j} z_j^2 - \sum_\mu \mathfrak{U}_{z_j z_\mu} z_\mu + 2\,\mathfrak{U}_{z_j} z_j - \frac{m-3}{2}\,\mathfrak{U}_{z_j} + \lambda_j \mathfrak{U}\right\}^{*)} = 0.$$

Diese Gleichung muß identisch in y_j und z_j erfüllt sein. Daher folgt

$$(5.4)\quad \Lambda_j \mathfrak{U} \equiv \mathfrak{U}_{z_j z_j} z_j^2 - \Sigma\,\mathfrak{U}_{z_j z_\mu} z_\mu + 2\,\mathfrak{U}_{z_j} z_j + \frac{m-3}{2}\,\mathfrak{U}_{z_j} + \lambda_j \mathfrak{U} = 0;\; j = 0, 1, \ldots, m$$

zunächst nur im Falle (5.2a), aber auch bei Verletzung von (5.2a) da, wo die linke Seite von (5.4) stetig ist.

---

*) Verschwinden einige der λ_j, so kann man $\mathfrak{U}$ als von den betreffenden Koordinaten unabhängig voraussetzen. Ist insbesondere etwa $\lambda_k \neq 0$ und $\lambda_j = 0$ für alle $j \neq k$, so wird aus (5.4)

$$\mathfrak{U}_{zz}(z^2 - z) + \mathfrak{U}_z\left(2\,z + \frac{m-3}{2}\right) + \lambda\,\mathfrak{U} = 0; \qquad (z_j = z \text{ gesetzt}).$$

Das ist mit $-\frac{m-3}{2} = \gamma;\ \alpha + \beta = 1;\ \lambda = -\alpha\cdot\beta$ die Normalform der hypergeometrischen Differentialgleichung

$$(5.4\text{a})\qquad \mathfrak{U}_{zz}\, z(z-1) + \mathfrak{U}_z[(\alpha+\beta+1)\,z - \gamma] + \alpha\cdot\beta\cdot\mathfrak{U} = 0.$$

Es interessiert diejenige Lösung, die bei $z = 0$ endlich bleibt. Dort liegt eine Stelle der Bestimmtheit vor mit den beiden charakteristischen Wurzeln 0 und $1 - \gamma$. Ist nun wie im hier interessierenden Falle $\gamma = -\frac{m-3}{2}$ eine ganze Zahl < 0, so entsteht die Frage, wann die (dem charakteristischen Exponenten 0 entsprechende) Lösung von (5.4a) kein in $z = \frac{-\Gamma}{a_0 z_0}$ logarithmisches Glied besitzt. Das ist nach bekannter Rechnung dann und nur dann der Fall (s. etwa F. Klein: „Hypergeometrische Funktion", Berlin 1933), falls 1. bei $\gamma = 0$ (d. h. $m = 3$) $\alpha\cdot\beta = \lambda = 0$ ist und falls 2. bei $-\gamma = \frac{m-3}{2} > 0$ und ganz, der Koeffizient vor dem logarithmischen Gliede der genannten Lösung verschwindet

$$A_\gamma = \binom{\alpha+\varkappa}{\varkappa+1}\frac{(\varkappa+1-\alpha)\cdot(\varkappa+2-\alpha)\cdots(1-\alpha)}{(-1)\,\varkappa\cdot\varkappa!} = 0;\ (\varkappa = -\gamma \text{ gesetzt});$$

d. h. das logarithmische Glied der bei $z = 0$ zu 1 werdenden Lösung von (5.4a) verschwindet dann und nur dann, wenn α einen der Werte $\alpha = 1, 2, \ldots, k+1 = \frac{m-1}{2} = p$ annimmt.

In diesem Falle bricht die Reihe ab, und man erhält ein Polynom vom Grade $\frac{m-3}{2}$. Genau für die angegebenen Werte von α bzw. $\lambda = \alpha(1-\alpha)$ verschwindet also auch der logarithmische Anteil der Grundlösung für jede Wahl des ausgezeichneten Punktes a_j.

Die Grundlösung (als das entsprechende wohlbekannte hypergeometrische Polynom) lautet dann

$$u = \Gamma^{-p}\sum_{\nu=0}^{\varkappa}(+z)^\nu\,\frac{(\alpha,\nu)\cdot(\alpha-1,\nu)}{(-\varkappa,\nu)\cdot\nu!};\ (\text{mit } (\alpha,\nu) = \alpha\cdot(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1);\ (\alpha,0) = 1).$$

Sind nur 2 der λ_j, etwa λ_1 und $\lambda_2 \neq 0$, und hängt daher $\mathfrak{U}$ nur von z_1 und z_2 ab, so ist (5.4) eine der 4 Appellschen Verallgemeinerungen der hypergeometrischen Differentialgleichungen auf zwei Veränderliche, und zwar ist es das System von Differentialgleichungen, denen die von ihm mit $F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma; z_1, z_2)$ bezeichnete hypergeometrische Funktion genügt, wenn man setzt $\lambda_1 = -\alpha\cdot\beta,\ \alpha+\beta = 1;\ \lambda_2 = -\alpha'\beta',\ \alpha'+\beta' = 1;$ $\gamma = -\frac{m-3}{2}$ (vgl. [1] insbes. S. 44).

Dieses überbestimmte System von partiellen Differentialgleichungen tritt auf in der Theorie der hypergeometrischen Funktionen mehrerer Veränderlicher[7]), wie sie zunächst von Appell als Verallgemeinerung der Gaußschen hypergeometrischen Reihe geschaffen wurde.

Setzt man nämlich in (5.4)

$$\lambda_j = -\alpha_j \cdot \beta_j;\ \alpha_j + \beta_j = 1;\ \gamma = -\frac{m-3}{2},$$

so ist (5.4) identisch mit dem von Lauricella zur Definition seiner hypergeometrischen Funktion F_B angegebenen System von Differentialgleichungen[8]).

Unabhängig von der Theorie der hypergeometrischen Funktionen machen wir zur Lösung dieses Systems (5.4) den Ansatz $\mathfrak{U} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \overset{\nu}{U}$, wobei $\overset{\nu}{U}$ ein homogenes Polynom vom Grade ν in $z_0, z_1, \ldots, z_m$ sei. Unter Benutzung der Eulerschen Homogenitäts-Relation erhält man dann aus (5.4)

$$(5.5)\qquad (k-p)\,\overset{k}{U}_{z_\nu} = \left(\overset{k-1}{U}_{z_\nu} z_\nu^2\right)_{z_\nu} + \lambda_\nu \overset{k-1}{U};\quad \overset{0}{U} = 1;\qquad k = 0, 1, \cdots, \infty.$$

Sieht man in diesen Gleichungen $\overset{k-1}{U}$ als bekannt an, so sind die Integrabilitätsbedingungen

$$(5.6)\qquad \left(\overset{k-1}{U}_{z_\nu} z_\nu^2\right)_{z_\nu z_\mu} + \lambda_\nu \overset{k-1}{U}_{z_\mu} = \left(\overset{k-1}{U}_{z_\mu} z_\mu^2\right)_{z_\mu z_\nu} + \lambda_\mu \overset{k-1}{U}_{z_\nu};\ \mu, \nu = 0, 1, \ldots, m$$

erfüllt unter der Voraussetzung, daß dieselben Bedingungen erfüllt sind, nachdem man $k-1$ durch $k-2$ ersetzt hat. Das rechnet man leicht nach, indem man in (5.6) links für $\overset{k-1}{U}_{z_\mu}$ und rechts für $\overset{k-1}{U}_{z_\nu}$ die Rekursionsformel (5.5) (in der k durch $k-1$ zu ersetzen ist) benutzt. Da (5.6) für $k-1=0$, $\overset{0}{U} \equiv 1$ richtig ist, sind also die Integrabilitätsbedingungen für (5.5) der Reihe nach erfüllt, und man erhält durch Multiplikation von (5.5) mit z_ν und Summation

$$(5.6\text{a})\quad k \cdot (k-p)\,\overset{k}{U} = \sum_{\nu=0}^{m} \overset{k-1}{U}_{z_\nu z_\nu} z_\nu^3 + \Sigma\, z\, \overset{k-1}{U}_{z_\nu} z_\nu^2 + \Sigma\, \lambda_\nu z_\nu \cdot \overset{k-1}{U};\quad k = 0, 1, \ldots, \infty$$

und daraus

$$\overset{0}{U} = 1;\ \overset{1}{U} = \frac{1}{\gamma} \Sigma\, \lambda_\nu z_\nu;\ \overset{2}{U} = \frac{1}{\gamma(\gamma+1)} \left(\Sigma \frac{z_\nu^2}{2!} \lambda_\nu (\lambda_\nu + 2) + \sum_{\nu \neq \mu} \lambda_\nu z_\nu \lambda_\mu z_\mu\right); \cdots$$

$$(5.7\text{ a})\quad \overset{k}{U} = \frac{1}{(\gamma, k)} \sum_{\substack{\nu_0, \nu_1, \cdots \nu_m = 0 \\ \Sigma \nu_i = k}}^{k} z^{\nu_0} z^{\nu_1} \cdots z^{\nu_m} \frac{[\lambda_0, \nu_0] \cdot [\lambda_1, \nu_1] \cdots [\lambda_m, \nu_m]}{\nu_0!\, \nu_1! \cdots \nu_m!}, m \text{ gerade};$$

darin ist gesetzt

$$(\gamma, k) = \gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma + k - 1);$$

$$[\lambda, \nu] = \lambda \cdot (\lambda + 1 \cdot 2) \cdot (\lambda + 2 \cdot 3) \cdots (\lambda + (\nu - 1) \cdot \nu)\ [\lambda, 0] = 1.$$

---

[7]) Vgl. [1], insbes. S. 117.

[8]) [6], S. 120 (F_B).

Daß die entstehende Potenzreihe konvergiert, sieht man am leichtesten ein, wenn man beachtet, daß durch die Rekursionsformeln

$$(5.8)\qquad k\cdot|k-p|\,\overset{k}{V}=\left(\sum_{\mu}\left(\sum_{\nu}\overset{k-1}{V}_{z_\nu}z_\nu\right)_{z_\mu}z_\mu+\lambda\overset{k-1}{V}\right)\Sigma z_\varrho;\qquad \lambda=\operatorname{Max}\{|\lambda_j|\}$$

eine Potenzreihe definiert ist, die gemäß (5.6a) majorant ist zu $\mathfrak{U}=\Sigma\overset{k}{U}$. $\mathfrak{V}=\Sigma\overset{k}{V}$ läßt sich dann als Potenzreihe in $\sigma=\sum_{0}^{m}z_\nu$ schreiben $\mathfrak{V}=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\sigma^\nu$ mit $\frac{a_{\nu-1}}{a_\nu}=\frac{|\nu-p|\cdot\nu}{(\nu-1)^2+\lambda}$ und konvergiert also für $|\sigma|<1$ und somit $\mathfrak{U}$ für $\Sigma|z_\nu|<1$. Die angegebene Entwicklung versagt, wenn $p=\frac{m-1}{2}$ eine ganze Zahl ist. In diesem Falle mache man den Ansatz

$$(5.10)\quad U=\Gamma^{-p}\left(\sum_{\nu=0}^{p-1}\overset{\nu}{U}(z)+\lg H\sum_{\nu=p}^{\infty}\overset{\nu}{W}(z)\right)+R(x,a)=\Gamma^{-p}\cdot F(z)+R(x,a),$$

wobei die $\overset{\nu}{W}$ wiederum homogen vom Grad ν in den z_j seien*), während $H=z_0\cdot z_1\cdots z_m$ gesetzt ist und R eine in der Umgebung von $x_j=a_j$ regulär analytische Funktion sei.

Es soll dann $F(z)$ so bestimmt werden, daß in

$$\mathfrak{L}(F\cdot\Gamma^{-p})=\Gamma^{-p+1}\sum_{\nu=0}^{m}\frac{a_\nu}{x_\nu}z_\nu\Lambda_\nu(F)=M(x,a)\qquad(\Lambda_\nu\text{ def. durch (5.4)})$$

$M(x,a)$ eine in $\mathfrak{S}(x,a)$ reguläre Funktion von x ist. Dazu ist nur notwendig, W so zu wählen, daß $z_\nu\Lambda_\nu F$ eine Reihenentwicklung in z_ν besitzt, die mit Gliedern $(p+1)$ter Ordnung beginnt. Es gilt mit $\frac{H_{z_\nu}}{H}=\frac{1}{z_\nu}$ nach (5.10)

$$(5.11)\quad \begin{aligned}\Lambda_\nu F=\Lambda_\nu\sum_{\varrho}^{p-1}\overset{\varrho}{U}+\lg H\,\Lambda_\nu\,\times\\ \times\, W+W\left(1+\frac{\gamma+1}{z_\nu}\right)+W_{z_\nu}(2z_\nu-(m+1)-\sum_{\mu=0}^{m}\frac{z_\mu}{z_\nu}W_{z_\mu}.\end{aligned}$$

Bestimmt man die $\overset{\varrho}{U}$ aus

$$(5.12)\quad (k-p)\,\overset{k}{U}_{z_\nu}=\left(\overset{k-1}{U}_{z_\nu}z_\nu^2\right)_{z_\nu}+\lambda_\nu\overset{k-1}{U};\quad k=0,1,\ldots,p-1,\ \nu=0,1,\ldots,m$$

und verlangt man weiter, daß

$$(5.13)\qquad \Lambda_\nu W=0^{*})$$

ist, so erhält man aus (5.11)

$$\Lambda_\nu F=\left(\overset{p-1}{U}_{z_\nu}z_\nu^2\right)_{z_\nu}+\lambda_\nu\overset{p-1}{U}+\frac{\overset{p}{W}}{z_\nu}(-p+p)-(m+1)\,\overset{p}{W}_{z_\nu}+\frac{1}{z_\nu}P,$$

*) Die vorliegende Konstruktion der hypergeometrischen Funktion W läßt sich leicht erweitern auf den Fall der Funktionen $\mathfrak{F}_2$ von APPELL bzw. F_B von LAURICELLA, solange γ eine negative ganze Zahl ist. Die betreffende Funktion scheint noch nicht bekannt zu sein. Für allgemeineres γ ergeben sich Schwierigkeiten durch die Notwendigkeit, die Integrabilitätsbedingungen (5.6) zu erfüllen mit $\overset{\gamma+1}{W}$.

wo P eine Potenzreihe in z ist, die mit Gliedern $(p+1)$ter Ordnung beginnt. Man hat also die Reihe der Gl. (5.7) durch

$$(5.14)\qquad (m+1)\,\overset{p}{W}_{z_\nu} = \Bigl(\overset{p-1}{U}_{z_\nu} z_\nu^2\Bigr)_{z_\nu} + \lambda_\nu \overset{p-1}{U}$$

zu vervollständigen. Danach iefert (5.13)

$$(5.15)\qquad (k-p)\,\overset{k}{W}_{z_\nu} = \Bigl(\overset{k-1}{W}_{z_\nu} z_\nu^2\Bigr)_{z_\nu} + \lambda_\nu \overset{k-1}{W}, \quad k = p+1,\ p+2, \ldots, \infty$$

und somit, da $\overset{p}{W}$ durch (5.14) bestimmt ist, die eindeutig bestimmte reguläre Lösung von (5.8) als Potenzreihe in z_ν.

Setzt man gemäß (5.14)

$$(5.16)\qquad (m+1)\,\overset{k}{W} = \overset{k}{U}, \qquad k = p, p+1, \ldots, \infty,$$

ferner

$$(5.17)\qquad \{\gamma, k\} = \begin{cases} (\gamma, k) = \gamma\cdot(\gamma+1)\ldots(\gamma+k-1) \ \text{falls}\ (\gamma, k) \neq 0 \\ \gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+\mu-1)(-1)\cdot(\gamma+\mu+1)\ldots(\gamma+k-1), \\ \qquad \text{falls}\ \gamma = -\mu;\ \mu\ \text{ganz},\ \mu < k, \end{cases}$$

so erhält man analog zu (5.7)

$$(5.18)\qquad \overset{k}{U} = \frac{1}{\{\gamma, k\}} \sum_{r_0 + r_1 + \cdots + r_m = k} z^{r_0}\cdot z^{r_1}\ldots z^{r_m}\, \frac{[\lambda_0, r_0]\cdot[\lambda_1, r_1]\ldots[\lambda_m, r_m]}{r_0!\, r_1! \ldots r_m!}\ ^{10)}.$$

$W = \frac{1}{m+1}\sum \overset{k}{U}$ konvergiert also genauso wie die Reihe (5.7)[11]. Jetzt hat man nur noch $R(x, a)$ als eine reguläre Lösung von $\mathfrak{L}(R) = M(x, a)$ zu be-

[10]) Eine Möglichkeit, um direkt von (5.7) auf (5.18) schließen zu können, hat man in der Verwendung von HADAMARDs Méthode de déscent. Setzt man nämlich $z_j = \Gamma\varphi_j$; $\varphi_j = \frac{g_{jj}}{a_j x_j}$, so hat man für gerades m: $\Gamma^{-p}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\overset{k}{U}(z) = \Gamma^{-p}\sum_{k=0}^{\infty}\overset{k}{U}(\varphi)\cdot\Gamma^k = u(x, a)$. Um nun für ungerades m hieraus den *„irregulären Anteil der Grundlösung"* $\Gamma^{-p}\Bigl(\sum_{\nu=0}^{p-1}\overset{\nu}{u}(\varphi)\Gamma^\nu + \lg\Gamma\cdot\sum_{p}^{\infty}\overset{\nu}{u}\,\Gamma^\nu\Bigr)$ zu erhalten, führe man zunächst eine zusätzliche Hilfsvariable x_{m+1} ein und bestimme die Grundlösung von

$$L\,u \equiv \sum_{i=0}^{m+1} g_{ii}\Bigl(u_{x_i x_i} + \frac{\lambda_i}{x_i^2}\,u\Bigr) = 0,$$

$g_{m+1,m+1} = -1$; $\lambda_{m+1} = 0$ in der Gestalt (5.7). Wendet man die Méthode de déscent an gemäß [4] S. 290 und S. 154, so resultiert genau die Formel (5.18).

[11]) Das Existenzgebiet der Funktionen U und W aus Gleichung (5.1) ist jedes Teilgebiet des Innern des ins Auge gefaßten charakteristischen Kegels (dessen Spitze a_i auf keiner der singulären Ebenen $x_j = 0$ liegen darf), das keine Punkte mit einer der singulären Ebenen $x_j = 0$ gemein hat. Diese Tatsache folgt aus allgemeinen Überlegungen von HADAMARD [4] S. 408—415. — Im vorliegenden Falle kann man das auch aus den Eigenschaften der hypergeometrischen Reihe und ihrer Verallgemeinerungen erschließen. Besonders durchsichtig ist der in Anm. [6]) hervorgehobene Fall nur einer singulären Ebene $x_j = 0$. U besitzt dann nur Singularitäten für $z = \infty$, d. h. $x_j = 0$ und für $z = 1$, d. h. $\bar\Gamma \equiv \Gamma - g_{jj}\, 4\, a_j\, x_j = 0$ [gemäß (5.2)], also auf dem charakteristischen Kegel mit der Spitze im Spiegelpunkt $\bar a_i$ von a_i an $x_j = 0$. — Die gewonnene Grundlösung besitzt gleichzeitig auf $\bar\Gamma = 0$ bis auf den Faktor $\Gamma^{-\frac{m-1}{2}}$ die Singularität einer Grundlösung. Vgl. hierzu die oben zitierten Arbeiten von DIAZ und WEINSTEIN und von DIAZ und LUDFORD (insbes. S. 36).

stimmen, deren Existenz etwa auf Grund des Theorems von CAUCHY-KOWALEWSKA gesichert ist. $R(x, a)$ geht in die Integrationstheorie von (1.1) nicht ein. An der so konstruierten Lösung kann man nun ablesen, wann der logarithmische Anteil verschwindet.

Aus (5.14) und (5.15) sowie (5.18) geht hervor, daß dafür notwendig und hinreichend das in z_j identische Verschwinden von $\overset{p}{U}$ ist. Das heißt

$$(5.19)\qquad \begin{gathered}[\lambda_0, r_0]\cdot[\lambda_1, r_1]\cdots[\lambda_m, r_m] = 0 \\ \text{für alle } r_0, r_1, \ldots, r_m \text{ mit } \sum_{\nu=0}^{m} r_\nu = p.\end{gathered}$$

Daher folgt in der Tat, $\lambda_i = -\nu_i(\nu_i + 1)$ gesetzt, $\sum_0^m \nu_i \leq p - 1$. Wäre nämlich etwa $\Sigma\, \nu_i \geq p$, so könnte man jeweils *ein* Glied aussuchen, bei dem alle Exponenten $r_i \leq \nu_i$ wären. Ist nämlich $\Sigma\, \nu_i = p + q$, $q \geq 0$, so wähle man etwa $\nu_0 = r_0 + q$, die übrigen $\nu_i = r_i$. Der Zähler (5.19) dieses Gliedes könnte dann nicht verschwinden. Daß im Falle $\Sigma\, \nu_i \leq p - 1$ wirklich alle Gl. (5.19) erfüllt sind, sieht man ein, wenn man beachtet, daß für ein nicht verschwindendes Glied $\nu_i \geq r_i$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$ gelten müßte, weil etwa aus $\nu_\varkappa < r_\varkappa$ folgt, daß $[-\nu_\varkappa(\nu_\varkappa + 1), r_\varkappa]$ verschwände. Aus $\nu_i \geq r_i$ würde aber durch Summieren folgen $\Sigma\, \nu_i \geq \Sigma\, r_i = p$ entgegen der Voraussetzung $\Sigma\, \nu_i \leq p - 1$[12]). Damit ist die Ungleichung $\Sigma\, \nu_i \leq p - 1$ aufs neue bestätigt, zugleich, daß die Voraussetzungen 1), 2), 3) des Abschnitts 1 notwendig und hinreichend für das huyghenssche Verhalten von (1) sind.

Literatur.

[1] APPELL, P., et J. KAMPÉ DE FÉRIET: Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynoms d'HERMITE. Paris 1926. — [2] ASGEIRSSON, LEIFUR: Math. Ann. **113**, 321 (1936). — [3] COURANT-HILBERT: Methoden der mathematischen Physik, Bd. II. Berlin 1937. — [4] HADAMARD: Le problème de Cauchy (2. franz. Auflage). Paris 1932. — [5] HADAMARD: Ann. of Math. **43**, 510—522 (1942). — [6] LAURICELLA: Rend. Circ. mat. Palermo VII, 111—158 (1893). — [7] MATTHISSON, MYRON: Acta math. **71**, 249—282 (1939). — [8] STELLMACHER, K. L.: Nachr. Akad. Wiss. Göttingen IIa, Nr. 10 (1953).

(Eingegangen am 12. Februar 1955.)

[12]) Genauso beweist man: Notwendig und hinreichend dafür, daß $\overset{k}{U}$ verschwindet (und also die Reihe bei diesem Gliede abbricht), ist, daß $\lambda_i = -\nu_i(\nu_i + 1)$ und $\sum_{i=0}^{m} \nu_i \leq k - 1$.

AMSLER, M.-H.
Math. Annalen, Bd. 130, S. 234—256 (1955).

Des surfaces à courbure négative constante dans l'espace à trois dimensions et de leurs singularités.

Par
MARC-HENRI AMSLER à Zurich.

1. Historique. Le théorème suivant, formulé et démontré par D. HILBERT représente le point de départ du présent travail:

Il n'existe pas, dans l'espace euclidien à trois dimensions, de surfaces à courbure de Gauss négative et constante sans singularités.

La démonstration donnée par HILBERT, reprise plus tard dans ses détails et sous une forme légèrement différente par L. BIEBERBACH [1] repose sur l'idée que voici: on sait que les lignes asymptotiques d'un morceau de surface à courbure négative constante $K = -1$ de l'espace ordinaire forme un réseau de TCHÉBYCHEFF, c. à. d. un réseau dans lequel deux côtés opposés d'une «maille» du réseau sont de même longueur. Au cas où il existerait dans l'espace une surface $K = -1$ sans singularité, on montre sans difficulté que sa surface de recouvrement serait image isométrique du plan hyperbolique pris dans son ensemble. Il serait ainsi possible de recouvrir le plan hyperbolique entier par un réseau de TCHÉBYCHEFF. Or ce dernier fait se trouve être en contradiction avec une propriété connue des réseaux de TCHÉBYCHEFF, à savoir la propriété exprimée par la formule de HAZZIDAKIS disant que la courbure totale du domaine délimité par une maille du réseau ne peut excéder, en valeur absolue, la valeur 2π. Pour pouvoir appliquer la formule de HAZZIDAKIS, il est néanmoins nécessaire de faire intervenir dans la démonstration des considérations assez compliquées de nature topologique.

Peu de temps après, E. HOLMGREN [8] donna du théorème de HILBERT une démonstration plus concise. Elle s'appuie, elle aussi, et sur la propriété du réseau des lignes asymptotiques de former un réseau de TCHÉBYCHEFF, et sur la formule de HAZZIDAKIS; elle a cependant l'avantage d'éviter toute considération topologique [2].

Dernièrement HARTMANN et WINTNER [5] firent une étude critique des conditions de régularité auxquelles doit satisfaire la surface pour que l'on puisse utiliser les méthodes de démonstrations proposées par HILBERT et HOLMGREN. Ils montrèrent que le théorème de HILBERT sur la non-existence des surfaces en question est valable pour les surfaces dérivables deux fois de façon continue.

2. Aspect des singularités connues. Les raisonnements imaginés par HILBERT et HOLMGREN ont malheureusement l'inconvénient majeur d'être menés par l'absurde, c. à. d. d'être basés sur des objets qui, en fin de démonstration, se révèlent être inexistants. Leurs méthodes ne sont par conséquent pas à meme de fournir des renseignements constructifs en particulier sur la

nature et le nombre de ces singularités. Il serait pourtant intéressant de savoir s'il existe par exemple une surface n'ayant qu'une seule singularité. Pour autant que nous avons pu nous en rendre compte, cette question est restée jusqu'ici sans réponse. Le but général de ce travail est d'essayer dans la mesure du possible de combler cette lacune.

Qu'entend-on tout d'abord par *singularité* d'une surface plongée dans l'espace? Une singularité S d'une surface F' (F' étant elle-même définie comme application localement topologique d'une surface in abstracto F dans l'espace ambiant, cf. § 3, no 1) doit être premièrement point d'accumulation de points $P_1, P_2, \ldots$ de F', sans appartenir toutefois à F'; secondement, il faut que la valeur minimum des longueurs des arcs reliant, sur F', un point fixe P_0 de la surface au point P_i de la suite considérée (distance $P_0 P_i$) reste bornée quel que soit i; enfin il ne doit pas exister d'extension $\overline{F'}$ de F' contenant S à son intérieur. Cette dernière restriction a pour but d'exclure de l'ensemble des singularités les points de l'espace, qui tout en étant situés sur la bordure de la surface, ne représentent pas un point où cette dernière perd effectivement sa régularité. Nous appellerons une surface F' ne possédant pas d'extension $\overline{F'}$ de cette sorte une surface *non prolongeable*. Nous faisons remarquer en passant que tout morceau de surface à courbure négative constante peut être englobé dans une surface — à courbure négative constante également — non prolongeable au sens donné ci-dessus; cette propriété est démontrable par exemple à l'aide du lemme de ZORN. Nous ne désirons cependant pas approfondir ce point.

Afin de nous faire une idée des propriétés de ces singularités, passons en revue les surfaces connues. La liste en est courte: d'une part les surfaces de rotation, classifiées pour la première fois par MINDING [12] et dont F. KLEIN [11] a donné des représentations intuitives, d'autre part les surfaces hélicoïdales, découvertes par MINDING également [12]. Ces surfaces possèd nt toutes, entre autres, des singularités accumulées sur une courbe spatiale, en l'occurrence sur un cercle ou une hélice. Il nous vient naturellement à l'idée de supposer que la présence de telles *courbes* est une caractéristique de la bordure des surfaces $K = -1$. Cette supposition n'est cependant pas évidente du fait de l'existence également — sur les surfaces de rotation de type conique — de singularités *isolées*.

3. *Les surfaces analytiques.* Le résultat principal de ce travail confirme la supposition énoncée ci-dessus pour la classe des surfaces analytiques. Nous démontrerons le théorème suivant:

Toute surface $K = -1$ analytique et non prolongeable possède, en bordure, au moins une courbe formée exclusivement de singularités.

La démonstration du théorème principal fournira encore les propositions complémentaires que voici:

Parmi les courbes situées en bordure d'une surface $K = -1$, il en existe toujours une qui est dérivable autant de fois que l'on veut et le long de laquelle — bien que ses points soient singularités pour la surface — la limite de la normale à la surface est régulière, en particulier continue.

Le caractère singulier de la surface sur une telle courbe de singularités peut être de deux types. Pour les différencier, utilisons un système de coordonnées cartésien rectangulaire x, y, z, le plan des x, y étant le plan tangent limite de la surface en un point S de ladite courbe. La fonction $z(x, y)$ représentant la surface au voisinage de S est analytique. Dire que la courbe étudiée est singulière pour la surface, c'est dire que la fonction $z(x, y)$ n'est plus analytique sur la portion Γ de cette courbe située dans le voisinage de S. En chaque point de la surface, les deux directions asymptotiques délimitent un angle d'ouverture ω qui, ainsi que nous le verrons par la suite, est déterminant pour le comportement de la surface et de ses singularités. Dans le voisinage de S, cet angle ω peut être considéré comme fonction des paramètres x et y. La courbe de singularités dont fait état le théorème est alors de l'un des deux types suivants:

a) *en chaque point de l'arc étudié Γ, la fonction $\omega(x, y)$ cesse d'être analytique; l'arc Γ est la courbe limite d'une famille d'asymptotiques; il est dérivable autant de fois que l'on veut. Dans certains cas et à condition d'abaisser l'ordre de dérivation de la surface, il est possible de prolonger la surface au delà d'un arc singulier de ce type (premier type).*

b) *en chaque point de l'arc Γ, la fonction $\omega(x, y)$ reste analytique; Γ est enveloppe de chacune des deux familles de lignes asymptotiques; Γ est analytique; sur Γ la courbure moyenne de la surface devient infinie et la fonction $\sin\omega$ s'annule. Le prolongement de la surface au delà de Γ est impossible, même en abaissant l'ordre de dérivation de la surface (deuxième type).*

La double nature de ces courbes de singularités fait ressortir en particulier que si les exemples mentionnés ci-dessus ont pu nous faire pressentir l'existence de courbes singulières pour la surface, le caractère singulier de cette dernière n'est pas nécessairement du type supputé. Les courbes singulières des surfaces hélicoïdales et de rotation appartiennent en effet toutes à une seule des deux espèces possibles, à savoir la deuxième; nous donnerons un exemple de surface où toutes les courbes singulières seront du premier type (exemple 1).

4. Les surfaces non analytiques. Il ne nous a malheureusement pas été possible de déterminer si les théorèmes ci-dessus — en particulier l'existence de courbes singulières — sont aussi valables pour les surfaces non analytiques, c. à. d. pour les surfaces dérivables au sens habituel. La raison en est que les surfaces non analytiques peuvent admettre des singularités d'un type nouveau, singularités que nous avons appelées *ramifications* (cf. la définition exacte dans le corps du travail) et qui perturbent la méthode d'investigation utilisée. Sur les surfaces non analytiques, le théorème énoncé plus haut n'est valable qu'en éliminant ce genre de singularités:

Toute surface $K = -1$ à dérivées continues des trois premiers ordres, non prolongeable et sans ramifications possède, en bordure, au moins une courbe formée exclusivement de singularités.

Les propriétés complémentaires énoncées pour les surfaces analytiques sont encore valables dans ce cas.

Il peut être intéressant de noter que des singularités du genre ramifications sont possibles sur les surfaces à courbure identiquement nulle: une feuille de papier dans laquelle on a pratiqué une entaille fournit, en écartant les bords de l'entaille, un exemple intuitif d'une telle singularité.

5. Les réseaux de TCHÉBYCHEFF *du plan hyperbolique.* Dans l'établissement des propriétés de la bordure des surfaces $K = -1$, nous avons abondamment fait usage de la propriété des réseaux des lignes asymptotiques de former des réseaux de TCHÉBYCHEFF. Les singularités des surfaces étudiées apparaissent, au cours des démonstrations, comme étant des particularités de ces réseaux spéciaux de TCHÉBYCHEFF. Si l'on se rappelle maintenant que tout morceau suffisamment petit de surface $K = -1$ peut être appliqué isométriquement sur un domaine du plan hyperbolique, les particularités du réseau des lignes asymptotiques se transforment, par cette application, en propriétés des réseaux de TCHÉBYCHEFF du plan hyperbolique. Nous avons développé les résultats essentiels auxquels nous a conduit cette analogie. Cette dernière fournit le théorème suivant:

Dans le plan hyperbolique, la bordure du domaine de définition d'un réseau de TCHÉBYCHEFF *analytique et non prolongeable comprend au moins un arc de courbe.*

Nous montrons ainsi en particulier qu'il n'existe pas dans le plan hyperbolique de réseau de TCHÉBYCHEFF analytique recouvrant tout le plan à l'exception d'un seul point, c. à. d. un réseau n'ayant qu'une seule singularité.

6. Exemples. Nous donnons deux exemples nouveaux de surfaces $K = -1$ non prolongeables. Le premier, mentionné plus haut, est celui d'une surface analytique finie dont chaque singularité est singularité de la fonction ω (premier type). Le prolongement de la surface au delà de ces singularités est impossible, même dans le cadre des surfaces trois fois différentiables.

En second lieu, nous avons traité le cas des surfaces soustendues par deux droites concourantes dans l'espace. La bordure de chacune de ces surfaces consiste en quatre courbes analytiques du second type ($\sin\omega = 0$). Parmi ces surfaces, nous avons montré qu'il y en avait une et une seule possédant des quadrilatères asymptotiques d'aire maximum 2π. Cette propriété est intéressante du fait que nous savions, par la formule de HAZZIDAKIS mentionnée au début de cette introduction, que tout quadrilatère asymptotique possédait une aire au plus égale à 2π; nous ne connaissions pas d'exemples pour lesquels cette valeur maximum pouvait effectivement être atteinte.

§ 1. Réseaux asymptotiques et réseaux de Tchébycheff.

Voici, résumées, les propriétés locales des surfaces à courbure négative constante dont nous ferons usage dans ce travail.

1. Soit F' un morceau de surface à courbure K négative constante égale à -1 plongée dans l'espace euclidien à trois dimensions; supposons F' représentable par un vecteur $\mathfrak{x}(u^1, u^2)$ dérivable q fois de façon continue ($q \geq 3$) — nous parlerons dans ce cas d'une surface de classe C^q ou de classe C^Ω si $\mathfrak{x}(u^1 u^2)$ est analytique —, il existe alors au voisinage de tout point de F'

une représentation paramétrique $\mathfrak{x}(\bar{u}^1\bar{u}^2)$ dite représentation asymptotique, telle que les lignes de coordonnées $\bar{u}^1 = \text{const.}$ et $\bar{u}^2 = \text{const.}$ soient lignes asymptotiques de la surface. Ces lignes asymptotiques étant solutions de l'équation

$$L_{ik}(u^1u^2)\,du^i du^k = 0$$

à coefficients de classe C^{q-2}, la représentation $\mathfrak{x}(\bar{u}^1\bar{u}^2)$ est de classe C^{q-1} ([5] théorème IV). De plus, des équations de Gauss-Codazzi et de $K = -1$, il s'ensuit que les paramètres $u = \bar{u}^1$, $v = \bar{u}^2$ peuvent être choisis de façon à ce que u, respectivement v, mesurent la longueur d'arc sur les lignes de coordonnées ([5] théorème VI). La métrique de la surface est ainsi représentable sous la forme simple

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\omega(u, v)\,du\,dv + dv^2, \tag{1}$$

$\omega(u, v)$ étant l'angle compris entre les vecteurs tangents unitaires $\mathfrak{x}_u$ et $\mathfrak{x}_v$. La forme (1) de l'élément d'arc caractérise les systèmes de coordonnées dits de Tchébycheff, appelés aussi plus simplement *réseaux de* Tchébycheff; nous nommerons la fonction $\omega(u, v)$ *fonction génératrice* du réseau. Inversément, on établit que si une surface à courbure négative constante possède une représentation asymptotique de Tchébycheff de classe C^{q-1}, il existe un système de coordonnées dans lequel elle est de classe C^q ([5] théorème VIII).

La seconde forme fondamentale de la surface se réduit, en vertu des équations des lignes asymptotiques

$$\bar{L}_{11} = \bar{L}_{22} = 0$$

et de la relation

$$K = \frac{\text{dét}\,\bar{L}_{ik}}{\text{dét}\,\bar{g}_{ik}} = \frac{-\bar{L}_{12}^2}{\sin^2\omega} \equiv -1$$

à

$$II = \pm 2\sin\omega\,du\,dv. \tag{2}$$

Puisque toutes les propriétés locales d'une surface sont virtuellement contenues dans ses deux formes fondamentales, il résulte de (1) et (2) que celles d'une surface à courbure négative constante sont exprimables au moyen de la seule fonction $\omega(u, v)$, que nous appellerons par analogie *fonction génératrice* de la surface.

On établit en particulier les correspondances suivantes entre les propriétés de la surface dans l'espace et celles de sa fonction génératrice:

La surface F' étant supposée de classe $C^{q-1}(q \geqq 3)$ dans un système asymptotique de Tchébycheff, l'ordre de dérivation de la fonction ω est d'une unité inférieure, ω étant l'angle compris entre les deux vecteurs $\mathfrak{x}_u$ et $\mathfrak{x}_v$ de classe C^{q-2}:

a) $$\omega(u, v) \in C^{q-2}.$$

La propriété inverse est encore valable, dans ce sens que, si la fonction génératrice est de classe C^{q-2}, la surface est nécessairement de classe C^{q-1} par rapport au réseau de ses lignes asymptotiques ([5] théorème VII).

La propriété des lignes asymptotiques de former un réseau sur la surface s'exprime au moyen de sa fonction génératrice par la condition

b) $$\sin \omega (u, v) > 0,$$

relation interprétant également la caractéristique des deux courbures principales de la surface

(3) $$k_1 = \frac{II}{I}\Big|_{du = dv} = \pm\, tg \frac{\omega}{2} \qquad k_2 = \frac{II}{I}\Big|_{du = -dv} = \mp \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2}$$

d'être finies en tout point de la surface.

La formule de Gauss-Bonnet [9] reliant sur une surface la courbure totale d'un domaine à la courbure géodésique totale de la frontière de ce domaine se réduit, dans le cas d'un quadrilatère asymptotique A situé sur une de nos surfaces et délimité par les 4 asymptotiques $u = u_1$, $u = u_2$, $v = v_1$, $v = v_2$, à l'équation ([5] théorème IX)

c) $$\omega(u_1 v_1) - \omega(u_2 v_1) + \omega(u_2 v_2) - \omega(u_1 v_2) = \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} \sin\omega \, du \, dv.$$

Nous écrirons cette dernière équation symboliquement

(4) $$[\omega]_A = \iint_A \sin\omega \, du \, dv.$$

Le passage de la formule sous sa forme classique

$$\iint K \, df + \oint \varkappa \, ds + \Sigma \varphi_i = 2\pi$$

à la forme (4) s'effectue en remarquant que la courbure géodésique c_1 respectivement c_2 des lignes d'un réseau de Tchébycheff est donnée, à partir de la forme (1) de la métrique, par les relations

(5) $$\begin{cases} c_1 = -\,\omega_u & \text{(sur une ligne } v = \text{const.)} \\ c_2 = +\,\omega_v & \text{(sur une ligne } u = \text{const.)} \end{cases}$$

La formule c), dûe à Hazzidakis [6], se réduit lorsque u_2 tend vers u_1, respectivement lorsque v_2 tend vers v_1, aux relations

c′) $$\omega_u(u_1 v_2) - \omega_u(u_1 v_1) = \int_{v_1}^{v_2} \sin\omega \, dv \qquad \omega_v(u_2 v_1) - \omega_v(u_1 v_1) = \int_{u_1}^{u_2} \sin\omega \, du.$$

Ces deux relations indiquent que, même lorsque ω est de classe C^1, la dérivée mixte ω_{uv} existe ($\omega_{uv} = \omega_{vu}$) et que l'on a

c″) $$\omega_{uv} = \sin\omega.$$

c″ exprime le théorème egregium pour les surfaces de l'espace à courbure $K = -1$; dans ce travail nous avons cependant préféré adopter la forme c) de ce théorème, forme qui ne fait intervenir que la fonction ω, à l'exclusion de ses dérivées.

2. Le rôle essentiel des trois propriétés a), b) et c) de la fonction génératrice réside en ce que ces trois relations représentent les conditions nécessaires

et suffisantes pour qu'une fonction (univoque) de deux variables indépendantes u et v puisse être interprétée comme fonction génératrice $\omega(u, v)$ d'une surface à courbure négative constante. La démonstration de cette propriété consiste à reconnaître que les 3 conditions a), b) et c) ne sont autres que les conditions locales d'intégrabilité des deux formes fondamentales (1) et (2). La correspondance entre la surface et sa fonction génératrice est biunivoque, en ce sens qu'abstraction faite de permutations effectuées sur les paramètres u et v, du choix de l'origine $u = v = 0$, de même que de déplacements ou de symétries dans l'espace, à toute fonction ω de la forme voulue correspond localement une surface à courbure négative constante égale à -1 et inversément.

3. La dernière propriété dont nous aurons besoin se rapporte à l'image sphérique du réseau de lignes asymptotiques: le plan tangent à la surface le long d'une ligne asymptotique complète cette dernière en ce que l'on appelle un *ruban asymptotique*. Le long d'un tel ruban, les équations générales de Frenet

$$\begin{cases} \dot{\mathfrak{t}} = & c\,\mathfrak{n} + b\,\xi \\ \dot{\mathfrak{n}} = -c\,\mathfrak{t} & + a\,\xi \\ \dot{\xi} = -b\,\mathfrak{t} - a\,\mathfrak{n} & \end{cases}$$

reliant les trois vecteurs unitaires tangent $\mathfrak{t}$, normal ξ et binormal $\mathfrak{n} = \xi \times \mathfrak{t}$ à leurs dérivées $\dot{\mathfrak{t}}$, $\dot{\xi}$, $\dot{\mathfrak{n}}$ par rapport à la longueur d'arc se réduisent à

$$(6) \qquad \begin{cases} \dot{\mathfrak{t}} = & c\,\mathfrak{n} \\ \dot{\mathfrak{n}} = -c\,\mathfrak{t} & + a\,\xi \\ \dot{\xi} = & -a\,\mathfrak{n}\,. \end{cases}$$

La courbure géodésique c est à remplacer, suivant les relations (5), par $-\omega_u$ respectivement $+\omega_v$, la torsion géodésique a, suivant la condition d'Enneper, par $\pm\sqrt{-K} = \pm 1$, la condition $b = 0$ pour la courbure normale b caractérisant, comme on le sait, les rubans asymptotiques. Si l'indice 1 se rapporte aux éléments de la première famille d'asymptotiques ($v =$ const.), l'indice 2 à ceux de la seconde ($u =$ const.), l'image sphérique du réseau asymptotique vérifie

$$d\xi = \xi_u du + \xi_v dv = \mp \mathfrak{n}_1 du \pm \mathfrak{n}_2 dv,$$

c. à. d., puisque l'angle compris entre les vecteurs binormaux $\mathfrak{n}_1$ et $\mathfrak{n}_2$ est égal à l'angle ω déterminé par les vecteurs tangentiels $\mathfrak{t}_1$ et $\mathfrak{t}_2$,

$$(7) \qquad d\,\xi^2 = du^2 - 2\cos\omega\,du\,dv + dv^2.$$

L'équation (7) est la propriété cherchée, elle exprime que l'image sphérique est image isométrique du réseau asymptotique et, elle-même, réseau de Tchébycheff. En introduisant l'angle $\omega^* = \pi - \omega$ formé sur la sphère par les vecteurs tangentiels ξ_u et ξ_v du réseau, l'élément d'arc $d\xi^2$ se réduit à la forme type des réseaux de Tchébycheff

$$d\xi^2 = du^2 + 2\cos\omega^* du\,dv + dv^2;$$

ω^* en est la fonction génératrice; elle possède les propriétés a), b) et c) de ω.

transcrites sur la sphère

a*) $$\omega^* \in C^{q^*-1} \qquad (q^* \geqq 2)$$

b*) $$\sin\omega^* > 0$$

c*) $$-[\omega^*]_{A^*} = \iint\limits_{A^*} \sin\omega^* \, du\, dv.$$

Par le détour des réseaux asymptotiques des surfaces à courbure négative constante, on peut donc établir que ces trois conditions représentent les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction univoque puisse être interprétée comme fonction génératrice $\omega^*(u,v)$ d'un réseau de TCHÉBYCHEFF (de classe C^{q^*}) situé sur une sphère.

§ 2. Quelques propriétés de la fonction génératrice $\omega(u, v)$.

Les propriétés de la fonction $\omega(u, v)$ découlent de celles des solutions de l'équation aux dérivées partielles du type hyperbolique

(8) $$\omega_{uv} = \sin\omega$$

à laquelle se réduit la relation (4) lorsque la fonction $\omega(u, v)$ est supposée une fois différentiable (cf. ci-dessus, relation c'').

1. Considérons un plan des u, v où u et v sont coordonnées cartésiennes rectangulaires. Conformément à la notion de caractéristique de l'équation (8), nous appellerons *domaine caractéristique* ou *rectangle caractéristique* toute portion du plan délimitée par deux horizontales et deux verticales.

L'existence des fonctions $\omega(u, v)$ est régie par le théorème suivant:

Théorème d'existence[1]).

Hypothèse: Soient $\varphi_1(u)$ et $\varphi_2(v)$ deux fonctions univoques et continues définies la première sur l'intervalle $\alpha \leqq u \leqq \beta$ de l'axe des u, la seconde sur l'intervalle $\gamma \leqq v \leqq \delta$ de l'axe des v (α, γ négatifs, β, δ positifs). De plus soit $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$.

Conclusion: Il existe dans le domaine caractéristique fermé $\overline{D}$ $\alpha \leqq u \leqq \beta$, $\gamma \leqq v \leqq \delta$ une et une seule fonction univoque et continue $\omega(u, v)$ satisfaisant, quel que soit le rectangle caractéristique A situé dans $\overline{D}$, à l'équation

(4) $$[\omega]_A = \iint\limits_A \sin\omega \, du\, dv$$

se réduisant à $\varphi_1(u)$ sur l'axe des u et à $\varphi_2(v)$ sur l'axe des v.

Les propriétés de différentiabilité de la fonction ainsi définie s'établissent à partir de la relation (8) et des équations

(9) $$\begin{cases} \omega_u(u, v) = \omega_u(u, 0) + \int\limits_0^v \sin\omega \, dv \\ \omega_v(u, v) = \omega_v(0, v) + \int\limits_0^u \sin\omega \, du, \end{cases}$$

obtenues par intégration (cf. ci-dessus, relations c'): la classe C^p ($p = 1, 2, \ldots, \infty$) de la solution $\omega(u, v)$ est identique à celle des fonctions initiales $\varphi_1(u)$ et

[1]) Pour la démonstration, voir E. GOURSAT, Cours d'analyse mathématique, Tome III, 5ème édition, p. 156 et suivantes.

$\varphi_2(v)$. Dans le cas de fonctions initiales analytiques, un raisonnement détaillé, effectué sur le développement en puissance de la solution, permet d'établir l'analyticité de la solution au voisinage de l'origine et, partant, dans tout le domaine de définition.

Le théorème d'existence ci-dessus renseigne d'autre part sur le comportement des solutions de l'équation (4) sur la frontière de tout domaine caractéristique ouvert. Soit en effet $\omega(u, v)$ une solution de l'équation (4) définie à l'intérieur d'un tel domaine D. Supposons qu'en un point-frontière R, par exemple sur le côté supérieur, extrémités exclues, la limite de la fonction ω existe et soit finie, ainsi que celles de ses p premières dérivées partielles par rapport à v; les valeurs que prend ω sur l'axe des u et sur la verticale par R définissent — suivant le théorème d'existence ci-dessus — une et une seule solution $\omega_0(u, v)$ de l'équation (4) dans le domaine $\alpha < u < \beta$, $\gamma < v \leqq \delta$. Cette solution ω_0 est à l'intérieur de D identique à la solution considérée, elle représente donc une extension régulière de cette dernière sur le bord $v = \delta$ du domaine de définition D. La solution $\omega(u, v)$ définie à l'intérieur de D est donc régulière en tout point d'un segment-frontière ouvert dès qu'elle est régulière en un quelconque de ses points. Inversément, si la solution $\omega(u, v)$ est singulière — c.à.d. non régulière — en un seul point d'un segment-frontière ouvert, elle est singulière en tout point de ce segment. Si d'autre part l'un des sommets de D est singularité pour la solution, cette dernière est nécessairement singulière tout le long d'un au moins des deux segments-frontières issus de ce sommet; en effet la présence d'un point régulier sur chacun des segments issus du sommet entraînerait l'existence d'une solution régulière à l'intérieur de D et sur les deux segments-frontières considérés, le sommet compris, d'où le corollaire suivant:

Corollaire du théorème d'existence.

Soit $\omega(u, v)$ une solution de l'équation (4) *définie dans un domaine caractéristique ouvert D; R un point-frontière de D.*

Hypothèse:

$$\omega(u, v) \in C^p \text{ dans } D \qquad (p \geqq 0)$$
$$\omega(u, v) \notin C^p \text{ dans } D + R.$$

Conclusion: Si R est sommet de D, $\omega(u, v) \notin C^p$ en tout point d'au moins un de deux segments-frontières issus de R, si R n'est pas sommet de D, en tout point du segment-frontière passant par R.

2. Si d'une part la solution supposée régulière en D perd sa régularité tout le long d'un segment-frontière dès qu'elle la perd en un seul de ses points, cette perte de régularité n'est pas complète comme l'atteste le lemme suivant:

Lemme I.

Soit $\omega(u, v)$ une solution de l'équation (4) *définie dans un domaine caractéristique ouvert D: $\alpha < u < \beta$, $\gamma < v < \delta$; R un point du segment-frontière ouvert $v = \delta$.*

Hypothèse: $\omega(u, v) \in C^p$ dans D ($p = 1, 2, \ldots, \infty, \Omega$).

Conclusion: La dérivée partielle ω_u possède une valeur limite bien définie en tout point du segment $v = \delta$. De plus cette valeur limite appartient le long

de ce segment à la classe C^{p-1} $(p-1=0,1,2,\ldots,\infty)$ *relativement à la variable* u.

Démonstration: Soit $P_n(u_n, v_n)$ une suite de points situés dans D, convergeant pour $n \to \infty$ vers le point $R(u^*, \delta)$, $\alpha < u^* < \beta$. En P_n nous avons, d'après (9)

$$\omega_u(u_n, v_n) = \omega_u(u_n, 0) + \int_0^{v_n} \sin\omega(u_n, v)\, dv.$$

Par hypothèse, $\omega_u(u_n, 0)$ est régulier, la régularité de ω_u au point limite R de la suite P_n ne dépend donc que de l'intégrale du second membre. Estimons cette intégrale. L'équation (4) établie pour le domaine délimité par les deux caractéristiques $u = u^*$, $u = u_n$, l'axe des u et l'horizontale $v =$ const. donne

$$\omega(u_n, 0) - \omega(u^*, 0) + \omega(u^*, v) - \omega(u_n, v) = \int_0^v \int_{u_n}^{u^*} \sin\omega\, du\, dv.$$

P_n tendant vers R, la somme des deux premiers termes du membre de gauche tend vers zéro, de même l'intégrale double, puisque la fonction à intégrer est bornée. Pour un ε_1 arbitraire, il existe donc un indice $N_1(\varepsilon_1)$ tel que pour tout $0 \leqq v \leqq \delta$

$$|\omega(u^*, v) - \omega(u_n, v)| < \varepsilon_1$$

c.à.d., puisque $|\sin a - \sin b| \leqq |a - b|$ pour tout a et tout b,

$$|\sin\omega(u^*, v) - \sin\omega(u_n, v)| \leqq |\omega(u^*, v) - \omega(u_n, v)| < \varepsilon_1$$

dès que $n > N_1(\varepsilon_1)$.

La différence des dérivées ω_u en P_n et en sa projection $\overline{P}_n$ sur la verticale par R est égale à, d'après (9),

$$\omega_u(u^*, v_n) - \omega_u(u_n, v_n) = \omega_u(u^*, 0) - \omega_u(u_n, 0) + \int_0^{v_n} [\sin\omega(u^*, v) - \sin\omega(u_n, v)]\, dv.$$

Son comportement ne dépend donc que de l'intégrale du membre de droite. Puisque cette intégrale peut être rendue suivant l'inéquation ci-dessus aussi petite que l'on veut, nous avons dès que $n > N_2(\varepsilon_2)$

$$|\omega_u(u^*, v_n) - \omega_u(u_n, v_n)| < \varepsilon_2.$$

Ainsi

$$\lim_{n\to\infty} \omega_u(u_n, v_n) = \omega_u(u^*, \delta)$$

existe, vu que c'est le cas de

$$\lim_{n\to\infty} \omega_u(u^*, v_n) = \omega_u(u^*, 0) + \int_0^{\delta} \sin\omega\, dv.$$

La convergence de la suite des fonctions continues $f_n(u) = \omega_u(u, v_n)$ étant uniforme, d'après l'inégalité ci-dessus, la limite

$$\omega_u(u, \delta) = \lim_{n\to\infty} \omega_u(u, v_n) = \omega_u(u, 0) + \int_0^{\delta} \sin\omega\, dv$$

est, elle aussi, continue. Cette limite est évidemment dérivable $p-1$ fois par rapport à u, ses dérivées étant égales aux limites, pour $v = \delta$ des dérivées correspondantes dans D, c.q.f.d.

Remarquons encore que si ω est analytique dans D, l'analyticité de la limite $\omega_u(u, \delta)$ ne peut être assurée.

3. Le lemme I a trait aux singularités de nos surfaces ne satisfaisant pas à la première condition de régularité a); voici maintenant une proposition se rapportant aux singularités qui ne satisfont pas à la condition b). C'est sur cette dernière propriété, exprimée par la conclusion 1) ci-dessous, que se fonde la méthode de démonstration imaginée par HOLMGREN de la présence de singularités sur les surfaces à courbure négative constante.

Lemme II.

Soit dans le domaine $a \leqq u \leqq b$, $\gamma \leqq v \leqq \delta$, $\omega(u, v)$ une solution — de classe C^p, $p = 1, 2, \ldots, \infty, \Omega$ — de l'équation (4). De plus soient $(\alpha, 0)$ et $(\beta, 0)$ deux points de l'axe des u tels que $a < \alpha < \beta < b$.

Hypothèse: Sur l'intervalle $a \leqq u \leqq b$ on a

$$\omega_u > 0$$
$$\sin \omega > 0.$$

Conclusion 1: Si δ a été pris suffisamment grand, il existe toujours dans le domaine fermé $\bar{D}$ $\alpha \leqq u \leqq \beta$, $\gamma \leqq v \leqq \delta$ un zéro de la fonction $\sin \omega$.

Conclusion 2: Soit Q un zéro de $\sin \omega$ d'ordonnée minimum v^* dans $\bar{D}$. Si au point Q $\omega \equiv \pi (\mathrm{mod}\, 2\pi)$, Q est situé à l'extrémité droite $u = \beta$ du segment $v = v^*$. Par Q passe une ligne de niveau $\omega \equiv \pi (\mathrm{mod}\, 2\pi)$ — de classe C^p — pour laquelle

$$-\infty \leqq dv : du < 0; \tag{10}$$

Si au point Q $\omega \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2\pi)$, Q est situé à l'extrémité gauche $u = \alpha$ du segment $v = v^*$. Par Q passe une ligne de niveau $\omega \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2\pi)$ — de classe C^p — pour laquelle

$$0 < dv : du \leqq +\infty.$$

Démonstration: Conclusion 1.

Soient $(\alpha', 0)$ et $(\beta', 0)$ deux points de l'axe des u tels que

$$\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$$
$$\omega(\alpha', 0) - \omega(\alpha, 0) = \varepsilon$$
$$\omega(\beta, 0) - \omega(\beta', 0) = \varepsilon,$$

A le domaine $\alpha \leqq u \leqq \beta$, $0 \leqq v \leqq v_1 < \delta$ et A' le domaine $\alpha' \leqq u \leqq \beta'$, $0 \leqq v \leqq v_1$. De l'hypothèse $\sin \omega > 0$ sur la portion $\alpha \leqq u \leqq \beta$ de l'axe des u, il est possible de déterminer v_1 de façon que l'on ait $\sin \omega > 0$ dans A, par exemple $0 < \omega < \pi$. Nous avons alors pour tout (u, v) de A', d'après (4),

$$\omega(\alpha, 0) - \omega(u, 0) + \omega(u, v) - \omega(\alpha, v) > 0$$

c.à.d. $\quad \omega(u, v) > \omega(u, 0) - \omega(\alpha, 0) > \varepsilon;$

de même $\quad \omega(u, 0) - \omega(\beta, 0) + \omega(\beta, v) - \omega(u, v) > 0$

ou $\quad \omega(u, v) < \pi - [\omega(\beta, 0) - \omega(u, 0)] < \pi - \varepsilon.$

De ces deux inéquations pour $\omega(u, v)$ dans A' nous tirons

$$\sin\omega(u, v) > \sin\varepsilon.$$

L'équation (4) appliquée à A' donne

$$\omega(\alpha', 0) - \omega(\beta', 0) + \omega(\beta', v_1) - \omega(\alpha', v_1) = \iint_{A'} \sin\omega \, du \, dv > (\beta' - \alpha') \, v_1 \sin\varepsilon,$$

c.à.d., puisque $\qquad \omega(\beta', 0) - \omega(\alpha', 0) > 0$ et $\omega(\alpha', v) > 0$

$$v_1(\beta' - \alpha') \sin\varepsilon < \omega(\beta', v_1) - [\omega(\beta', 0) - \omega(\alpha', 0)] < \pi.$$

Par conséquent

$$v_1 < v_1^* = \frac{\pi}{(\beta' - \alpha') \sin\varepsilon}.$$

Dans $\bar{D}$ nous avons donc un zéro de $\sin\omega$, si l'on choisit $\delta > v_1^*$. c.q.f.d. Remarquons que la grandeur de v_1^* ne dépend que des valeurs que prend ω sur l'axe des u.

Conclusion 2.

Soit v^* l'ordonnée minimum des points $\sin\omega = 0$ dans A. De l'équation (9) pour ω_u:

$$\omega_u(u, v^*) = \omega_u(u, 0) + \int_0^{v^*} \sin\omega \, dv,$$

nous avons en chaque point de l'horizontale $v = v^*$ $\omega_u \neq 0$, donc $(\omega_u, \omega_v) \neq (0,0)$. Il s'ensuit qu'il existe par chaque point de l'horizontale $v = v^*$ une ligne de niveau de ω — de classe C^p — qui, du fait de $\omega_u \neq 0$, coupe l'horizontale $v = v^*$. Les points $\sin\omega = 0$ d'ordonnée minimum ne peuvent par conséquent se situer qu'aux deux extrémités du segment $v = v^*$; à l'extrémité droite nous avons le long de la ligne de niveau $-\infty \leqq dv : du < 0$, à l'extrémité gauche $0 < dv : du \leqq +\infty$. De $\omega_u > 0$ sur $v = v^*$ on tire enfin que $\sin\omega = 0$ ne peut admettre que les solutions $\omega \equiv \pi (\mathrm{mod}\, 2\pi)$ à l'extrémité droite, $\omega \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2\pi)$ à l'extrémité gauche du segment $v = v^*$, c.q.f.d.

§ 3. Des points-bordure.

1. Précisons tout d'abord les notions de bordure et de singularité d'une surface plongée dans un espace ambiant, en particulier dans l'espace euclidien à trois dimensions [13].

Considérons une surface topologique F donnée in abstracto, munie d'une structure q fois différentiable, respectivement analytique. Une telle surface sera dite surface différentiable de classe C^q, respectivement de classe C^Ω. Donnons-nous sur F trois fonctions de classe C^q et interprétons ces fonctions comme étant les trois composantes d'un vecteur $\mathfrak{x}$ de l'espace ordinaire R^3. Si nous supposons encore les vecteurs $\mathfrak{x}_u$ et $\mathfrak{x}_v$ linéairement indépendants (hypothèse ne dépendant pas du choix, parmi l'ensemble, du système de coordonnées u, v), le vecteur $\mathfrak{x}$ définit une *surface dans l'espace* $F' = \mathfrak{x}(F)$. F' est une application localement topologique de la surface F dans l'espace R^3; F est la *surface des paramètres* de F'.

La géométrie euclidienne de R^3 induit, comme on le sait, une géométrie sur F', laquelle, à son tour, au moyen du vecteur $\mathfrak{x}$, définit une métrique

riemannienne sur F; la notion de distance $\varrho(\alpha, \beta)$ de deux points α et β de F se définit comme étant la limite inférieure des longueurs de toutes les courbes reliant α et β.

Nous donnerons la définition suivante du concept point-bordure d'une surface F': un point B' de l'espace R^3 n'appartenant pas à F' est appelé *point-bordure* de F', s'il existe sur F une suite de points α_i telle que $\lim \mathfrak{x}(\alpha_i) = B'$ et telle que les distances $\varrho(\alpha_1, \alpha_i)$ soient bornées.

Il est évident que l'ensemble des points-bordure d'une surface quelconque de l'espace — ensemble appelé aussi la *bordure* de la surface — peut admettre, même pour une surface $K = -1$, une configuration des plus compliquées. Son étude n'a d'intérêt que si nous restreignons nos considérations aux surfaces formant un tout, aux surfaces n'étant pas partie d'une surface plus étendue, nous entendons par là aux surfaces dites non prolongeables, dont voici la définition:

Un point-bordure B' d'une surface F' est appelé *point-bordure régulier* de F', s'il existe une extension $\bar{F}'$ de F' comprenant B' à son intérieur. La surface est dite alors *prolongeable* au delà du point-bordure B'. Lorsque il n'existe pas d'extension $\bar{F}'$ satisfaisant à ces conditions, B' se nomme *point-bordure singulier* ou simplement *singularité* de F', la surface elle-même *non prolongeable au delà du point-bordure* B'. Etant points-bordure, les points singuliers n'appartiennent pas à la surface.

Une surface est *non prolongeable* lorsqu'elle ne possède pas de points-bordure réguliers.

2. L'ensemble des surfaces auxquelles s'applique le théorème que nous nous proposons de démontrer est formé des surfaces à courbure négative constante égale à -1 non prolongeables dites sans ramifications. La définition de cette dernière appellation nécessite les deux remarques préliminaires suivantes:

1— Il est aisé de voir que, sur une surface $K = -1$ non prolongeable, seules des singularités de la surface peuvent arrêter l'extension d'un quadrilatère asymptotique donné: si tous les points de l'un des côtés Γ', extrémités comprises, d'un tel quadrilatère A'_0 appartiennent à la surface, le voisinage de chacun d'entre eux peut, selon les propriétés établies au § 1, être recouvert d'un réseau asymptotique de coordonnées; l'ensemble de ces réseaux locaux forment une extension du réseau défini dans A'_0. Il est alors possible de déplacer, sans quitter la surface, le côté Γ' tout entier vers l'extérieur de A'_0.

2— Si l'extension d'un quadrilatère asymptotique A'_0 ne peut être empêchée que par la présence de singularités, il résulte d'autre part du lemme I traitant de la régularité de la fonction $\omega_u(u, v)$ sur la frontière d'un domaine caractéristique, que les 4 côtés restent, tout au long du processus d'extension, des courbes régulières, que ces côtés atteignent ou non des singularités de la surface:

Puisque v mesure la longueur d'arc le long des lignes asymptotiques $u =$ const., chacune de ces lignes possède, pour $v = \delta$, un point limite dans l'espace. L'image sphérique du réseau formant lui aussi un réseau de TCHÉBY-

CHEFF, le vecteur normal ξ admet pour la même raison le long d'une ligne asymptotique u = const. une position limite pour $v = \delta$. Considérons dans A_0' un ruban asymptotique $u = u_0$ et le long de ce ruban la suite (pour v croissant) des trièdres de FRENET des rubans v = const. De cette suite prenons une suite partielle convergente pour $v = \delta$. A chaque trièdre de la suite partielle correspond un ruban asymptotique v = const.; celui-ci possède les invariants

$$a_1 = \pm 1$$
$$b_1 = 0$$
$$c_1 = -\omega_u.$$

La surface étant supposée de classe C^{q-1}, c.à.d. la fonction génératrice de classe C^{q-2} dans le système asymptotique de coordonnées u, v, ces invariants, en particulier la courbure géodésique $c_1 = -\omega_u$, sont de classe $C^{q-3} (q-3 = 0, 1, \ldots, \infty, \Omega)$ dans A_0'; ils admettent donc tous trois, suivant le Lemme I une valeur limite pour $v = \delta$, valeur étant de classe C^{q-3} $(q-3 = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$ sur le bord $v = \delta$[2]). Puisque les solutions d'un système d'équations différentielles linéaires — dans notre cas les équations de FRENET (6) des rubans asymptotiques v = const, — dépendent de façon continue et du paramètre v intervenant dans ces équations par l'intermédiare des invariants a_1, b_1 et c_1, et des trièdres initiaux $u = u_0$, la suite partielle de rubans possède un ruban limite. Ce ruban limite, enfin, ne dépend pas du choix de la suite partielle convergente: les lignes asymptotiques u = const. et v = const. formant un réseau régulier, les rubans de la suite partielle induisent sur une quelconque des lignes asymptotiques u = const. une suite de points qui, elle, ne possède — comme indiqué plus haut — qu'un seul point limite pour $v = \delta$; le même raisonnement est valable pour les images sphériques de ces rubans asymptotiques.

Sur la base de ces deux remarques, il est possible de définir ce que nous entendons par la notion de *surface à courbure négative constante sans ramifications.* Soit A_0' un quadrilatère asymptotique ouvert quelconque, A_0 son image primitive dans le plan des u, v. Supposons que sur l'un des 4 bords Γ' de A_0', par exemple sur le bord $v = \delta$, la fonction $\omega(u, v)$ satisfasse aux mêmes conditions de régularité qu'à l'intérieur de A_0', soit à

$$\omega(u\, v) \in c^{q-2} \qquad (q-2 = 1, 2, \ldots, \infty, \Omega)$$
$$\sin \omega > 0.$$

Soit $P(u_0, \delta)$ un point tel que son image P' soit située sur la surface. Remarquons qu'un tel point existe toujours, car l'hypothèse que tout point de Γ' est singularité pour la surface est incompatible avec les propriétés de prolongement des fonctions ω et par conséquent de la surface elle-même. P' étant point de la surface, la fonction ω_1 définie dans le voisinage de P' peut être considérée comme une extension locale de ω au delà du point-frontière P' de A_0'. Cette extension locale définit de façon univoque, suivant le théorème

[2]) C'est ici que nous utilisons l'hypothèse faite sur la surface d'être au moins de classe C^3.

d'existence cité au § 2, une extension régulière ω_1 de ω non seulement au voisinage de P, mais encore au delà de chaque point de Γ. A cette extension ω_1 correspond dans l'espace une extension A_1' du quadrilatère A_0', A_1' n'étant pas nécessairement située entièrement sur la surface. Nous dirons que la surface F' est sans ramifications, s'il existe — quel que soit le quadrilatère A_0' choisi sur F' — autour de chaque point de Γ' appartenant à F' un voisinage entièrement situé à la fois et sur F' et sur A_1'.

Notons que toute surface analytique est sans ramifications au sens ci-dessus: en effet, l'extension A_1' définie à partir du voisinage de P' représente une extension analytique de A_0' non seulement aux environs de P' mais au delà de tout point Q' de Γ' appartenant à la surface. L'extension locale (analytique) au delà de Q' que nous aurions pu définir directement à partir de la fonction ω au voisinage de Q' s'identifie bien avec A_1', puisque le prolongement analytique d'une fonction analytique dans un domaine simplement connexe est nécessairement unique.

Voici un exemple simple d'un morceau de surface ne satisfaisant pas à la définition des surfaces sans ramifications, appartenant donc à ce que nous appellerons une surface ramifiée: soit, dans les $2^{\text{ème}}$, $3^{\text{ème}}$ et $4^{\text{ème}}$ quadrants du plan des u, v, $\omega_1(u, v)$ la solution de l'équation (4) se réduisant à $\frac{\pi}{2} + u^4$ sur l'axe des u et à $\frac{\pi}{2} + v^4$ sur l'axe des v, $\omega_2(u, v)$ la solution dans le même domaine déterminé par les valeurs initiales sur les axes $\frac{\pi}{2} - u^4$, respectivement $\frac{\pi}{2} - v^4$; les solutions $\omega_3(u, v)$, respectivement $\omega_4(u, v)$, déterminées dans le premier quadrant par les valeurs $\frac{\pi}{2} + u^4$ et $\frac{\pi}{2} - v^4$, respectivement par les valeurs $\frac{\pi}{2} - u^4$ et $\frac{\pi}{2} + v^4$ sur les axes, réunissent les deux fonctions ω_1 et ω_2 en une fonction $\omega(u, v)$ ramifiée à l'origine, analytique dans tout le plan, excepté sur les demi-axes positifs où elle n'est que de classe C^3. A l'origine, la seconde condition de régularité $\sin \omega > 0$ étant remplie, une étude un peu approfondie indique qu'il est possible de faire correspondre à la fonction ramifiée $\omega(u, v)$ dans le voisinage de l'origine, une surface $K = -1$ ramifiée, topologiquement équivalente à la surface décrite dans l'espace par le vecteur de composantes (u, v, ω).

3. Passons maintenant à la démonstration des théorèmes énoncés dans l'introduction, théorèmes que nous rassemblerons en une seule proposition, que voici:

La bordure d'une surface $K = -1$ de classe C^q ($q = 3, 4, \ldots, \infty, \Omega$), non prolongeable et sans ramifications, comprend au moins un arc de courbe. En chaque point de cet arc, le plan tangent à la surface admet une position limite bien définie; l'arc de courbe et l'ensemble des plans tangents limites le long de cet arc forment un ruban de classe C^{q-1} ($q = 3, 4, \ldots, \infty$).

Démonstration: Soit O' un point d'une surface F' satisfaisant aux hypothèses du théorème. Puisque dans tout système asymptotique de coordonnées

la fonction ω_u ne peut être stationnaire le long d'une courbe v ($\omega_{uv} = \sin\omega$), supposons $\omega_u \neq 0$ en O'. Soient l_1 et l_2 les deux lignes asymptotiques passant par O'. Introduisons dans le voisinage de O' un système asymptotique de coordonnées u, v, de façon que l'on ait $v = 0$ sur l_1, et $u = 0$ sur l_2. Sur les lignes $v =$ const. respectivement $u =$ const. définissons les sens croissants des paramètres de manière à avoir en O'

$$\omega_u > 0$$
$$\sin\omega > 0$$ [3]).

Nous remarquerons qu'il y a exactement deux systèmes satisfaisant à ces conditions, chaque système correspondant à une orientation de la surface; on passe de l'un des systèmes à l'autre par le transformation $\bar{u} = -u$, $\bar{v} = v$. Les sens des v croissants dans ces deux systèmes étant identiques, les deux inégalités ci-dessus définissent sur les courbes de la seconde famille, en particulier sur l_2 un sens privilégié d'orientation. Nous voulons démontrer qu'en nous déplaçant sur la courbe l_2 dans le sens des v croissants — sens que nous appellerons *sens privilégié de parcours* — nous atteindrons l'arc de courbe dont fait état le théorème à démontrer.

Soit A_0' un quadrilatère asymptotique entourant O' tel que, sur le segment qu'il intercepte sur l'axe des u, on ait $\omega_u > 0$, soit A_0 l'image primitive de A_0' dans le plan des u, v. Le choix du système de référence nous permet d'appliquer le lemme II établissant l'existence des zéros de la fonction $\sin\omega$. La conclusion 1 certifie la présence dans la direction des v croissants d'une singularité de la surface, le premier zéro de la fonction $\sin\omega$, si d'autres singularités n'empêchent au préalable l'extension suffisante de A_0'. Soit $\delta^*(\alpha, \beta)$ la limite supérieure des δ, c.à.d. la valeur de δ pour laquelle l'extension de A_0' prend fin dans la direction des v croissants (δ^* dépend éventuellement de α et de β fixant la largeur de A_0'), A_1' le quadrilatère semi-ouvert $\alpha \leqq u \leqq \beta$, $\gamma \leqq v < \delta^*$, A_1 son image primitive dans le plan des u, v. A l'intérieur de A_1, respectivement A_1', la fonction ω satisfait aux deux conditions de régularité

a) $\omega(u, v) \in C^{q-2}$

b) $\sin\omega > 0$.

Comme nous l'avons établi plus haut, les points-frontière $v = \delta^*$ de A_1' forment une courbe spatiale régulière Γ'; soit S' une singularité de la surface située sur Γ'. Montrons tout d'abord qu'en S' l'une au moins des deux conditions a) ou b) n'est pas satisfaite. En effet, si en S' la fonction ω satisfait aux deux conditions a) et b), la première est, d'après les propriétés de la fonction ω établies au § 2, remplie non seulement en S', mais en tout point de Γ', la seconde, par continuité, sur une portion Γ_1' de Γ' située dans le voisinage de S'. Il existe alors, comme nous l'avons vu plus haut, sur Γ_1' un point-frontière P' appartenant à la surface. L'existence d'un morceau régulier de surface dans le voisinage de P' permet par conséquent de définir une extension de A_1'

[3]) cf. l'hypothèse du lemme II.

au delà de Γ_1'', extension se confondant avec la surface F', selon l'hypothèse des surfaces sans ramifications, dans le voisinage de tous les points de Γ_1' situés sur F'. S' ne peut par conséquent pas être singularité de F', ou alors F' n'est pas non prolongeable comme nous l'avons supposé.

En une singularité S' située sur Γ'' nous avons donc deux possibilités: 1— au point S du plan des u, v, correspondant à S', la première condition a) n'est pas remplie. Des propriétés de la fonction ω établies au § 2, il s'ensuit qu'elle n'est satisfaite en aucun point $v = \delta^*$, c.à.d. que dans l'espace chaque point de Γ'' est singularité de F'. Γ'' est le *ruban singulier* dont nous avons postulé l'existence dans le théorème. Géométriquement parlant, le caractère singulier de la surface au voisinage d'un point de Γ'' est fort peu prononcé; le plan tangent admet une position limite, comme si le point considéré était point de la surface. Remarquons aussi que, selon (3), les courbures principales k_1 et k_2 appartiennent à la même classe de différentiation C^{q-2} que la fonction $\omega(u, v)$.

2— En S la première condition a) est remplie tandis que b) ne l'est pas: $\sin\omega(S) = 0$. Cette condition entraîne, suivant les équations (3), qu'en S' l'une des courbures principales de la surface est infinie. De la conclusion 2) du lemme II, S se trouve en l'une ou l'autre extrémité de Γ. Supposons S à l'extrémité $u = \beta$ et appliquons le lemme: déplaçons dans le plan des u, v le point de coordonnées $(\beta, 0)$ dans la direction des u croissants; le sommet de coordonnée β et $\delta^*(\alpha, \beta)$ se déplace sur une ligne de niveau $\omega \equiv \pi \pmod{2\pi}$ — de classe C^{q-2} comme la fonction ω — pour laquelle on a

$$-\infty \leqq dv : du < 0. \tag{10}$$

Soit G le domaine du plan des u, v délimité par les 4 caractéristiques $u = 0$, $u = \beta + \Delta\beta$, $v = 0$, $v = \delta^*$ et un arc de la ligne de niveau en question. Montrons qu'en chaque point $R(u, v)$ de cette courbe de niveau les vecteurs $\mathfrak{x}$ de la surface et ξ de son image sphérique admettent des positions limites univoques. Soit $P_1, P_2, \ldots$ une suite de points convergeant vers R, $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots$ la suite obtenue par projection verticale de $P_1, P_2, \ldots$ sur l'horizontale $v =$ const. passant par R. Les vecteurs $\mathfrak{x}(u, v)$ et $\xi(u, v)$, lorsque le point (u, v) appartient à G, forment des réseaux de TCHÉBYCHEFF, le premier sur la surface F', le second sur la sphère unitaire. Le point frontière R considéré comme point limite de la suite des $\overline{P}_i$ possède dans l'espace un point image R' univoque. De plus, la distance spatiale entre les images $P_i' = \mathfrak{x}(P_i)$ et $\overline{P}_i' = \mathfrak{x}(\overline{P}_i)$ étant inférieure ou égale à la distance de P_i à $\overline{P}_i$ dans le plan des u, v (puisque P_i' est relié à $\overline{P}_i'$ par un arc de courbe de longueur égale à la distance de P_i à $\overline{P}_i$ dans le plan des u, v), la distance spatiale entre l'image P_i' de P_i et l'image R' définie plus haut est majorée par la somme des distances $\overline{P_i\overline{P}_i}$ et $\overline{\overline{P}_i R}$. Cette distance tend bien vers zéro lorsque P_i tend vers R. Le même raisonnement est utilisable pour démontrer l'existence du vecteur limite ξ en R, de même que pour établir la continuité et la dérivabilité des vecteurs limites $\mathfrak{x}$ et ξ le long de notre ligne de niveau. Nous avons donc le

long de cette courbe

$$d\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_u du + \mathfrak{x}_v dv$$

c.à.d., puisque nous avons supposé $\omega \equiv \pi (\mathrm{mod}\, 2\pi)$

$$d\mathfrak{x} = (u' - v')\, \mathfrak{x}_u dv,$$

ou, en utilisant (10)

$$ds = |d\mathfrak{x}| = |u' - v'| \cdot |d\lambda| \neq 0,$$

λ étant un paramètre régulier sur la ligne de niveau.

Un raisonnement identique nous aurait amené à la conclusion

$$ds = |d\mathfrak{x}| = |u' + v'| \cdot |d\lambda| \neq 0$$

si la singularité au lieu de se situer au sommet supérieur droit du quadrilatère A_1, s'était trouvée en son sommet supérieur gauche. Le point image S' de S est donc, comme dans le premier cas, situé sur un arc de courbe, c.q.f.d.

Un calcul élémentaire démontre enfin que le vecteur $\mathfrak{x}(u(\lambda), v(\lambda))$ et le vecteur $\xi(u(\lambda), v(\lambda))$ le long de la ligne de niveau considérée engendrent un ruban asymptotique de classe C^{q-1} $(q-1 = 2, 3, \ldots, \infty, \Omega)$ possédant une torsion géodésique a et une courbure géodésique c égales à

$$\left.\begin{aligned} a &= \pm \frac{u' - \cos\omega \cdot v'}{u' + \cos\omega \cdot v'} \\ c &= \frac{-\,\omega_u u'}{|u' + \cos\omega \cdot v'|} \end{aligned}\right\} \text{où } \cos\omega = \pm 1. \tag{11}$$

4. Le développement du raisonnement qui nous a conduit au but fait ressortir le rôle joué dans la démonstration par l'hypothèse excluant les surfaces avec ramifications: si l'agrandissement du quadrilatère asymptotique avait été rendu impossible au delà de sa frontière $v = \delta^*$ par la présence de ramifications, nous aurions été obligés de restreindre nos considérations à un quadrilatère plus étroit, prolongeable au delà de P' dans la direction des v croissants, afin d'être à même d'utiliser le lemme II. La présence d'une seule et même d'un nombre fini de ramifications de ce genre sur la frontière des quadrilatères asymptotiques considérés successivement n'entraverait donc pas essentiellement la démonstration, elle n'obligerait qu'à rétrécir toujours plus le quadrilatère étudié. D'autre part, puisque le raisonnement peut être effectué à partir d'un quadrilatère initial A_0' quelconque sur la surface, il résulte que le théorème sans l'hypothèse excluant les ramifications ne peut être démontré de cette manière que dans le cas de surfaces sur lesquelles il n'est pas possible de trouver — du fait de la présence de ramifications — un quadrilatère asymptotique suffisamment étendu. Une définition des surfaces $K = -1$ excluant ce cas seul étant trop subtile et peu intuitive, il nous a semblé préférable de formuler le théorème pour l'ensemble des surfaces sans ramifications.

Si, dans le plan des u, v, les images primitives des points de ramification d'une surface quelconque $K = -1$ sont nécessairement en nombre infini, il est néanmoins difficile de connaître, par la méthode développée dans ce travail, leur répartition dans l'espace.

§ 4. Les réseaux de TCHÉBYCHEFF du plan hyperbolique.

Les démonstrations et raisonnements effectués sur les surfaces $K = -1$ de l'espace euclidien, en particulier sur les réseaux de leurs lignes asymptotiques peuvent être appliqués, sans modifications essentielles, aux réseaux de TCHÉBYCHEFF du plan hyperbolique. Pour simplifier, nous ne traîterons que le cas des réseaux analytiques.

Dans un domaine ouvert D du plan hyperbolique, nous appellerons *réseau* tout système de deux familles de courbes recouvrant D, tel que pour tout point de D, il existe un voisinage dans lequel les deux familles de courbes peuvent être utilisées comme courbes de coordonnées u = const. et v = const.

Un réseau du plan hyperbolique est dit *non prolongeable* s'il n'existe pas, dans le plan, de réseau plus étendu le contenant en entier.

Un réseau est dit *réseau de* TCHÉBYCHEFF si l'on peut exprimer la métrique du plan sous la forme

$$I = ds^2 = du^2 + 2\cos\omega(u, v) \cdot du \cdot dv + dv^2;$$

$\omega(u,v)$ en est la fonction génératrice. Cette dernière fonction possède les trois propriétés reconnues à nos réseaux asymptotiques, à savoir

a) $\omega(u,v) \in C^{\Omega}$ si le réseau est de classe C^{Ω} et inversément,

b) $\sin\omega(u,v) > 0$,

c) $[\omega]_A = \iint\limits_A \sin\omega\, du\, dv$, où A représente un quadrilatère délimité par 4 arcs de courbes du réseau.

Inversément, ces 3 conditions représentent les conditions locales suffisantes pour qu'une fonction univoque en u et v puisse être considérée comme fonction génératrice $\omega(u, v)$ d'un réseau de TCHÉBYCHEFF recouvrant un domaine du plan hyperbolique. En effet, le voisinage d'un point P du plan (appartenant au domaine de définition de ω) dans lequel est définie la métrique I de courbure $K = -1$ peut, comme on le sait, être appliqué isométriquement sur le plan hyperbolique.

Nous voulons montrer que la bordure d'un domaine du plan hyperbolique recouvert d'un réseau de TCHÉBYCHEFF possède des propriétés semblables à celles de la bordure des surfaces $K = -1$ plongées dans l'espace euclidien. La démonstration de l'existence d'une courbe-bordure se réduit ici au raisonnement suivant: en agrandissant une maille du réseau dans la direction privilégiée, il sera toujours possible d'atteindre sur son pourtour soit une courbe sur laquelle la fonction $\omega(u, v)$ cessera d'être régulière, soit un point d'une ligne de niveau $\sin\omega = 0$ pour laquelle les inégalités

$$ds = |u' - v'| \cdot |d\lambda| \neq 0$$

respectivement $$ds = |u' + v'| \cdot |d\lambda| \neq 0$$

intervenant en fin de démonstration restent valables. La régularité de cette courbe-bordure est une conséquence du fait que, dans le plan hyperbolique, un point et une direction déterminent univoquement une courbe de courbure donnée. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

La bordure d'un domaine du plan hyperbolique recouvert d'un réseau de Tchébycheff *analytique et non prolongeable comprend au moins un arc de courbe; parmi ces courbes il y en a toujours une au moins qui est dérivable autant de fois que l'on veut.*

§ 5. Exemples.

Exemple 1.

La solution de l'équation (4) se réduisant à

$$\omega(u,0) = \frac{\pi}{2} + \varepsilon \sin \frac{u}{1-u^2}, \quad \omega(0,v) = \frac{\pi}{2} + \varepsilon \sin \frac{v}{1-v^2}$$

sur l'axe des u, respectivement sur l'axe des v est analytique à l'intérieur du carré unitaire $|u| < 1$, $|v| < 1$, satisfait, en prenant ε suffisamment petit, à $\sin\omega > 0$ dans ce domaine. Sur la frontière de ce domaine elle cesse d'être régulière. Elle engendre donc localement dans l'espace une surface $K = -1$[4]) analytique et non prolongeable, délimitée par 4 arcs de courbe. En un quelconque des points-bordure, la fonction ω et par conséquent les courbures principales sont indéfinies (singularité du premier type). La première assertion du point 6 de l'introduction se trouve ainsi démontrée.

Exemple 2.

Les solutions connues les plus simples de l'équation (4) sont fonctions d'une seule variable intermédiaire, à savoir de la combinaison linéaire $l = \lambda u + \mu v + \nu$ (λ, μ, ν constants). L'équation sous sa forme (8) se réduit dans ce cas à l'équation différentielle ordinaire

$$\lambda \mu \frac{d^2 \omega}{d l^2} = \sin \omega,$$

dont les solutions sont exprimables par des fonctions elliptiques ou exponentielles. A ces fonctions génératrices particulières correspondent les surfaces hélicoïdales de Minding [12], et, dans le cas $\lambda = \mu$, les surfaces de rotation.

Exemple 3.

La méthode développée dans ce travail permet de construire un nouvel exemple simple de surface $K = -1$ non prolongeable. Les valeurs initiales $\omega(u,0) = \omega(0,v) = \omega_0 =$ const. définissent dans le plan des u, v une solution unique $\omega(u,v)$ de l'équation $\omega_{uv} = \sin\omega$; cette solution est analytique dans tout le plan u, v. Au sujet des propriétés de cette fonction, remarquons tout d'abord que la fonction $\overline{\omega}(u,v) = \omega(\lambda u, \lambda^{-1} v)$, où λ est une constante non nulle, satisfait à l'équation $\overline{\omega}_{uv} = \sin\overline{\omega}$ et admet les mêmes conditions initiales pour $u = 0$ et $v = 0$. Selon la propriété d'unicité exprimée dans le théorème d'existence cité plus haut, $\overline{\omega}(u,v) = \omega(u,v)$: les lignes de niveau de la fonction $\omega(u,v)$ sont ainsi des hyperboles équilatères $uv =$ const.

Les lignes de niveau $\sin\omega = 0$ nous intéressent spécialement. Si l'on s'en tient aux solutions pour lesquelles $0 < \omega_0 < \pi$, nous avons, d'après l'équation c') (§ 1, no 1), en un point du premier quadrant $u > 0$, $v > 0$ situé suffisamment près de l'axe des u

$$\omega_u(u,v) = \omega_u(u,0) + \int_0^v \sin\omega \, dv = \int_0^v \sin\omega \, dv > 0.$$

[4]) Respectivement un réseau de Tchébycheff dans le plan hyperbolique.

La direction des v croissants dans le premier quadrant est, selon le lemme II, direction privilégiée: il existe dans le premier quadrant une branche d'hyperbole uv = const. sur laquelle $\sin\omega = 0$. Soit $uv = \lambda_1$ la première ligne $\sin\omega = 0$ atteinte de cette façon; puisque $\omega_u > 0$ sur tout segment d'horizontale compris entre l'axe des v et cette hyperbole, l'équation $\sin\omega = 0$ sur $uv = \lambda_1$ n'admet que la solution $\omega = \pi$. La fonction ω ne dépendant que du produit uv, la seconde branche de cette hyperbole, située dans le troisième quadrant du plan, est, elle aussi, ligne de niveau $\omega = \pi$. Dans les deuxième et quatrième quadrants enfin, ω possède une ligne de niveau $uv = \lambda_2$ sur laquelle $\omega = 0$: la transformation $\bar{u} = -u$, $\bar{v} = +v$ et $\bar{\omega} = \pi - \omega$ applique les deuxième et quatrième quadrants sur les premier et troisième et permet un raisonnement identique. Dans le domaine du plan des u, v délimité par les 4 branches d'hyperboles $uv = \lambda_1$ et $uv = \lambda_2$, la solution $\omega(u,v)$ vérifie les conditions $\omega \in c^{\Omega}$ et $\sin\omega > 0$; elle engendre par conséquent dans l'espace une surface $K = -1$[4]), analytique et non prolongeable. Cette surface possède 4 courbes-bordure, deux courbes $\omega = 0$ et deux courbes $\omega = \pi$. Les lignes asymptotiques $u = 0$ et $v = 0$ sont rectilignes, du fait que sur les axes de coordonnées la courbure géodésique s'annule, $c_1 = -\omega_u = 0$, $c_2 = +\omega_v = 0$, donnant ainsi, d'après les équations de Frenet (6), une valeur constante au vecteur tangentiel $\mathfrak{t}$; ω_0 représente en particulier l'angle formé par ces deux asymptotiques rectilignes. La surface possède de plus une aire infiniment grande: l'aire hyperbolique du premier quadrant, délimitée par l'axe des u, les asymptotiques $u = u_0$, $v = v_0$ $(u_0 v_0 \geqq \lambda_1)$ et la courbe $uv = \lambda_1$, s'exprime, en utilisant la formule de Stokes, par

$$\iint \sin\omega\, du\, dv = \iint \omega_{uv}\, du\, dv = -\oint \omega_u du$$

$$\text{et puisque sur } uv = \lambda_1 : \omega_u = \frac{\partial\omega}{\partial(uv)} \cdot \frac{\partial(uv)}{\partial u} = \text{const.}\ v = \text{const.}\ \frac{1}{u}$$

$$\iint \sin\omega\, du\, dv = \pi - \omega_0 + \text{const.} \int_u^{u_0} \frac{du}{u} = \pi - \omega_0 + \text{const.} \log\left(\frac{u_0 v_0}{\lambda_1}\right),$$

expression tendant vers l'infini en même temps que u_0 ou v_0.

La surface correspondant à la valeur initiale $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ possède des propriétés intéressantes. Dans le plan u, v, les lignes de niveau $uv = \lambda_1$ et $uv = \lambda_2$ sont symétriques: $\lambda_1 = -\lambda_2$. La surface dans l'espace (voir figure) possède, puisque l'angle des deux asymptotiques rectilignes est droit $\left(\omega_0 = \frac{\pi}{2}\right)$, toute une série de symétries spatiales. De plus cette surface est la seule, parmi les surfaces soustendues par deux droites, la seule surface $K = -1$ aussi que nous connaissions, à posséder des quadrilatères asymptotiques d'aire maximum 2π. Selon la formule d'Hazzidakis

$$F = \iint_A \sin\omega\, du\, dv = [\omega]_A$$

reliant l'aire F d'un quadrilatère asymptotique A à la somme alternée $[\omega]_A$.

F est en effet bornée par la valeur maximum que peut prendre $[\omega]_A$ soit par 2π. Du fait de $\lambda_1 = -\lambda_2$, il existe sur la surface des quadrilatères A dont les quatre sommets sont situés sur les lignes de singularités $\omega = 0$ et $\omega = \pi$. Pour ces quadrilatères la somme alternée est exactement égale à 2π.

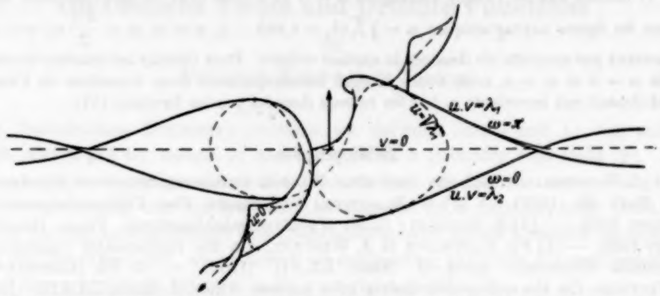

Fig. 1. Surface à courbure négative constante soustendue par deux droites se coupant à angle droit (vue axonométrique).

Nous avons construit la figure représentée ci-dessus par l'artifice suivant, permettant d'éviter l'intégration numérique des équations différentielles partielles représentant le passage de la valeur $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ à la fonction $\omega(u,v)$ puis à la surface dans l'espace:

Intégration de l'équation différentielle $\omega_{uv} = \sin\omega$, $\omega(u,0) = \omega(0,v) = \omega_0 = \text{const.}$ La fonction $\omega(u,v)$, ne dépendant que du produit $x = uv$, satisfait à

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{d\omega}{dx}\,x_u\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{d\omega}{dx}\cdot v\right) = \frac{d^2\omega}{dx^2}\,u\,v + \frac{d\omega}{dx} = \omega''\,x + \omega' = (\omega'\,x)',$$

donc à l'équation différentielle ordinaire

$$(\omega' x)' = \sin\omega,$$

dont l'intégration numérique s'effectue sous la forme

$$\omega' = \frac{1}{x}\int \sin\omega\,dx.$$

Passage de la fonction $\omega(u,v)$ à la surface dans l'espace: L'intégration des équations

$$d\mathfrak{x}^2 = du^2 + 2\cos\omega\,du\,dv + dv^2$$
$$(d\xi\,d\mathfrak{x}) = \pm 2\sin\omega\,du\,dv$$

peut être évitée en intégrant la surface le long des lignes asymptotiques qui, elles, satisfont à des équations différentielles ordinaires (cf. l'intégration des équations aux dérivées partielles du type hyperbolique au moyen des caractéristiques).

La troisième équation de Frenet (6) des rubans asymptotiques donne après différentiation et en utilisant la seconde équation (6)

$$\ddot{\xi} = -a\,\dot{\mathfrak{n}} = -a(-c\,\mathfrak{t} + a\,\xi) = a\,c\,\mathfrak{t} - \xi \qquad (a^2 = -K = 1).$$

Puisque

$$\mathfrak{t} = (\mathfrak{n} \times \xi) = \frac{-1}{a}\,(\dot{\xi}\times\xi),$$

on obtient pour la normale ξ l'équation différentielle ordinaire (non linéaire)

$$\ddot{\xi} + c\,(\dot{\xi}\times\xi) + \xi = 0$$

où $c = -\omega_u$ sur une ligne $v = \text{const}$, $c = +\omega_v$ sur une ligne u-const. Le vecteur $\mathfrak{x}$ lui-même se calcule par l'intégrale

$$\mathfrak{x}(s) = \int \mathfrak{t}\, ds = \frac{1}{a}\int (\xi \times \dot{\xi})\, ds.$$

L'intégration de ces équations est univoquement déterminée à partir des trièdres initiaux $(\mathfrak{t}, \mathfrak{n}, \xi)$ donnés sur les rubans rectilignes $u = 0$ et $v = 0$. Par ce procédé, nous avons obtenu les lignes asymptotiques $u = \sqrt{\lambda_1}(\lambda_1 = 1{,}862\ldots)$, $u = \pi$, $u = \frac{3\pi}{2}$ et $u = 2\pi$, permettant par symétrie de dessiner la surface entière. Pour obtenir les courbes de singularités $\omega = 0$ et $\omega = \pi$, nous avons intégré numériquement leurs équations de Frenet en attribuant aux invariants a, b, c les valeurs données par les formules (11).

Bibliographie.

[1] L. Bieberbach: Hilberts Satz über Flächen konstanter negativer Krümmung. Acta Math. 48 (1926). — [2] W. Blaschke: Vorlesungen über Differentialgeometrie. Springer 1924. — [3] E. Goursat: Cours d'analyse mathématique. Paris: Gauthier-Villars 1942. — [4] Ph. Hartmann et A. Wintner: On the fundamental equations of differential Geometry. Amer. J. Math. LXXII (1950). — [5] Ph. Hartmann et A. Wintner: On the asymptotic curves of a surface. Amer. J. Math. LXXIII (1951). [6] J. N. Hazzidakis: Über einige Eigenschaften der Flächen mit konstantem Krümmungsmaß. Crelles J. 88 (1880). — [7] D. Hilbert: Appendice à la 5ème édition des Grundlagen der Geometrie. — [8] E. Holmgren: C. r. Acad. Sci. (Paris) 134 (1902). — [9] E. R. van Kampen: The theorems of Gauss-Bonnet and Stokes. Amer. J. Math. LX (1938). — [10] F. Klein: Trans. Amer. Math. Soc. 2 (1871). [11] F. Klein: Vorlesungen über Nicht-euklidische Geometrie. Berlin: Julius Springer 1928. — [12] F. Minding: J. f. Math. 19 (1839). — [13] J. J. Stoker: Über die Gestalt der positiv gekrümmten offenen Flächen im dreidimensionalen Raume. Comp. Math. 3 (1936).

(Eingegangen am 6. Februar 1955.)

ROBINSON, A.
Math. Annalen, Bd. 130, S. 257—271 (1955)

On Ordered Fields and Definite Functions

By
ABRAHAM ROBINSON in Toronto

1. Introduction. HILBERT's problem on definite forms (ref. 1) was solved by E. ARTIN [1] by means of the concept of a formally real field [2]. The present paper contains alternative derivations of ARTIN's main theorems. While still basing our analysis on the concept of a formally real field, we obtain various improvements and generalisations of ARTIN's results (sections 3, 4, 5). At the same time, we establish an embedding principle for mathematical structures which is of interest in its own right (section 2).

It will be assumed that the reader is familiar with the notation and principal results of the lower predicate calculus. We use $\sim$, $\vee$, $\wedge$, $\supset$, $\equiv$ for the connectives of negation, disjunction, conjunction, implication and equivalence, and (x), (y), ..., $(\exists\, x)$, $(\exists\, y)$, ..., for universal and existential quantification, respectively. A well-formed formula (wff.) which contains free variables is called a *predicate*, any other wff. is a *statement*. We shall say that a wff. X which is of prenex normal form, belongs to the class 0 if it does not include any quantifiers, that it belongs to the class (A) if it does not include any existential quantifiers (i.e. X includes only universal quantifiers, or it does not include any quantifiers at all), and that X belongs to the class (E) if it does not include any universal quantifiers. Finally, we shall say that X is of class (AE) if it belongs to one of the preceding classes, or else if it is of the form

$$X = (x_1) \dots (x_m) (\exists\, y_1) \dots (\exists\, y_n) Z(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$$
$$m \geqq 1, n \geqq 1$$

where the *matrix* Z does not contain any further quantifiers. Thus (AE) comprises the statements of one of SKOLEM's normal forms. We may define further classes of wff. in prenex normal form, according to the sequence of blocks of quantifiers of the same type in their prefix, but these will not be required here.

It is not difficult to verify that the concept of a commutative field can be expressed by a set of axioms (i.e. statements) of class (AE) in terms of the relations $E(x, y)$ — "x equals y"—, $S(x, y, z)$ — "z is the sum of x and y" —, and $P(x, y, z)$ — "z is the product of x and y" — and in terms of the individual constants 0 and 1. For example, the existence and uniqueness of the product is expressed by

$$(x)\,(y)\,(\exists\, z)\, P(x, y, z)$$

$$(x)\,(y)\,(z)\,(w)\,[P(x, y, z) \wedge P(x, y, w) \supset E(z, w)]$$

and the existence of the inverse by

$$(x)\,(\exists\, y)\,[E(x, 0) \vee P(x, y, 1)].$$

A statement X is *defined* in a structure M if all the relations and individual constants of X occur in M. It is then possible to determine in the usual (not necessarily constructive) way whether or not X holds in M. The set of atomic formulae $R(a_1, \ldots, a_n)$ which hold in M, together with the negations, $\sim R(a_1, \ldots, a_n)$, of those atomic formulae which are defined in M but do not hold in it is called the *(complete) diagram* of M.

A statement X is defined in a set of statements K if all the relations and individual constants of X occur also in statements of K. K is called *complete* if for every statement X which is defined in K either X or $\sim X$ is deducible from K. K is said to be *model-complete* if for every model M of K, the set $K \cup N$ is complete, where N is the diagram of M.

Let M_1, M_2 be two structures and N_1, N_2 their diagrams. If $N_1 \subseteq N_2$ then M_2 is, by definition, an extension of M_1. A set of structures $\{M_\nu\}$ is said to be monotonic if the corresponding set of diagrams $\{N_\nu\}$ is monotonic, i.e. if either $N_\nu \subseteq N_\mu$ or $N_\mu \subseteq N_\nu$ for any two elements of $\{N_\nu\}$. Then the *union* of $\{M_\nu\}$, $U\{M_\nu\}$, is the structure whose diagram is $U\{N_\nu\}$, the union of all N_ν.

2. A general embedding principle. A statement X in the lower predicate calculus is *persistent* with respect to a set of statements K if whenever X holds in a model of K then X holds also in all extensions of M which are models of K. If X is persistent with respect to the empty set than it is said to be *absolutely persistent.*

2.1. Lemma. If X belongs to the class (E), then X is absolutely persistent.

The proof is straightforward and may be omitted.

2.2. Lemma. Let $T = \{M_\nu\}$ be a non-empty monotonic set of structures, and let X be a statement of the class (AE) which holds in all the elements M_ν of T. Then X holds also in the union M of T, $M = U\{M_\nu\}$.

Proof. For every element M_ν of T, M is an extension of M_ν. Thus, for $X \,\varepsilon\, (E)$, 2.2 follows directly from 2.1. In the alternative case, let

$$X = (x_1) \ldots (x_n)\, Y(x_1, \ldots, x_n), \qquad n \geqq 1$$

where $Y(x_1, \ldots, x_n)$ belongs to (E). We have to show that for any set of constants of M, $a_1, \ldots, a_n \,\varepsilon\, M$, the statement

$$Y(a_1, \ldots, a_n)$$

holds in M. Now since the set $\{a_1, \ldots, a_n\}$ is finite, there exists a structure $M_\nu \,\varepsilon\, T$ which includes all the constants of this set. But X holds in M_ν, by assumption, and so $Y(a_1, \ldots, a_n)$ holds in M_ν. Furthermore, $Y(a_1, \ldots, a_n)$ belongs to (E), and so it holds also in M, by 2.1. This proves 2.2.

Let K be a consistent set of statements. The statement X will be said to be *model-consistent* with K if for every model M of K, the set $K \cup N \cup \{X\}$ is consistent, where N is the diagram of M. (Compare ref. 4 for a cognate concept.) Thus, X is consistent with respect to K if and only if for every model M of K there exists a model M' of K which is an extension of M such that X holds in M'.

2.3. Theorem. Let K be a consistent set of statements which belong to the class (AE), $K \subseteq (AE)$, and let $X \varepsilon (AE)$,

$$X = (x_1) \ldots (x_n)\, Y(x_1, \ldots, x_n), \qquad Y \varepsilon (E),\ n \geq 0.$$

In order that X be model-consistent with K it is necessary and sufficient, that for every model M of K and for every set of constants $a_1, \ldots, a_n$ of there exists a model M' of K which is an extension of M such that

$$Y(a_1, \ldots, a_n)$$

holds in M'.

Proof. The condition is necessary. Let M be a model of K, and let $a_1, \ldots, a_n$ be a set of constants of M. If X is model-consistent with respect to K then there exists an extension M' of M which is a model of K such that X holds in M'. But

$$X \supset Y(a_1, \ldots, a_n)$$

is a provable statement, and so $Y(a_1, \ldots, a_n)$ also holds in M'. This shows that the condition of the theorem is necessary.

The condition is also sufficient. Suppose that it is satisfied, for given K and X, and let M be a model of K. Let S be the set of all statements

$$Y(a_1, \ldots, a_n)$$

where $a_1, \ldots, a_n$ is any n-uple of constants of M, and let N be the diagram of M. In order to establish the fact that $K \cup N \cup S$ is consistent, we only have to show that $K \cup N \cup S^*$ is consistent, for any *finite* subset S^* of S. Thus let

$$S^* = \{Y_1, \ldots, Y_n\}$$

where

$$Y_j = Y(a_1^j, \ldots, a_n^j), \qquad j = 1, \ldots, m$$

and where the a_i^j are constants of M. Then $K \cup N \cup \{Y_1\}$ is consistent according to the condition of the theorem.

Let M^1 be a model of $K \cup N \cup \{Y_1\}$, and let N^1 be the diagram of M^1. Then $K \cup N^1 \cup \{Y_2\}$ is consistent according to the condition of the theorem. Let M^2 be a model of this set and let N^2 be the diagram of M^2. Then $K \cup N^2 \cup \cup \{Y_3\}$ is consistent and possesses a model M^3. Continuing in this way, we obtain a monotonic set of m models of K, $\{M^1, M^2, \ldots, M^m\}$, such that Y_j holds in M_j, $j = 1, \ldots, m$. But M^m is an extension of M^j, $j = 1, \ldots, m-1$, and so it satisfies also Y_j, by 2.1. This shows that M^m is a model of $K \cup N \cup \cup \{Y_1, \ldots, Y_m\} = K \cup N \cup S^*$ and implies that $K \cup N \cup S^*$, and hence $K \cup \cup N \cup S$, is consistent.

Let M_1 be a model of $K \cup N \cup S$, with diagram N_1, and let S_1 be the set of all statements $Y(a_1, \ldots, a_n)$, where $a_1, \ldots, a_n$ is any n-uple of constants of M_1. We show as before that $K \cup N_1 \cup S_1$ is consistent. Let M_2 be a model of $K \cup N_1 \cup S_1$, with diagram N_2 and let S_2 be the set of all statements $Y(a_1, \ldots, a_n)$, where $a_1, \ldots, a_n$ is any n-uple of constant of M_2. Then $K \cup N_2 \cup \cup S_2$ is consistent, as before, and possesses a model M_3. Continuing in this

way, we obtain an infinite monotonic sequence of models of K,

$$T = \{M_1, M_2, \ldots, M_\nu, \ldots\}$$

such that M_μ is an extension of M_ν for $\mu \geqq \nu$. Let M_0 be the union of T. Then M_0 is a model of N since it is an extension of M; and, by 2.2 M_0 is a model of K since all the elements of T are models of K. Now let $a_1, \ldots, a_n$ be constants of M_0. Then there exists an $M_\nu \varepsilon T$ which contains these constants. The statement $Y(a_1, \ldots, a_n)$ holds in $M_{\nu+1}$, by construction. It therefore holds in M_0, by virtue of 2.1. We conclude that

$$X = (x_1) \ldots (x_n)\, Y(x_1, \ldots, x_n)$$

holds in M_0, M_0 is a model of $K \cup N \cup \{X\}$, X is model-consistent with K. This completes the proof of 2.3.

By way of illustration, we may apply the theorem to the embedding of any given commutative field M in an algebraically closed field. Let N be the diagram of M and let H be a set of axioms of class (AE) for the concept of a commutative field, as indicated in section 1 above. Construct a sequence of statements X_n, $n = 2, 3, \ldots$ such that X_n affirms

"For any given $x_0, x_1, \ldots, x_n$, the polynomial equation

$$x_0 y^n + x_1 y^{n-1} + \cdots + x_{n-1} y + x_n = 0$$

possesses a root y, or else $x_0 = x_1 = \cdots = x_{n-1} = 0$."

It is not difficult to see that X_n can be formulated as

2.4. $$(x_0)(x_1) \ldots (x_n)\, Z_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

where $Z_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ is a wff. of class (E). For example, for $n = 2$, X_n may be taken as

$$\begin{aligned}(x_0)(x_1)(x_2)(\exists y)(\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)(\exists y_4)\, \big[[\, &P(y, y, y_1) \wedge \\ \wedge\, P(y_1, x_0, y_2) \wedge P(y, x_1, y_3) \wedge S(y_2, y_3, y_4) \wedge S(y_4, x_2, 0)] \vee \\ \vee\, [E(x_0, 0) \wedge E(x_1, 0)]\big].\end{aligned}$$

Thus, we may assume that the statements X_n belong to the class (AE).

In order to establish the existence of an algebraically closed field which is an extension of M, we only have to show that the set

$$H \cup N \cup \{X_2, X_3, \ldots, X_n, \ldots\}$$

is consistent, and this in turn will follow if we can prove the consistency of

$$H \cup N \cup \{X_2, X_3, \ldots, X_n\}$$

for all $n \geqq 2$. But $X_n \supset X_m$ is deducible from H for all $m \leqq n$, and so it only remains for us to prove the consistency of

$$H \cup N \cup \{X_n\}$$

for $n = 2, 3, \ldots$

Let M^* be a model of $K = H \cup N$ and, for given n, let $a_0, a_1, \ldots, a_n$ be a set of constants of M^*. Then $Z_n(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ states that the polynomial

2.5. $$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_{n-1} y + a_n$$

has a root, or else $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$. If the latter alternative applies, or if 2.5 possesses a linear factor in M^*, then $Z_n(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ holds already in M^*. If this is not the case, let $p(y)$ be an irreducible factor of 2.5 in M^*. Then the familiar KRONECKER-STEINITZ construction establishes the existence of an extension M' of M^* in which $p(y)$, and hence 2.5, has a root. It follows that in any case M^* possesses an extension M' which is a model of K such that $Z_n(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ holds in M'. Theorem 2.3 then shows that X_n is model-consistent (hence, consistent) with K. This completes our argument, which may therefore serve as a substitute for the usual procedures involving ZORN's lemma or the well-ordering theorem. However, if we wish to prove that there exists an algebraically closed *algebraic* extension of M, then we require additional results from field theory, i.e. that the sum, difference, product, and quotient of elements which are algebraic (with respect to M) are algebraic and that the root of an equation with algebraic coefficients is again algebraic.

3. Formally real fields. Let H be a set of axioms for the concept of a commutative field, as above, and let G be the set of axioms

$$A(1)$$

$$\sim A(0)$$

$$(x)(y)(z)\,[A(x) \wedge A(y) \wedge P(x, y, z) \supset A(z)].$$

Let M be a model of the set $H \cup G$, and let C be the set of constants of M which satisfy the relation $A(\ )$. Then G states that C is a multiplicative set which contains 1 but which does not contain 0. C will be called the *core* of M.

For any positive integer n, let Y_n be a statement which affirms, for any model of $H \cup G$,

"For any $x_1, \ldots, x_n \varepsilon C$, the equation

$$x_1 y_1^2 + x_2 y_2^2 + \cdots + x_n y_n^2 = 0$$

entails

$$y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0".$$

We may suppose again that all the Y_n belong to the class (AE). For example, for Y_2 we may choose

$$\begin{aligned}(x_1)(x_2)(y_1)(y_2)(z_1)(z_2)(z_3)(z_4)\,[&A(x_1) \wedge A(x_2) \wedge P(y_1, y_1, z_1) \wedge \\ &\wedge P(y_2, y_2, z_2) \wedge P(x_1, z_1, y_3) \wedge P(x_2, z_2, y_4) \wedge S(y_3, y_4, 0) \wedge E(y_1, 0) \wedge \\ &\wedge E(y_2, 0)].\end{aligned}$$

Put $$F = \{Y_2, Y_3, Y_4, \ldots\}.$$

Any model of $K = H \cup G \cup F$ will be said to be formally real with respect to its core, C. If M and M' are models of K and M' is an extension of M, then the core of M consists of just those constants of M which belong to the core of M'.

Let

3.1. $$Z = (x)(y)(\exists z)\,[S(x, y, 0) \supset P(z, z, x) \vee P(z, z, y)].$$

Z affirms that for any given x, either x or $-x$ possesses a square root. A field which satisfies Z will said to be *square-root closed*.

3.2. Lemma. Let M be a model of K, i.e. a field which is formally real with respect to its core, C, and let d be a constant of M such that

$$-d \neq a_1 b_1^2 + a_2 b_2^2 + \cdots + a_n b$$

for all n, where $a_1, a_2, \ldots, a_n \varepsilon C$. Then there exists an extension M' of M which is a model of K, such that d possesses a square root in M'.

Proof. If d possesses a square root in M, then we set $M' = M$ and there is nothing left to be proved. In the alternative case, we take for M' the field which is obtained by adjoining $\sqrt{d}$ to M, and we define that the core of M' coincide with the core of M, i.e. C. Suppose that

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (b_i + c_i \sqrt{d})^2 = 0, \qquad a_i \varepsilon C, \; i = 1, \ldots, n.$$

Expanding, we obtain

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (b_i^2 + c_i^2 d) + 2\sqrt{d} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i = 0$$

and hence

3.3.
$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i^2 + dD = 0$$

where

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_i c_i^2.$$

Suppose that $D \neq 0$. Then 3.3 implies

$$-d = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i^2 = D \sum_{i=1}^{n} a_i (b_i/D)^2,$$

or

3.4.
$$-d = \sum_{i,j=1}^{n} a_j a_i (c_j b_i/D)^2.$$

But the products $a_j a_i$ all belong to C, which is a multiplicative set, and so the representation of $-d$ by the right hand side of 3.4 is contrary to assumption. We conclude that

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_i c_i^2 = 0$$

and hence, $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$, since M is formally real with respect to C. Moreover, 3.3 now yields

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i^2 = 0$$

and hence $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$. Combining the results, we obtain

$$b_i + c_i \sqrt{d} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n$$

and this shows that M' also is formally real with respect to C.

3.5. Theorem. Let M be a model of K (as in 3.2) and let d be a constant of M such that

$$-d \neq a_1 b_1^2 + \cdots + a_n b_n^2$$

for all n, where $a_1, a_2, \ldots, a_n \varepsilon C$. Then there exists a *square root closed* extension M^* of M which is a model of K such that d possesses a square root in M^*.

Proof. We first define an extension M' of M in which d possesses a square root, as in 3.1. Let N' be the diagram of M'. To prove 3.5, we only have to show that Z, as given by 3.1 is consistent with $K \cup N'$. We write Z as

$$Z = (x)\,(y)\,W(x, y)$$

where

$$W(x, y) = (\exists\, z)\;[S(x, y, 0) \supset P(z, z, x) \vee P(z, z, y)].$$

Let M'' be a model of $K \cup N'$, and let a and b be constants of M''. We propose to show that there exists an extension M^{**} of M'' which is a model of $K \cup N'$ such that

$$W(a, b) = (\exists\, z)\;[S(a, b, 0) \supset P(z, z, a) \vee P(z, z, b)]$$

holds in M^{**}. Indeed, if $a + b \neq 0$, then $M^{**} = M''$ may be taken as the required structure. If $a + b = 0$, $b = -a$, then a and b cannot both be represented by sums of the type

3.6. $$a_1 b_1^2 + \cdots + a_n b_n^2$$

where $a_1, \ldots, a_n$ belong to the core of M'' since this would contradict F. Suppose, for example that $-a$ cannot be represented by any expression of this type. Then the lemma 3.2. applies, there exists an extension M^{**} of M'' which is a model of K and (being an extension of M') also of N' such that a possesses a square root in M^{**}. It follows that $W(a, b)$ holds in M^{**}. Referring to 2.3, we conclude that Z is model-consistent, hence consistent, with $K \cup N'$. This proves 3.5.

3.7. Theorem. Let M be a square root closed model of K, and let d be an element of the core of M. Then d possesses a square root in M.

Suppose, on the contrary, that d does not have a square root in M. Then $-d$ must have a square root in M, b say, since M is square root closed. Thus,

$$d \cdot 1^2 + 1 \cdot b^2 = 0$$

which contradicts F. We conclude that d has a square root in M.

Let M be a square root closed model of K. If we define that any constant $a \neq 0$ of M be called positive, $a > 0$, if it possesses a square root in M then this definition yields an ordering of M which satisfies the usual axioms (trichotomy, positivity of the sum and product of positive elements).

Let M be a model of the set $H \cup G$, i.e. a commutative field with a core C which satisfies 3.1. If there exists an ordering of M in which the elements of the core are all positive then M must at the same time satisfy the axioms of F, i.e. M must be formally real. An element a of M is called totally positive with respect to the core C if a is positive for all orderings of M for which the elements of C are positive. Then —

3.8. Theorem. Let M be a formally real field with core C. Then every element a of M which is totally positive with respect to C, can be represented in the form

3.9. $$a = a_1 b_1^2 + \cdots + a_n b_n^2, \qquad a_i \varepsilon C, \; i = 1, \ldots, n.$$

Indeed, if this were not possible then, by 3.5, there would exist a square root closed model M^* of K such that M^* is an extension of M and such that $-a$ possesses a square root in M^*. In the corresponding ordering of M^* (which induces an ordering in M) all the elements of C would be positive by 3.7, while a would be negative. This is contrary to the assumption that a is totally positive with respect to C, and proves 3.8.

For formally real fields, theorems 1 and 2 (HILBERT-LANDAU-ARTIN) of ref. 1 can be obtained from 3.8. by specialisation, the former for a core which includes only unity, the latter for a core which consists of all the positive elements of a specified ordered subfield of M. The statement of theorem 1 in ref. 1 includes also fields which are not formally real respect to their specified core. In this case, all elements of K are totally positive, vacuously, and place of 3.8, we obtain

3.10. Theorem. Let M be a field of characteristic $\neq 2$ such that M is not formally real with respect to the specified core, C. Then every element a of M can be represented as in 3.9.

Proof. (Compare ref. 1). By assumption there exists a relation

$$c_1 d_1^2 \ldots c_m d_m^2 = 0, \quad c_i \varepsilon C, \qquad i = 1, \ldots, m, \; d_m \neq 0.$$

Then a representation of a of the required form is

$$a = \left(\frac{1+a}{2}\right)^2 + c_1 c_m \left(\frac{d_1(1-a)}{2c_m d_m}\right)^2 + \cdots + c_{m-1} c_m \left(\frac{d_{m-1}(1-a)}{2c_m d_m}\right)^2$$

since $1 \varepsilon C$ and $c_i c_m \varepsilon C$, $i = 1, \ldots, m-1$.

4. Totally definite functions. In order to obtain a set of axioms for the concept of an ordered commutative field we add to H the following axioms, which involve the relation $Q(x)$ — read "x is positive, $x > 0$" — in addition to the relations previously included in H.

4.1.
$$\begin{aligned}
&(x)\,(y)\,[S(x,y,0) \supset Q(x) \vee Q(y) \vee E(x,0)]\\
&(x)\,(y)\,[S(x,y,0) \wedge Q(x) \supset \sim Q(y) \wedge \sim E(x,0)]\\
&(x)\,(y)\,(z)\,[S(x,y,z) \wedge Q(x) \wedge Q(y) \supset Q(z)]\\
&(x)\,(y)\,(z)\,[P(x,y,z) \wedge Q(x) \wedge Q(y) \supset Q(z)].
\end{aligned}$$

Let J be the union of H and of 4.1, and let M be any model of J with diagram N. Let $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geq 1$, be a rational function with coefficients in M, which does not vanish identically. The condition

4.2. $$f(x_1, \ldots, x_n) \not< 0$$

conveys that either the denominator vanishes for the $x_1, \ldots, x_n$ in question, or $f(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$. 4.2. may be regarded as a predicate of $x_1, \ldots, x_n$, and it is not difficult to formulate it as a wff. of class (A), $Q_f(x_1, \ldots, x_n)$ say. For

example, if

4.3. $$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 x_2 + a x_3}{b + x_2}$$

where a and b are elements of M, we put

$$Q_f(x_1, x_2, x_3) = (y_1)\,(y_2)\,(y_3)\,(y_4)\,(y_5)\,[P(x_1, x_2, y_1) \wedge P(a, x_3, y_2) \wedge \\ \wedge S(y_1, y_2, y_3) \wedge S(b, x_2, y_4) \wedge P(y_5, y_4, y_3) \supset \sim Q(y_5) \wedge \\ \wedge \sim E(y_5, 0)].$$

Consider the statement

4.4. $$X_f = (x_1) \ldots (x_2)\, Q_f(x_1, \ldots, x_n).$$

X_f holds in M if and only if the condition 4.2. is satisfied for all $x_1, \ldots, x_n$ in M. In that case we say that the function $f(x_1, \ldots, x_n)$ is *definite*. If, moreover, 4.2. also holds for every $x_1, \ldots, x_n$ in any extension M' of M which is a model of J, then $f(x_1, \ldots, x_n)$ will be said to be *totally definite*. In that case, X_f is deducible from $J \cup N$.

Now let $C = \{g_1(x_1, \ldots, x_n),\ g_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots\}$ be a (countable or noncountable) set of rational functions with coefficients in M such that the following conditions are satisfied.

4.5. $$0 \notin C$$
$$a \in C \qquad \text{for all } a > 0 \text{ in } M$$
$$g_i \in C,\quad g_j \in C \qquad \text{entails } g_i g_j \in C.$$

The set C is said to be *finitely generated* if there exists a finite subset C' of C,

4.6. $$C' = \{g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n)\}$$

such that every $g(x_1, \ldots, x_n) \in C$ can be represented in the form

$$g(x_1, \ldots, x_n) = a(g_1(x_1, \ldots, x_n))^{m_1} \ldots (g_k(x_1, \ldots, x_n))^{m_k}$$

where $m_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, k$ and $a > 0$ in M. C' will be called a base of C.

We say that the rational function $f(x_1, \ldots, x_n)$ is *definite with respect to a specified set* C if 4.2. holds for $x_1, \ldots, x_n$ in M whenever

4.7. $$g_i(x_1, \ldots, x_n) > 0 \qquad \text{for all } g_i \in C;$$

and we say that $f(x_1, \ldots, x_n)$ is *totally definite with respect to* C if 4.2. holds whenever 4.7. holds, for all $x_1, \ldots, x_n$ in any extension M' of M which is a model of J.

The last pair of definitions reduces to that given previously if C contains only the positive elements of M.

For any rational function $f(x_1, \ldots, x_n)$ we may formulate the condition

$$f(x_1, \ldots, x_n) > 0$$

as a predicate $Q_f^*(x_1, \ldots, x_n)$ of class (E). For example, if $f(x_1, x_2, x_3)$ is given by 4.3., then we put

$$Q_f^*(x_1, x_2, x_3) = (\exists\, y_1)\,(\exists\, y_2)\,(\exists\, y_3)\,(\exists\, y_4)\,(\exists\, y_5)\,[P(x_1, x_2, y_1) \wedge \\ \wedge P(a, x_3, y_2) \wedge S(y_1, y_2, y_3) \wedge S(b, x_2, y_4) \wedge P(y_5, y_4, y_3) \supset \\ \supset Q(y_5)].$$

Now suppose that C is finitely generated, with base C' as given by 4.6. Then 4.7 holds for all $g_i \varepsilon C$ if and only if it holds for all $g_i \varepsilon C'$. It follows that in order that the function $f(x, \ldots, x)$ be definite or totally definite with respect to C it is sufficient that the required conditions be satisfied for all $g_i \varepsilon C'$. Hence, defining the statement X_f^* by

4.8. $X_f^* = (x_1) \ldots (x_n) [Q_{g_1}^*(x_1, \ldots, x_n) \wedge \cdots \wedge Q_{g_k}^*(x_1, \ldots, x_n) \supset Q_f(x_1, \ldots, x_n)]$

we find that $f(x_1, \ldots, x_n)$ is definite with respect to C if and only if X_f^* holds in M, and $f(x_1, \ldots, x_n)$ is totally definite with respect to C if and only if X_f^* is deducible from $J \cup N$.

4.9. Theorem. Suppose that the rational function $f(x_1, \ldots, x_n)$ with coefficients in an ordered field M, is totally definite with respect to a set of rational functions C which satisfies 4.5. Then there exists an identity

4.10. $$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{k} g_{i_j}(x_1, \ldots, x_n)\,(h_j(x_1, \ldots, x_n))^2$$

where $g_{i_j} \varepsilon C$, $j = 1, \ldots, k$ and the h_j are rational functions with coefficients in M.

Proof. Consider the field $M(x_1, \ldots, x_n)$ which is determined by the symbolic adjunction of the indeterminates $x_1, \ldots, x_n$ to the field M. The specified set C may be regarded as a core in the sense of section 3. since it satisfies the axioms of 3.1. Suppose first that $M(x_1, \ldots, x_n)$ is not formally real with respect to C. $M(x_1, \ldots, x_n)$ is of characteristic 0 since it is an extension of an ordered field. Theorem 3.10 then shows that in this case *all* rational functions with coefficients in M can be expressed in the form 4.10.

Assume next that $M(x_1, \ldots, x_n)$ is formally real with respect to C. We are going to show that $f(x_1, \ldots, x_n)$ is totally positive with respect to C. Suppose on the contrary that there exists an ordering of $M(x_1, \ldots, x_n)$ in which all the elements of C are positive while f is negative. We may regard this ordered field as a model of J and as such denote it by M'. M' is an extension of M, as a field, and the ordering of M' is a continuation of the ordering of M since C includes all the positive elements of M. Now $f(x_1, \ldots, x_n)$, regarded as a function in the ordinary mathematical sense, takes the functional value $f(x_1, \ldots, x_n) < 0$, for the argument values $x_1, \ldots, x_n$, where f is now regarded as an element of M'. At the same time, the functions of C take positive values in M', and so $f(x_1, \ldots, x_n)$ is not totally definite with respect to C, contrary to the assumption of the theorem. We conclude that $f(x_1, \ldots, x_n)$ must be totally positive in $M(x_1, \ldots, x_n)$. The existence of an identity 4.10 now follows directly from theorem 3.8.

5. Definite functions. In order to pass from theorem 4.9. to ARTIN's results on definite functions, we have to consider under what conditions the assumption of 4.9 that $f(x_1, \ldots, x_n)$ is totally definite with respect to C can be replaced by the weaker assumption that $f(x_1, \ldots, x_n)$ is definite with respect to C. As a first step, we shall investigate this problem for the case that M is a real closed field.

For our purposes, a real closed field may be defined as an ordered field in which every polynomial of odd degree has a root and every positive number has a square root. By adding to J further axioms of the class (AE) in terms of the relations E, S, P, and Q, it is not difficult to obtain a set of axioms J^* for the concept of a real closed field. In developing the general theory of such field we may again make use of the embedding theorem 2.3. However, since nothing essentially new is added by this procedure, we shall rely here on the analysis given in ref. [2] and reproduced in ref. [7], sections 70, 71. According to a result of A. Tarski [6], the set of axioms J^* is complete, and a slight modification of Tarski's method, or alternatively, the application of a general criterion for model-completeness [5], shows that J^* is also model-complete. It may be of interest to mention here that Tarski's result was, in a sense, anticipated in ref. [2] by the formal statement that the theorems of real Algebra, e.g. the theorems of Rolle and Sturm hold in all real closed fields. This does not detract from the importance of Tarski's achievement since, in the absence of a precise definition of the notion of "a theorem of real algebra", the statement in ref. [2] possesses only heuristic value.

Now let M be a real closed ordered field with diagram N, and let $f(x_1, \ldots, x_n)$ be a rational function with coefficients in M. Suppose that $f(x_1, \ldots, x_n)$ is definite in M. The statement X_f as defined by 4.4. holds in M, which is a model of $J^* \cup N$. It follows that $\sim X_f$ cannot be deducible from $J^* \cup N$. But J^* is model-complete, and so X_f must be deducible from $J^* \cup N$. Thus $f(x_1, \ldots, x_n)$ is totally definite. Applying 4.9. for a set C which consists of the positive elements of M only, we see that there exists an identity

$$5.1. \qquad f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{k} c_j (h_j(x_1, \ldots, x_n))^2$$

where the c_j are positive elements of M and the h_j are rational functions with coefficients in M. Since c_j possesses a square root d_j, we may absorb c_j in the square, $c_j h_j^2 = (d_j h_j)^2$. Thus we have established

5.2. Theorem. Suppose that the rational function $f(x_1, \ldots, x_n)$ with coefficients in a real closed ordered field M, is definite in M. Then there exists an identity

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{k} (h_j(x_1, \ldots, x_n))^2$$

where the h_j are rational functions with coefficients in M.

The following example shows that 4.9. does not carry over to definite functions for *arbitrary* C. Let M be the field of real numbers, and let C be the set of polynomials

$$g(x) = a(x - a_1) \ldots (x - a_k)$$

where $a > 0$ in M and $a_1, \ldots, a_k$ are positive integers. Let

$$f(x) = -x.$$

Then $f(x)$ is definite with respect to C in M, vacuously, since there does not exist a real number x for which the polynomials

$$g_m(x) = x - m, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

which are included in C, are all positive. On the other hand, every rational function which can be represented by the right hand side of 4.10. is positive for sufficiently large positive x, while $f(x)$ is negative for all positive x.

Now let M be a real closed ordered field with diagram N, as before, and let C be a *finitely generated* set of rational functions which satisfies 4.5. with a base C' as given by 4.6. Suppose that a rational function $f(x_1, \ldots, x_n)$ with coefficients in M is definite with respect to C' in M. Then X_f^*, as given by 4.8., holds in M. We conclude as before that X_f^* is deducible from $J^* \cup N$. It follows that $f(x_1, \ldots, x_n)$ is totally definite with respect to C and hence, that $f(x_1, \ldots, x_n)$ can be represented in the form 4.10. Now the functions g_{ij} in 4.10 can be written as products of positive elements of M and of powers of elements of C' and of the latter, the even powers may be included in h_j^2. Thus, we obtain the following representation for $f(x_1, \ldots, x_n)$

5.3. $$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_j \left(g_1(x_1, \ldots, x_n)^{m_1^j}\right) \ldots \left(g_k(x_1, \ldots, x_n)^{m_k^j}\right) (k_j(x_1, \ldots x_n))^2$$

where the $h_j(x_1, \ldots, x_n)$ are rational functions with coefficients in M and the m_i^j stand for either 1 or 0.

5.4. Theorem. Let $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n)$ be rational functions with coefficients in a real closed ordered field M which do not vanish identically. Suppose that $f(x_1, \ldots, x_n) \not< 0$
(i.e. either $f(x_1, \ldots, x_n)$ is meaningless or $f(x_1, \ldots, x_n) \geqq 0$) for all $x_1, \ldots, x_n$ in M for which

$$g_1(x_1, \ldots, x_n) > 0, \ldots, \quad g_k(x_1, \ldots, x_n) > 0.$$

Then there exists an identity 5.3. for $f(x_1, \ldots, x_n)$.

For $g_1 \equiv 1$, $k = 1$, 5.4. reduces to 5.2. Other interesting cases are given by $g_1 \equiv 1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2$, $k = 1$, and by $g_j \equiv x_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Now let

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{p(x_1, \ldots, x_n)}{q(x_1, \ldots, x_n)}$$

be a rational function whose numerator and denominator are the general polynomials of a specified degree α. Let $y_1, \ldots, y_l$ be the coefficients of these polynomials, ranged in an arbitrary but definite manner. For given $g_1, \ldots, g_k$, the existence of an identity of the type of 5.3. may be regarded as a property of $y_1, \ldots, y_l$, but in this form the property cannot be expressed as a predicate of $y_1, \ldots, y_l$ in the lower functional calculus. However, some reflection shows that the assertion that an identity 5.3. exists with a specified upper bound λ on the number of summands in 5.3., and a specified upper bound μ on the degrees of the numerators and denominators of the functions $h_j(x_1, \ldots, x_n)$, can be so expressed. For every positive λ and μ, we choose a predicate of the required type and we denote it by $R_f[\lambda, \mu](y_1, \ldots, y_l)$. At the same time we regard 4.8. as a predicate of $y_1, \ldots, y_l$, and as such denote it by $X_f^*(y_1, \ldots, y_l)$.

Let $b_1, \ldots, b_l$ be a set of constants which are not contained in M and let B be the set of all statements

$$\sim R_f[\lambda, \mu](b_1, \ldots, b_l), \qquad \lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots$$

Consider the set

$$D = J^* \cup N \cup B \cup \{X_f^*(b_1, \ldots, b_l)\}.$$

If D is consistent then it possesses a model M^*. M^* is a real closed field which is an extension of M such that the hypothesis of 5.4. is satisfied for the particular function $f_0(x_1, \ldots, x_n)$ which is obtained by replacing the indeterminate coefficients of f, $y_1, \ldots, y_l$, by $b_1, \ldots, b_l$, respectively. On the other hand, no identity 5.3. can exist for $f = f_0$ since M^* is a model of B. This is contrary to the conclusion of theorem 5.4. and shows that D must be contradictory. It follows that there exists a finite set of statements

$$\sim R_f[\lambda_j, \mu_j](b_1, \ldots, b_l), \qquad j = 1, \ldots, r$$

such that

5.5. $$\sim [X_f^*(b_1, \ldots, b_l) \wedge \sim R_f[\lambda_1, \mu_1](b_1, \ldots, b_l) \wedge \cdots \wedge \sim R_f[\lambda_r, \mu_r](b_1, \ldots, b_l)]$$

is deducible from $J^* \cup N$. Moreover, 5.5. can be replaced by

5.6. $$X_f^*(b_1, \ldots, b_l) \supset [R_f[\lambda_1, \mu_1](b_1, \ldots, b_l) \vee \cdots \vee R_f[\lambda_r, \mu_r](b_1, \ldots, b_l)]$$

and if we put

$$\lambda_0 = \max_{1 \leq j \leq r} \lambda_j, \quad \mu_0 = \max_{1 \leq j \leq r} \mu_j$$

then

5.7. $$R_f[\lambda_1, \mu_1](b_1, \ldots, b_l) \vee \cdots \vee R_f[\lambda_r, \mu_r](b_1, \ldots, b_l) \supset \supset R_f[\lambda_0, \mu_0](b_1, \ldots, b_l)$$

is deducible from $J^* \cup N$. Combining 5.6. and 5.7, we find that

5.8. $$X_f^*(b_1, \ldots, b_l) \supset R_f[\lambda_0, \mu_0](b_1, \ldots, b_l)$$

is deducible from $J^* \cup N$. But the constants $b_1, \ldots, b_l$ are not included in $J^* \cup N$, and so 5.8. entails that

$$(y_1) \ldots (y_l)\,[X_f^*(y_1, \ldots, y_l) \supset R_f[\lambda_0, \mu_0](y_1, \ldots, y_l)]$$

is deducible from $J^* \cup N$. We have obtained the result —

5.9. Theorem. Suppose that the conditions of theorem 5.4. are satisfied, and that the functions $g_1, \ldots, g_k$ are kept fixed while the coefficients of $f(x_1, \ldots, x_n)$ are allowed to vary subject only to the condition that the degrees of the numerator and denominator of f do not exceed a certain specified positive integer α. Then there exist positive integers λ_0, μ_0, which depend on n and α but not on the further choice of the coefficients of $f(x_1, \ldots, x_n)$ such that the number of summands in 5.3. and the degrees of the numerators and denominators of the functions $h_j(x_1, \ldots, x_n)$ may be taken to be bounded by λ_0 and μ_0 respectively.

We note that theorem 5.2. (i.e. theorem 5.4. for $g_1 \equiv 1$, $k = 1$) is proved in ref. [1] on the assumption that the ordering of M is Archimedean. It is not possible to make use of the completeness of the concept of real closed fields in order to infer that the result holds also for non-Archimedean ordered fields

since the conclusion of 5.2. as such cannot be formulated within the lower predicate calculus. Theorem 5.9 shows that the conclusion in 5.2 can be reinforced so as to become eligible for formulation in the lower predicate calculus, but in order to prove 5.9. we had to know first that 5.2. (or 5.4.) is valid for *all* real closed ordered fields.

Next, we consider ordered fields which are not real closed. In this case it is indeed possible that a function be definite in the field without being totally definite. Thus consider the field $M = R(t)$ which is obtained by adjoining to the field of rational numbers R the transcendental element t. We order M by the condition that t is infinitely large compared with all the rational numbers. Then it will be seen that the function

$$f(x) = (x^2 - t)((x-1)^2 - t)$$

is definite in M. However, $f(x)$ is not totally definite since it takes the negative value $1-t$ for $x = \frac{1}{2} + \sqrt{t}$ in the field $M' = R(\sqrt{t})$ which is an extension of M.

However, we still have

5.10. *Theorem.* Let $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n)$ be rational functions with coefficients in an *Archimedean* ordered field M. Suppose that

$$f(x_1, \ldots, x_n) \nless 0$$

(i.e. either $f(x_1, \ldots, x_n)$ is meaningless or $f(x_1, \ldots, x_n) \geqq 0$) for all $x_1, \ldots, x_n$ in M for which

$$g_1(x_1, \ldots, x_n) > 0, \ \ldots, \ g_k(x_1, \ldots, x_n) > 0.$$

Then there exists an identity

5.11. $$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_j c_j (g_1(x_1, \ldots, x_n))^{m^j_1} \ldots (g_k(x_1, \ldots, x_n))^{m^j_k} \quad (h_j(x_1, \ldots, x_n))^2$$

where the c_j are positive elements of M while the h_j are rational functions with coefficients in M and the m^j_i stand for either 1 or 0.

Proof. According to the assumption of the theorem, the statement X^*_f, as given by 4.8. holds in M. Since M is Archimedean, it can be embedded in the field of real numbers, M^*. Suppose that X^*_f does not hold in M^*. Then there exist real numbers $\xi_1, \ldots, \xi_n$ such that for $x_1 = \xi_1, \ldots, x_n = \xi_n$

5.12. $$f(x_1, \ldots, x_n) < 0$$

but

5.13. $$g_1(x_1, \ldots, x_n) > 0, \ \ldots, \ g_k(x_1, \ldots, x_n) > 0.$$

Then 5.12 and 5.13 would hold also for all rational numbers which are sufficiently close to $\xi_1, \ldots, \xi_n$, contrary to the assumption that X^*_f holds in M. We conclude that X^*_f holds also in M^*. But the concept of a real closed field is model-complete and so X^*_f holds also in any other real closed ordered field which is an extension of M. (Compare the argument used to prove 5.4.) Suppose now that X^*_f does not hold in some ordered field M', where M' is

an extension of M. Then M' can be embedded in a real closed ordered field in which X_f^* does not hold either. But this is impossible and so X_f^* holds in all ordered fields which are extensions of M', $f(x_1, \ldots, x_n)$ is totally definite with respect to the set C which is generated by $g_1, \ldots, g_k$. The existence of an identity 5.11. now follows immediately from theorem 4.9.

If the ordering of M is unique (e.g. if M is the field of rational numbers) then every positive element in M is totally positive and can therefore be represented as a sum of squares. It follows that in this case the coefficients c_j in 5.11 can be omitted. For $g_1 = 1$, $k = 1$, theorem 5.10 then reduces to theorem 4 of ref. [1]. If the ordering of M is not necessarily unique then $g_1 = 1$, $k = 1$ in 5.10 yields theorem 6 of ref. [1]. Since we have derived the principal theorems of ref. [1] by alternative methods and have at the same time provided some additional results, it is natural to ask whether it would not be possible to prove these by the original methods of ref. [1]. The answer appears to be that indeed some but not all of the results in question can be so derived. In particular, the present author is unable to prove theorem 5.9 without the use of the predicate calculus even when M is the field of real numbers and $g_1 = 1$, $k = 1$.

References

[1] E. Artin: Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate. Abh. math. Sem. Hamburg. Univ. 5, 100—115 (1927). — [2] E. Artin and O. Schreier: Algebraische Konstruktion reeller Körper. Abh. math. Sem. Hamburg. Univ. 5, 85—99 (1927). — [3] L. Henkin: A generalization of the concept of ω-consistency. J. Symb. Log. 19, 183 to 196 (1954). — [4] D. Hilbert: Mathematische Probleme, International Congress of Mathematicians. Paris 1900. Arch. f. Math. 3rd. ser. 1, 44—63, 213—237 (1901); reprinted in Ges. Abh. 3, 290—329 (1935). — [5] A. Robinson: Ordered Structures and related concepts. Symposium on the mathematical interpretation of formal systems. Amsterdam 1954 (to be published). — [6] A. Tarski and J. C. C. McKinsey: A decision method for elementary Algebra and Geometry (1st ed. 1948) 2nd ed., Berkeley and Los Angeles 1951. [7] B. L. van der Waerden: Moderne Algebra, vol. 1, 2nd ed. Berlin 1937.

(Eingegangen am 30. April 1955)

Stoll, W.
Math. Annalen, Bd. 130, S. 272—316 (1955)

Über meromorphe Modifikationen

V. Die Erzeugung analytischer und meromorpher Modifikationen durch σ-Prozesse[1])

Von
Wilhelm Stoll in Tübingen

In dieser Arbeit wird gezeigt werden, wie sich eine beliebige analytische bzw. meromorphe Modifikation aus σ-Prozessen aufbauen läßt. In einem Spezialfall ist das schon in Teil IV geschehen. Zunächst möge an einige wichtige Begriffe erinnert werden[2]).

Eine Modifikation $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ zwischen 4-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeiten G und H liegt vor, wenn τ die offene Menge $A \subseteq G$ pseudokonform auf $B \subseteq H$ abbildet und die Umkehrung $v = \tau^{-1}$ hat und wenn dabei $M = G - A \subseteq M^*$ sowie $N = H - B \subseteq N^*$ sind, wobei M^* und N^* in geeigneten Umgebungen von M bzw. N analytische Mengen mit einer Dimension kleiner als 4 sind. Mit $\mathfrak{M}$ ist auch $\mathfrak{M}^{-1} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} H, B, N, v \\ G, A, M, \tau \end{pmatrix}$ eine Modifikation, nämlich die inverse. $\mathfrak{M}$ heiße offen, wenn mit jeder offenen Menge $U \subseteq M$ auch $\tau(U \cap A) \cup N$ offen ist. Sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^{-1}$ offen, so heiße $\mathfrak{M}$ beiderseits offen. Streut die Abbildung τ längs jeder 2-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit $L \subseteq G$, die M nur in einem Punkt trifft, nicht, so heiße $\mathfrak{M}$ meromorph. Mit $\mathfrak{M}$ ist auch $\mathfrak{M}^{-1}$ meromorph. Ist v in N regulär, so heiße $\mathfrak{M}$ analytisch. Eine analytische Modifikation ist offen und meromorph. Eine offene Modifikation $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{P_0} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \sigma_{P_0} \\ H, B, N, v_{P_0} \end{pmatrix}$ ist ein σ-Prozeß im Punkt $P_0 \in G$ dann und nur dann, wenn $M = \{P_0\}$ und N eine 2-dimensionale, irreduzible, kompakte analytische Menge ist. $\mathfrak{M}$ ist beiderseits offen und bis auf analytische Äquivalenz eindeutig durch G und P_0 bestimmt. N ist dann eine Sphäre, die sog. Trägersphäre[3]).

Man kann auch einen σ-Prozeß in einer beliebigen abgeschlossenen Teilmenge von G (als simultanes Einsetzen von Trägersphären) erklären. Jedoch sind diese σ-Prozesse in Mengen zur Erzeugung beliebiger analytischer bzw.

[1]) Unter dem gemeinsamen Titel „Über meromorphe Modifikationen" sind eine Reihe von Arbeiten erschienen, und zwar in der Mathematischen Zeitschrift: Teil I (§ 1—§ 3) Bd. 61, S. 206—234, Teil II (§ 4—§ 6) Bd. 61, S. 467—488, Teil III (§ 7—§ 9) Bd. 62, S. 189—210; in den Mathematischen Annalen: Teil IV (§ 10—§ 12) Bd. 130, S. 147—182. Die Literatur und eine ausführliche Einleitung findet sich in Teil I.

[2]) Zur Bezeichnungsweise und weiteren Begriffsbildung sei auf die Teile I—IV verwiesen.

[3]) H. Hopf [9], [9a] definiert den σ-Prozeß explizit und zeigt aber (in [9a]), daß die hier gegebene Definition äquivalent ist. Man vergleiche auch die Definitionen (10.1) und (10.2), sowie die Sätze 10.5 und 11.3 in Teil IV.

meromorpher Modifikationen wenig geeignet. Zu Beginn des § 13 wird nämlich in einem Beispiel gezeigt, daß sich nicht jede analytische Modifikation in eindeutiger Weise durch eine Folge hintereinander ausgeführter σ-Prozesse ergibt. Dies veranlaßt die Konstruktion eines „σ-Baumes über einer Mannigfaltigkeit G“ sowie einer Grenzmannigfaltigkeit zu diesem σ-Baum. Der σ-Baum ist eine teilweise geordnete Menge von σ-Prozessen, die man erhält, wenn man in gewissen Punkten von G einzelne σ-Prozesse ausführt und dann dieses Verfahren iteriert. Die so erhaltenen Mannigfaltigkeiten „konvergieren“ gegen die Grenzmannigfaltigkeit, die durch eine Projektion in natürlicher Weise in G analytisch abgebildet wird[4]).

Wie in 14 gezeigt werden wird, läßt sich jede analytische Modifikation $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ gewinnen, indem man über G einen geeigneten σ-Baum konstruiert, dessen Grenzmannigfaltigkeit F die Mannigfaltigkeit H als offene Teilmenge enthält, wobei auf H die Projektion von F auf G mit v übereinstimmt. Beschränkt man sich dabei nicht auf eine sparsamste Verwendung von σ-Prozessen, so kann man $F = H$ erreichen, was bei beiderseits offenen analytischen Modifikationen sowieso der Fall ist[5]).

In § 15 wird zu einer beiderseits offenen und meromorphen Modifikation $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ je ein σ-Baum über G und H konstruiert, deren Grenzmannigfaltigkeiten bis auf analytische Äquivalenz übereinstimmen. Sind ω_0 und $\underline{\omega}_0$ die natürlichen Projektionen der Grenzmannigfaltigkeit F auf G bzw. H, so ist $\tau(P) = \underline{\omega}_0\, \omega_0^{-1}(P)$ für $P \in A$. Man beachte, daß ω_0 und $\underline{\omega}_0$ Abbildungen „*auf*“ sind[6]). Würde man nur „*in*“ verlangen, so wäre das Ergebnis trivial, man hätte $F = A$ und $\underline{\omega}_0 = \tau$.

Haben G und H je eine abzählbare Basis der offenen Mengen, so werden gemäß § 16 keine σ-Bäume benötigt. Man kommt im Falle einer beiderseits offenen, meromorphen Modifikation mit je einer Folge von σ-Prozessen in Mengen aus und im Falle einer beiderseits offenen, analytischen Modifikation mit einer Folge allein. Für eine beliebige analytische Modifikation braucht das aber nicht mehr richtig zu sein, wie gerade das Beispiel in § 13 zeigt.

§ 13. Der σ-Baum

Um die Ergebnisse von § 11 und § 12 (Teil IV) nun auch für den allgemeinen Fall zu beweisen, muß eine andere Art des Zusammenbaues der σ-Prozesse gewählt werden. Das zeigt das folgende Beispiel:

Es sei G der Raum der komplexen Vektoren $\mathfrak{z} = (z_1, z_2)$ und

$$(13.1) \qquad \mathfrak{S}_0 = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} G, A_0, O, \sigma_0 \\ H_0, B_0, N_0, v_0 \end{pmatrix}$$

[4]) Auf den Zusammenhang mit den Limesräumen inverser Systeme wird in 13 hingewiesen.

[5]) Man vergleiche die Sätze 14.1, 14.2 und 14.3. Die obige Formulierung ergibt sich, wenn man vermöge der pseudokonformen Abbildung π die Mannigfaltigkeit H mit $\pi(H) \subseteq F$ identifiziert.

[6]) Man vergleiche Satz 15.1. Die obige Formulierung ergibt sich, wenn man dort F mit $\underline{F}$ vermöge der Abbildung π identifiziert.

ein σ-Prozeß im Ursprung. Da die Punkte $\mathfrak{z}_\nu = (z_\nu, 0)$ auf der komplexen Kurve $\tilde{L} = \{\mathfrak{z} | z_2 = 0\}$ liegen, strebt $Q_\nu = \sigma_0(\mathfrak{z}_\nu) \to \sigma_0(0, L) = Q_0 \in N_0$ für $\nu \to \infty$. Die Menge $M_1 = \bigcup_{\nu=0}^{\infty} \{Q_\nu\}$ ist abgeschlossen und liegt in der zweidimensionalen analytischen Menge $\tilde{L} = \sigma_0(L, L)$ aus H_0. In M_1 werde ein σ-Prozeß

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} H_0, A_1, M_1, \sigma_{M_1} \\ H, \ B_1, N_1, v_{M_1} \end{pmatrix} \tag{13.2}$$

ausgeführt. Durch $\tau = \sigma_M, \sigma_0$ wird $A = \{\mathfrak{z} \,|\, \mathfrak{z} \neq 0 \ \mathfrak{z} \neq \mathfrak{z}_\nu\}$ pseudokonform auf $B \subseteq B_1$ abgebildet; die Umkehrung sei v. Es ist $N = H - B$ eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus H, deren irreduzible Teile

$$N^* = \sigma_{M_1}(N_0 \cap A_1) \cup \Sigma(N_0, N_0), \tag{13.3}$$

$$N^\nu = v_{M_1}^{-1}(Q_\nu, H) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{13.4}$$

sind. Die Umkehrung v von τ läßt sich auf H analytisch zu $v(Q, H)$ fortsetzen. Ihre Vielfachheit $\varphi(Q)$ ist

$$\varphi(Q) = \begin{cases} 0 \text{ für } Q \in B, & \\ 1 \text{ für } Q \in N^\nu & \text{mit } \nu \geqq 1, \\ 1 \text{ für } Q \in N^* - N^0, & \\ 2 \text{ für } Q \in N^0 & \end{cases} \tag{13.5}$$

Setzt man $M = G - A$, so ist

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix} \tag{13.6}$$

eine analytische Modifikation, wobei

$$v(N^\nu, H) = \mathfrak{z}_\nu \qquad \text{für } \nu = 1, 2, \ldots, \tag{13.7}$$

$$v(N^0, H) = \{0\}, \tag{13.8}$$

$$v(N^*, H) = \{0\}, \tag{13.9}$$

ist. Übt man in M den σ-Prozeß

$$\mathfrak{S}\begin{pmatrix} G, \ A, \ M, \sigma_M \\ H_2, B_2, N_2, v_M \end{pmatrix} \tag{13.10}$$

aus, so läßt sich $\sigma_M v$ auf $\{Q | 0 \leqq \varphi(Q) \leqq 1\} = H - N^0$ zwar zu einer Abbildung γ_1 analytisch fortsetzen, aber nicht auf ganz H, da γ_1 auf N^0 nur Lücken hat, wie sich aus der Identifizierungsvorschrift von Definition 10.2 ergibt. (Ein dem Punkt Q_0 in H_0 entsprechender Punkt fehlt.) Damit ist zunächst das im Anschluß an Satz 10.6 Bemerkung 2 versprochene Beispiel aufgestellt. Die Modifikation $\mathfrak{M}$ ist auch ein Beispiel einer meromorphen Modifikation zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten mit abzählbarer Basis der offenen Mengen, bei der sich die Singularitäten von τ häufen. Daher ist in den Sätzen 9.3 und 9.4 die Voraussetzung „beiderseits offen" nicht entbehrlich.

Die Abbildung γ_1 ist auf $H - N_0$ pseudokonform, auf N_0 nicht erklärbar, damit bricht das Verfahren von Satz 11.1 ab, bevor die Modifikation $\mathfrak{M}$ erzeugt ist. Die damalige Methode ist also im allgemeinen Fall nicht anwendbar.

Man hätte vielmehr nur in Teilen der Menge der singulären Punkte von τ bzw. $\sigma_{M_\varrho} \ldots \sigma_{M_0}\tau$ $(\varrho = 0, 1, \ldots)$ die σ-Prozesse auszuführen, wobei diese Teilmengen sich in einer gewissen „Fernwirkung" (im Beispiel vom Nullpunkt her) bestimmen, und zwar nicht einmal eindeutig. (Man kann ja im Beispiel zunächst in $M_\mu = \{0\} \cup \bigcup_{1 \leqq \nu \leqq \mu} \{P_\nu\}$ einen σ-Prozeß ausführen und dann in $\overline{\sigma_{M\mu}(M - M_\mu)}$ noch einen, um die Modifikation $\mathfrak{M}$ zu erhalten; dabei ist $\mu < \infty$ ganz willkürlich wählbar.)

Um diese Schwierigkeiten zu umgehen, wird zunächst in jedem Punkt für sich ein σ-Prozeß, in gewissen Punkten der eingesetzten Trägersphären wieder ein σ-Prozeß eingesetzt. So entsteht ein Baum von σ-Prozessen, deren zugehörige Mannigfaltigkeiten geeignet identifiziert werden. Dies soll nun genauer ausgeführt werden.

Definition 13.1. Der Indexbaum.

Es seien Mengen Γ^ν und $\Delta^\nu \subseteqq \Gamma^\nu \times \cdots \times \Gamma^0$ für $\nu = 0, 1, \ldots$ gegeben. Jedem $\mathfrak{p} \in \Delta^\nu$ sei eine Menge $M_\mathfrak{p} \subseteqq \Gamma^{\nu+1}$ zugeordnet. Es bestehe $\Gamma^0 = \Delta^0$ aus einem einzigen Element, das mit 0 bezeichnet werde. Es gelte

$$(13.11)\qquad \begin{aligned} &\Delta^0 = \Gamma^0 = \{0\} \\ &\Delta^{\nu+1} = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \text{ mit } P \in M_\mathfrak{q} \text{ und } \mathfrak{q} \in \Delta^\nu\} \qquad \text{für } \nu \geqq 0\,. \end{aligned}$$

Dann und nur dann sei $\mathfrak{q} < \mathfrak{p}$, wenn $\mathfrak{p} = (P_\nu, \ldots, P_{\mu+1}, \mathfrak{q})$ mit $\nu > \mu$ gilt. Es heiße $\langle \Gamma^\nu, \Delta^\nu, M_\mathfrak{p} \rangle$ ein Indexbaum. Ist $\mathfrak{p} \in \Delta^\nu$, so heiße ν die Stufe von $\mathfrak{p}$.

Ein Indexbaum ist durch die Relation $<$ teilweise geordnet. Zwei Vektoren $\mathfrak{p}, \mathfrak{r}$ haben einen gemeinsamen unteren Nachbar $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{r}$. Es ist

$$(13.12)\qquad \begin{aligned} &\mathfrak{q} = \mathfrak{p} && \text{wenn } \mathfrak{p} \leqq \mathfrak{r} \text{ ist,} \\ &\mathfrak{q} = \mathfrak{r} && \text{wenn } \mathfrak{r} \leqq \mathfrak{p} \text{ ist,} \\ &\begin{matrix} \mathfrak{p} = (P_\nu, \ldots, P_{\mu+1}, \mathfrak{q}) \\ \mathfrak{r} = (R_\varrho, \ldots, R_{\mu+1}, \mathfrak{q}) \end{matrix} \text{ mit } \left\{\begin{matrix} P_{\mu+1} \neq R_{\mu+1} \\ \nu > \mu \geqq 0 \\ \varrho > \mu \geqq 0 \end{matrix}\right\}, && \text{wenn } \mathfrak{p} \not\leqq \mathfrak{r},\ \mathfrak{r} \not\leqq \mathfrak{p} \text{ ist.} \end{aligned}$$

Alle drei Fälle kann man zu

$$(13.13)\qquad \begin{matrix} \mathfrak{p} = (P_\nu, \ldots, P_{\mu+1}, \mathfrak{q}) \\ \mathfrak{r} = (R_\varrho, \ldots, R_{\mu+1}, \mathfrak{q}) \end{matrix} \text{ mit } P_{\mu+1} \neq R_{\mu+1} \qquad (\mu \geqq 0)$$

zusammenfassen.

Ist $\mathfrak{p} \leqq \mathfrak{q}$, $\mathfrak{r} \leqq \mathfrak{q}$, so ist $\mathfrak{p} \leqq \mathfrak{r}$ oder $\mathfrak{r} \leqq \mathfrak{p}$ wegen

$$(13.14)\qquad \mathfrak{q} = (Q_\nu, \ldots, Q_{\mu+1}, \mathfrak{p}) = (Q_\nu, \ldots, Q_{\lambda+1}, \mathfrak{r})\,.$$

(Im Falle $\mu = \nu$ bedeutet $(Q_\nu, \ldots, Q_{\mu+1}, \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$.) Für alle $\mathfrak{p} \in \Delta^\nu$ mit $\nu \geqq 0$ ist $0 \leqq \mathfrak{p}$.

Definition 13.2. Der σ-Baum[7]).

Ein σ-Baum $\mathfrak{B} = [H_\mathfrak{p}, A_\mathfrak{p}, {}'A_\mathfrak{p}, B_\mathfrak{p}, N_\mathfrak{p}]$ mit dem Indexbaum $\langle \Gamma^\nu, \Delta^\nu, M_\mathfrak{p} \rangle$ liege vor, wenn gilt:

[7]) Bei H. Hopf [9], [9a] und F. Hirzebruch [7] S. 4 wird der Begriff des σ-Baumes etwas anders gefaßt. Dazu und zum Zusammenhang mit Limesräumen direkter und inverser Systeme vergleiche man die Bemerkung am Ende des Paragraphen.

1. *Zu jedem* $\mathfrak{p} \in \Delta^\nu$ *mit* $\nu \geqq 0$ *ist eine 4-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit* $H_\mathfrak{p}$ *gegeben, die* $M_\mathfrak{p}$ *als abgeschlossene Teilmenge enthält und wobei* $A_\mathfrak{p} = H_\mathfrak{p} - M_\mathfrak{p}$ *ist.*

2. *Für* $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \in \Delta^\nu$ *und* $\nu \geqq 1$ *ist*

$$(13.15)\qquad \mathfrak{S}_\mathfrak{p} = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} H_\mathfrak{q}, {}'A_\mathfrak{p}, & P, \sigma_P \\ H_\mathfrak{p}, B_\mathfrak{p}, & N_\mathfrak{p}, v_P \end{pmatrix}$$

ein σ*-Prozeß im Punkt* $P \in M_\mathfrak{q}$.

3. *Für* $\mathfrak{p} \in \Delta^\nu$ *mit* $\nu \geqq 1$ *ist* $N_\mathfrak{p} \supseteq M_\mathfrak{p}$.

Zu einem σ-Baum werde ein j-Operator für jede Teilmenge $S \subseteq H_\mathfrak{p}$ erklärt. Es sei nämlich

$$(13.16)\qquad \begin{aligned} T_0 &= 0 && \text{für } \nu = 0 \\ T_\mathfrak{p} &= \overline{\sigma_P\left((T_\mathfrak{q} \cup M_\mathfrak{q}) \cap {}'A_\mathfrak{p}\right)} && \text{für } \mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \in \Delta^\nu \text{ mit } \nu \geqq 1. \end{aligned}$$

Dann sei

$$(13.17)\qquad jS = S - T_\mathfrak{p} \quad \text{für } S \subseteq H\,.$$

Ist S offen, so ist auch jS offen. Es ist

$$(13.18)\qquad jS = S \cap jH_\mathfrak{p}, \quad jS = S \quad \text{für} \quad S \subseteq H_0\,.$$

Nun wird gezeigt, daß ein σ-Baum gegen eine Grenzmannigfaltigkeit konvergiert.

Satz 13.1. Grenzmannigfaltigkeit eines σ-Baumes[7]).

Voraussetzung. *Ein* σ*-Baum* $\mathfrak{B} = [H_\mathfrak{p}, A_\mathfrak{p}, {}'A_\mathfrak{p}, B_\mathfrak{p}, M_\mathfrak{p}]$ *mit dem Indexbaum* $\langle \Gamma^\nu, \Delta^\nu, M_\mathfrak{p} \rangle$ *und dem j-Operator* $jS = S - T_\mathfrak{p}$ *sei gegeben. Die abgeschlossene Teilmenge* M_0 *von* H_0 *habe eine offene Umgebung* U*, in der eine höchstens 2-dimensionale analytische Menge liegt, die* M_0 *umfaßt*[8]).

Behauptung. *Es gibt eine 4-dimensionale, komplexe Mannigfaltigkeit* F*, genannt Grenzmannigfaltigkeit von* $\mathfrak{B}$*, so daß gilt:*

1. *Eine pseudokonforme Abbildung* $\tau_\mathfrak{p}$ *bildet* $jA_\mathfrak{p}$ *pseudokonform auf* $C_\mathfrak{p} \subseteq F$ *ab, wobei*

$$(13.19)\qquad \tau_\mathfrak{p}(P) = \tau_\mathfrak{r}\, \sigma_R(P)$$

für $P \in jA_\mathfrak{p}$ *und* $\mathfrak{r} = (R, \mathfrak{p}) \in \Delta^{\nu+1}$ *ist.*

2. *Eine analytische Abbildung* $\omega_\mathfrak{p}$ *bildet* $F_\mathfrak{p} = \bigcup_{\mathfrak{p} \leqq \mathfrak{r}} C_\mathfrak{r}$ *in* $H_\mathfrak{p}$ *ab, wobei* $C_\mathfrak{p} \subseteq F_\mathfrak{p}$ *pseudokonform auf* $jA_\mathfrak{p}$ *abgebildet wird. Dabei ist*

$$(13.20)\qquad \omega_\mathfrak{p}(Q) = \tau_\mathfrak{p}^{-1}(Q) \qquad \text{für } Q \in C_\mathfrak{p}\,.$$

Setzt man $v_R(Q, H_\mathfrak{r}) = \vartheta_R(Q)$ *für* $Q \in H_\mathfrak{r}$*, so ist*

$$(13.21)\qquad \omega_\mathfrak{p}(Q) = \vartheta_R\, \omega_\mathfrak{r}(Q)$$

für $Q \in F_\mathfrak{r}$ *und* $\mathfrak{r} = (R, \mathfrak{p}) \in \Delta^{\nu+1}$.

3. *Die Menge* $\tilde{N}_\mathfrak{p} = F_\mathfrak{p} - C_\mathfrak{p}$ *ist analytisch und rein 2-dimensional in* $F_\mathfrak{p}$ *und in* F *regulär oder leer.*

[8]) Ein ähnlicher Satz gilt, wenn M_0 nicht Teilmenge einer solchen 2-dimensionalen analytischen Menge ist. Nur braucht dann $\mathfrak{M}_0$ keine Modifikation zu sein.

4. *Für* $\mathfrak{p} \leqq \mathfrak{r}$ *ist*

$$F = F_0 \geqq F_\mathfrak{p} \geqq F_\mathfrak{r}\,, \tag{13.22}$$

$$\tilde{N}_0 \geqq \tilde{N}_\mathfrak{p} \geqq \tilde{N}_\mathfrak{r}\,, \tag{13.23}$$

$$C_0 \subseteq C_\mathfrak{p} \subseteq C_\mathfrak{r}\,. \tag{13.24}$$

5. *Für* $\mathfrak{p} \in \Delta^\nu$ *mit* $\nu \geqq 0$ *ist*

$$\mathfrak{M}_\mathfrak{p} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} H_\mathfrak{p}, jA_\mathfrak{p}, M_\mathfrak{p}, \cup\, T_\mathfrak{p}, \tau_\mathfrak{p} \\ F_\mathfrak{p}, C_\mathfrak{p}, \quad \tilde{N}_\mathfrak{p}, \quad \omega_\mathfrak{p} \end{pmatrix} \tag{13.25}$$

eine analytische Modifikation[8]).

Beweis. a) *Es wird*

$$jB_\mathfrak{p} = \sigma_P(jA_\mathfrak{p}) \qquad \text{für } \mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \in \Delta^\nu \tag{13.26}$$

behauptet.

In $'A_\mathfrak{p}$ ist $(T_\mathfrak{q} \cup M_\mathfrak{q}) \cap {'A_\mathfrak{p}}$ abgeschlossen. Daher ist $\sigma_\mathfrak{p}((T_\mathfrak{q} \cup M_\mathfrak{q}) \cap {'A_\mathfrak{p}})$ in $B_\mathfrak{p}$ abgeschlossen, also

$$\begin{aligned} jB_\mathfrak{p} &= B_\mathfrak{p} - \overline{\sigma_P((T_\mathfrak{q} \cup M_\mathfrak{q}) \cap {'A_\mathfrak{p}})} \\ &= B_\mathfrak{p} - \sigma_P((T_\mathfrak{q} \cup M_\mathfrak{q}) \cap {'A_\mathfrak{p}}) \\ &= \sigma_P({'A_\mathfrak{p}} - (T_\mathfrak{q} \cup M_\mathfrak{q})) \\ &= \sigma_P(A_\mathfrak{q} - T_\mathfrak{q}) = \sigma_P(jA_\mathfrak{q})\,, \qquad \text{w. z. b. w.} \end{aligned} \tag{13.27}$$

b) *Für* $\mathfrak{p} = (P_\nu, \ldots, P_\lambda, \mathfrak{q}) \in \Delta^\nu$ *mit* $\lambda \geqq 1$ *ist die Abbildung* $\sigma_{P_\nu} \ldots \sigma_{P_\lambda}$ *auf* $jA_\mathfrak{q}$ *erklärt und pseudokonform. Ist* $\mathfrak{r} = (P_\lambda, \mathfrak{q})$, *so wird außerdem*

$$\sigma_{P_\nu} \ldots \sigma_{P_\lambda}(jA_\mathfrak{q}) = j\sigma_{P_\nu} \ldots \sigma_{P_\lambda}({'A_\mathfrak{r}}) = j\sigma_{P_\nu} \ldots \sigma_{P_\lambda}(A_\mathfrak{q}) \subseteq jB_\mathfrak{p} \tag{13.28}$$

behauptet.

Ist nämlich $\nu = \lambda$, so ergibt sich aus a) und der Definition des j-Operators

$$\begin{aligned} \sigma_{P_\nu}(jA_\mathfrak{q}) = jB_\mathfrak{p} &= j\sigma_{P_\nu}({'A_\mathfrak{p}}) = j\sigma_{P_\nu}(A_\mathfrak{q} \cup (M_\mathfrak{q} \cap {'A_\mathfrak{p}})) \\ &= j[\sigma_{P_\nu}(A_\mathfrak{q}) \cup \sigma_{P_\nu}(M_\mathfrak{q} \cap {'A_\mathfrak{p}})] \\ &= j\sigma_{P_\nu}(A_\mathfrak{q})\,. \end{aligned} \tag{13.29}$$

Ist die Behauptung für $\nu - 1 \geqq \lambda$ richtig und ist $\mathfrak{p} = (P_\nu, \ldots, P_\lambda, \mathfrak{q}) \in \Delta^\nu$, so wird $\mathfrak{n} = (P_{\nu-1}, \ldots, P_\lambda, \mathfrak{q})$ gesetzt. Wegen $\sigma_{P_{\nu-1}} \ldots \sigma_{P_\lambda}(jA_\mathfrak{q}) \subseteq jB_\mathfrak{n} \subseteq {'A_\mathfrak{p}}$ ist $\sigma_{P_\nu}\sigma_{P_{\nu-1}} \ldots \sigma_{P_\lambda}$ auf $jA_\mathfrak{q}$ erklärt und pseudokonform. Es gilt

$$\begin{aligned} \sigma_{P_\nu} \ldots \sigma_{P_\lambda}(jA_\mathfrak{q}) &= \sigma_{P_\nu}\, j\, \sigma_{P_{\nu-1}} \ldots \sigma_{P_\lambda}({'A_\mathfrak{r}}) \\ &= \sigma_{P_\nu}[\sigma_{P_{\nu-1}} \ldots \sigma_{P_\lambda}({'A_\mathfrak{r}}) - (T_\mathfrak{n} \cup M_\mathfrak{n}) \cap {'A_\mathfrak{p}}] \\ &= \sigma_{P_\nu} \ldots \sigma_{P_\lambda}({'A_\mathfrak{r}}) - \sigma_{P_\nu}((T_\mathfrak{n} \cup M_\mathfrak{n}) \cap {'A_\mathfrak{p}})\,. \end{aligned} \tag{13.30}$$

Da $\sigma_{P_\nu}(M_\mathfrak{n} \cup T_\mathfrak{n}) \cap {'A_\mathfrak{p}})$ in $B_\mathfrak{p} \supseteq \sigma_{P_\nu} \ldots \sigma_{P_\lambda}({'A_\mathfrak{r}})$ abgeschlossen ist, folgt

$$\sigma_{P_\nu} \ldots \sigma_{P_\lambda}(jA_\mathfrak{q}) = j\sigma_{P_\nu} \ldots \sigma_{P_\lambda}({'A_\mathfrak{r}}) \subseteq jB_\mathfrak{p}\,. \tag{13.31}$$

Indem man $'A_\mathfrak{r}$ durch $A_\mathfrak{q}$ ersetzt, folgt ebenso

$$\sigma_{P_\nu} \ldots \sigma_{P_\lambda}(jA_\mathfrak{q}) = j\sigma_{P_\nu} \ldots \sigma_{P_\lambda}(A_\mathfrak{q}) \subseteq jB_\mathfrak{p}\,, \qquad \text{w. z. b. w.} \tag{13.32}$$

c) ***Für*** $\mathfrak{p} = (P_\nu, \ldots, P_\lambda, \mathfrak{q}) \in \Delta^\nu$ ***mit*** $\lambda \geqq 1$ ***ist*** $jA_\mathfrak{p} - \sigma_{P_\nu} \ldots \sigma_{P_\lambda}(jA_\mathfrak{q})$ ***eine analytische Menge aus*** $jA_\mathfrak{p}$, ***die entweder leer oder rein 2-dimensional und in*** $H_\mathfrak{p}$ ***regulär ist.***

Wenn nämlich $\nu - 1 = \lambda - 1$ ist, so ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ und $jA_\mathfrak{p} - jA_\mathfrak{q} = \theta$; also ist für $\nu - 1 = \lambda - 1$ die Behauptung richtig. Ist sie nun für $\nu - 1 \geqq \lambda - 1$ bewiesen und ist $\mathfrak{p} = (P_\nu, \ldots, P_\lambda, \mathfrak{q}) \in \Delta^\nu$, so werde $\mathfrak{r} = (P_{\nu-1}, \ldots, P_\lambda, \mathfrak{q})$ gesetzt. Entweder ist $jA_\mathfrak{r} - \sigma_{P_{\nu-1}} \ldots \sigma_{P_\lambda}(jA_\mathfrak{q})$ leer oder eine rein 2-dimensionale analytische Menge, die in $H_\mathfrak{r}$ regulär ist. Wenn S die minimale Fortsetzung in $H_\mathfrak{r}$ ist, so erhält man in $S^* = \vartheta_{P_\nu}^{-1}(S)$ eine leere oder rein 2-dimensionale analytische Menge aus $H_\mathfrak{p}$, so daß gilt:

$$jB_\mathfrak{p} \cap S^* = \sigma_{P_\nu}(jA_\mathfrak{r}) \cap \sigma_{P_\nu}(S \cap A'_\mathfrak{p}) = \sigma_{P_\nu}(jA_\mathfrak{r} \cap S)\,, \tag{13.33}$$

woraus

$$\begin{aligned} jA_\mathfrak{p} - \sigma_{P_\nu} \ldots \sigma_{P_\lambda}(jA_\mathfrak{q}) &= [j(A_\mathfrak{p} - B_\mathfrak{p}) \cup jB_\mathfrak{p}] - \sigma_{P_\nu}\sigma_{P_{\nu-1}} \ldots \sigma_{P_\lambda}(jA_\mathfrak{q}) \\ &= (N_\mathfrak{p} \cap jA_\mathfrak{p}) \cup [jB_\mathfrak{p} - \sigma_{P_\nu}\sigma_{P_{\nu-1}} \ldots \sigma_{P_\lambda}(jA_\mathfrak{q})) \\ &= (N_\mathfrak{p} \cap jA_\mathfrak{p}) \cup \sigma_{P_\nu}(jA_\mathfrak{r} - \sigma_{P_{\nu-1}} \ldots \sigma_{P_\lambda}(jA_\mathfrak{q})) \\ &= (N_\mathfrak{p} \cap jA_\mathfrak{p}) \cup \sigma_{P_\nu}(jA_\mathfrak{r} \cap S) = (N_\mathfrak{p} \cap jA_\mathfrak{p}) \cup (S^* \cap jB_\mathfrak{p}) \\ &= [(N_\mathfrak{p} \cup S^*) \cap jA_\mathfrak{p}] - [S^* \cap j(A_\mathfrak{p} - B_\mathfrak{p}) - N_\mathfrak{p} \cap jA_\mathfrak{p}] \\ &= (N_\mathfrak{p} \cup S^*) \cap jA_\mathfrak{p} \end{aligned} \tag{13.34}$$

folgt. Also ist $jA_\mathfrak{p} - \sigma_{P_\nu} \ldots \sigma_{P_\lambda}(jA_\mathfrak{q})$ leer oder eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus $jA_\mathfrak{p}$, die durch $N_\mathfrak{p} \cap S^*$ in $H_\mathfrak{p}$ fortgesetzt wird, w. z. b. w.

d) Sind $\mathfrak{r} \in \Delta^\nu$ und $\mathfrak{p} \in \Delta^\nu$, ist $\mathfrak{q} = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{p}$, gilt also

$$\begin{aligned} \mathfrak{r} &= (R_\mu, \ldots, R_{\lambda+1}, \mathfrak{q}) \\ \mathfrak{p} &= (P_\nu, \ldots, P_{\lambda+1}, \mathfrak{q}) \end{aligned} \qquad \text{mit } R_{\lambda+1} \neq P_{\lambda+1}\,, \tag{13.35}$$

so werde

$$D_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}} = \begin{cases} \sigma_{P_\nu} \ldots \sigma_{P_{\lambda+1}}(jA_\mathfrak{q}) & \text{für } \mathfrak{p} > \mathfrak{q}, \\ jA_\mathfrak{q} & \text{für } \mathfrak{p} = \mathfrak{q} \end{cases} \tag{13.36}$$

gesetzt. Durch

$$\gamma_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}}(P) = \sigma_{R_\mu} \ldots \sigma_{R_{\lambda+1}} v_{P_{\lambda+1}} \ldots v_{P_\nu}(P) \qquad \text{für } P \in D_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}} \tag{13.37}$$

wird $D_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}} \subseteqq jA_\mathfrak{p}$ pseudokonform auf $D_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$ abgebildet. Von Satz 10.1 sind daher die Voraussetzungen 1 und 2 erfüllt, wie die Übersetzungstabelle:

Satz 10.1	ν	N	G_ν	$A_{\mu\nu}$	$\gamma_{\mu\nu}$	α_ν	H_ν	H
Hier	$\mathfrak{p}$	$\bigcup_{\nu=0}^{\infty} \Delta^\nu$	$jA_\mathfrak{p}$	$D_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}}$	$\gamma_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}}$	$\tau_\mathfrak{p}$	$C_\mathfrak{p}$	F

zeigt. Wegen $D_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}} = jA_\mathfrak{p}$ und $\gamma_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}}(P) = P$ sind auch (10.3) und (10.4) erfüllt. Die Umkehrung von $\gamma_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}}$ ist $\gamma_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}}^{-1}(P) = \gamma_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}(P)$ für $P \in D_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$. Die Richtigkeit der Aussagen (10.1) und (10.2) ist leicht nachzuprüfen. Die etwas längere Rechnung werde hier weggelassen.

Um die Voraussetzung 4 nachzuprüfen, werden die Punkte $P_0 \in jA_\mathfrak{p}$ und $Q_0 \in jA_\mathfrak{r}$ beliebig gewählt, wobei jedoch im Falle $P_0 \in D_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}}$ noch $\gamma_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}}(P_0) \neq Q_0$ vorausgesetzt werde.

1. Fall: Es ist $P_0 \in D_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}}$. Dann ist $Q_1 = \gamma_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}}(P_0) \in D_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$ und $Q_1 \neq Q_0$, folglich gibt es Umgebungen V_0 von Q_0 und $V_1 \subseteq D_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$ von Q_1, deren Durchschnitt $V_0 \cap V_1$ leer ist. Durch $U_1 = \gamma_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}}(V_1)$ wird eine Umgebung von P_0 in $D_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}}$ gegeben. Es ist

$$\gamma_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}}(U_1 \cap D_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}}) \cap V_0 = \gamma_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}}(U_1) \cap V_0 = V_1 \cap V_0 = \emptyset. \tag{13.50}$$

2. Fall: Es ist $P_0 \in jA_{\mathfrak{p}} - D_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}}$. Es ist $\mathfrak{p} = (P_\nu, \ldots, P_\lambda, \mathfrak{q})$ und $\mathfrak{r} = (R_\mu, \ldots, R_\lambda, \mathfrak{q})$ mit $R_\lambda \neq P_\lambda$ und $\lambda \geq 1$. Wäre $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$, so wäre $D_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}} = jA_{\mathfrak{p}}$, was falsch ist. Es folgt $\nu \geq 2$ und man kann $\mathfrak{c} = (P_\lambda, \mathfrak{q})$ setzen. Die Menge $A_{\mathfrak{p}} - \sigma_{P_\nu} \ldots \sigma_{P_\lambda}('A_{\mathfrak{c}})$ ist analytisch und rein 2-dimensional. Durch $\vartheta_{P_\lambda} \ldots \vartheta_{P_\nu}$ wird $A_{\mathfrak{p}}$ analytisch in $H_{\mathfrak{q}}$ und $\sigma_{P_\nu} \ldots \sigma_{P_\lambda}('A_{\mathfrak{c}})$ pseudokonform auf $'A_{\mathfrak{c}} \subseteq H_{\mathfrak{q}}$ abgebildet. Daher ist

$$'A_{\mathfrak{c}} \cap \vartheta_{P_\lambda} \ldots \vartheta_{P_\nu}(A_{\mathfrak{p}} - \sigma_{P_\nu} \ldots \sigma_{P_\lambda}('A_{\mathfrak{c}})) = \emptyset. \tag{13.51}$$

Wegen $'A_{\mathfrak{c}} = H_{\mathfrak{q}} - \{P_\lambda\}$ ist also

$$v_{P_\lambda} \ldots v_{P_\nu}(P) = P_\lambda \quad \text{für } P \in A_{\mathfrak{p}} - \sigma_{P_\nu} \ldots \sigma_{P_\lambda}('A_{\mathfrak{c}}). \tag{13.52}$$

Gemäß b) ist nun

$$\begin{aligned} P_0 \in jA_{\mathfrak{p}} - D_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}} &= jA_{\mathfrak{p}} - \sigma_{P_\nu} \ldots \sigma_{P_\lambda}(j\,'A_{\mathfrak{c}}) \\ &= jA_{\mathfrak{p}} - j\sigma_{P_\nu} \ldots \sigma_{P_\lambda}('A_{\mathfrak{c}}) \\ &= j(A_{\mathfrak{p}} - \sigma_{P_\nu} \ldots \sigma_{P_\lambda}('A_{\mathfrak{c}})) \\ &\subseteq A_{\mathfrak{p}} - \sigma_{P_\nu} \ldots \sigma_{P_\lambda}('A_{\mathfrak{c}}), \end{aligned} \tag{13.53}$$

woraus $P_\lambda = v_{P_\lambda} \ldots v_{P_\nu}(P_0)$ folgt. Nun werde

$$S = v_{R_\lambda} \ldots v_{R_\mu}(Q_0) \tag{13.54}$$

gesetzt und $P_\lambda \neq S$ behauptet. Für $Q_0 \in D_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$ ist nämlich $S \in jA_{\mathfrak{q}}$, also $S \neq P_\lambda$. Für $Q_0 \in jA_{\mathfrak{q}} - D_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}}$ ist $S = R_\lambda \neq P_\lambda$.

Die Punkte S und P_λ lassen sich durch Umgebungen U_1 von S und U_2 von P_λ trennen: $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Durch $\vartheta_{P_\nu}^{-1} \ldots \vartheta_{P_\lambda}^{-1}(U_2) \cap jA_{\mathfrak{p}} = U$ wird eine Umgebung von P_0 und durch $\vartheta_{R_\mu}^{-1} \ldots \vartheta_{R_\lambda}^{-1}(U_1) \cap jA_{\mathfrak{r}} = V$ eine Umgebung von Q_0 gegeben. Es ist

$$\begin{aligned} &\vartheta_{R_\lambda} \ldots \vartheta_{R_\mu}(\gamma_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}}(U \cap D_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}}) \cap V) \\ &= \vartheta_{R_\lambda} \ldots \vartheta_{R_\mu} \sigma_{R_\mu} \ldots \sigma_{R_\lambda} v_{P_\lambda} \ldots v_{P_\nu}(U \cap D_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}}) \cap \vartheta_{R_\lambda} \ldots \vartheta_{R_\mu}(V) \\ &= \vartheta_{P_\lambda} \ldots \vartheta_{P_\nu}(U \cap D_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}}) \cap \vartheta_{R_\lambda} \ldots \vartheta_{R_\mu}(V). \\ &\subseteq U_2 \cap U_1 = \emptyset. \end{aligned} \tag{13.55}$$

Daher ist $\gamma_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}}(U \cap D_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}}) \cap V$ leer. Die Voraussetzungen des Satzes 10.1 sind erfüllt.

e) Nach Satz 10.1 erhält man gemäß der obigen Übersetzungstabelle eine 4-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit F und zu jedem $\mathfrak{p} \in \Delta^\nu$ für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ eine pseudokonforme Abbildung $\tau_{\mathfrak{p}}$ von $jA_{\mathfrak{p}}$ auf $C_{\mathfrak{p}} \subseteq F$, wobei $F = \bigcup_{\nu=0}^{\infty} \bigcup_{\mathfrak{p} \in \Delta^\nu} C_{\mathfrak{p}}$ ist. Für $P \in D_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}}$ ist $\tau_{\mathfrak{r}}^{-1} \tau_{\mathfrak{p}}(P) = \gamma_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}}(P)$ oder $\tau_{\mathfrak{p}}(P) = \tau_{\mathfrak{r}} \gamma_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}}(P)$.

Ist insbesondere $\mathfrak{r} = (R, \mathfrak{p}) \in \Delta^{\nu+1}$, so gilt:

$$\tau_{\mathfrak{p}}(P) = \tau_{\mathfrak{r}}\, \sigma_R(P) \qquad \text{für } P \in jA_{\mathfrak{p}} = D_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}}\,. \tag{13.56}$$

Die 1. Behauptung von Satz 13.1 ist erfüllt.

3. Die Menge $F_{\mathfrak{p}} = \bigcup\limits_{\mathfrak{p} \leqq \mathfrak{r}} C_{\mathfrak{r}}$ ist offen, während $\tilde{N}_{\mathfrak{p}} = F_{\mathfrak{p}} - C_{\mathfrak{p}}$ in $F_{\mathfrak{p}}$ abgeschlossen ist. Es sei $\mathfrak{r} = (R_\mu, \ldots, R_{\nu+1}, \mathfrak{p}) \geqq \mathfrak{p}$ beliebig gewählt. Dann ist

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{\mathfrak{p}} \cap C_{\mathfrak{r}} = C_{\mathfrak{r}} - C_{\mathfrak{p}} &= \tau_{\mathfrak{r}}(jA_{\mathfrak{r}}) - \tau_{\mathfrak{p}}(jA_{\mathfrak{p}}) \\ &= \tau_{\mathfrak{r}}(jA_{\mathfrak{r}}) - \tau_{\mathfrak{p}}(D_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}}) \\ &= \tau_{\mathfrak{r}}(jA_{\mathfrak{r}}) - \tau_{\mathfrak{r}}\, \gamma_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}}(D_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}}) \\ &= \tau_{\mathfrak{r}}(jA_{\mathfrak{r}} - \sigma_{R_\mu} \ldots \sigma_{R_{\nu+1}}(jA_{\mathfrak{p}})) \end{aligned} \tag{13.57}$$

gemäß c) leer oder eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus $C_{\mathfrak{r}}$. Also ist $\tilde{N}_{\mathfrak{p}}$ leer oder eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus $F_{\mathfrak{p}}$. Für $\mathfrak{r} \geqq \mathfrak{p}$ gibt Satz 10.1 die Beziehung

$$C_{\mathfrak{r}} \supseteqq C_{\mathfrak{r}} \cap C_{\mathfrak{p}} = \tau_{\mathfrak{p}}(D_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}}) = \tau_{\mathfrak{p}}(jA_{\mathfrak{p}}) = C_{\mathfrak{p}}\,. \tag{13.58}$$

Insbesondere ist $C_{\mathfrak{p}} \supseteqq C_0$. Wegen $F_0 = \bigcup\limits_{0 \leqq \mathfrak{r}} C_{\mathfrak{r}} = F \supseteqq F_{\mathfrak{p}}$ erhält man $\tilde{N}_{\mathfrak{p}} = F_{\mathfrak{p}} - C_{\mathfrak{p}} \subseteqq F_0 - C_0 = \tilde{N}_0$. Da $\tilde{N}_0$ eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus $F_0 = F$ ist, verhält sich $\tilde{N}_{\mathfrak{p}}$ in F regulär. Für $\mathfrak{r} \geqq \mathfrak{p}$ ist außerdem

$$F_{\mathfrak{p}} = \bigcup_{\mathfrak{p} \leqq \mathfrak{m}} C_{\mathfrak{m}} \supseteqq \bigcup_{\mathfrak{r} \leqq \mathfrak{m}} C_{\mathfrak{m}} = F_{\mathfrak{r}}\,, \tag{13.59}$$

$$\tilde{N}_{\mathfrak{p}} = F_{\mathfrak{p}} - C_{\mathfrak{p}} \supseteqq F_{\mathfrak{r}} - C_{\mathfrak{r}} = \tilde{N}_{\mathfrak{r}}\,, \tag{13.60}$$

womit zugleich die Behauptungen 3 und 4 bewiesen sind.

2. Ist $\mathfrak{r} = (R_\mu, \ldots, R_{\nu+1}, \mathfrak{p}) \in \Delta^\mu$, so wird $C_{\mathfrak{r}}$ durch $\tau_{\mathfrak{r}}^{-1}$ pseudokonform auf $jA_{\mathfrak{r}}$ und $jA_{\mathfrak{r}}$ durch $\vartheta_{R_{\nu+1}} \ldots \vartheta_{R_\mu}$ analytisch in $H_{\mathfrak{p}}$ abgebildet. Also bildet $\vartheta_{R_{\nu+1}} \ldots \vartheta_{R_\mu} \tau_{\mathfrak{r}}^{-1}$ analytisch $C_{\mathfrak{r}}$ in $H_{\mathfrak{p}}$ ab. Für $P \in C_{\mathfrak{p}} \subseteqq C_{\mathfrak{r}}$ ist

$$\tau_{\mathfrak{p}}^{-1}(P) = \gamma_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}\, \tau_{\mathfrak{r}}^{-1}(P) = \vartheta_{R_{\nu+1}} \ldots \vartheta_{R_\mu} \tau_{\mathfrak{r}}^{-1}(P)\,. \tag{13.61}$$

Daher läßt sich $\tau_{\mathfrak{p}}^{-1}(P)$ analytisch auf $C_{\mathfrak{r}}$ fortsetzen. Weil $\tilde{N}_{\mathfrak{p}} = F_{\mathfrak{p}} - C_{\mathfrak{p}}$ leer oder eine rein 2-dimensionale analytische Menge ist, läßt sich $\tau_{\mathfrak{p}}^{-1}(P)$ aus $C_{\mathfrak{p}}$ analytisch zur Abbildung $\omega_{\mathfrak{p}}$ fortsetzen, die $F_{\mathfrak{p}}$ in $H_{\mathfrak{p}}$ abbildet. Ist speziell $\mathfrak{r} = (R, \mathfrak{p}) \in \Delta^{\nu+1}$, so gilt $\omega_{\mathfrak{p}}(P) = \vartheta_R \omega_{\mathfrak{r}}(P)$ für $P \in F_{\mathfrak{r}} \subseteqq F_{\mathfrak{p}}$.

5. Für $\mathfrak{p} \in \Delta^0$, also für $\mathfrak{p} = 0$ hat M_0 eine offene Umgebung U_0, in der eine höchstens 2-dimensionale analytische Menge N'_0 liegt, die $M_0 = M_0 \cup T_0$ umfaßt. Ist $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \in \Delta^\nu$ mit $\nu \geqq 1$ und $M_{\mathfrak{q}} \cup T_{\mathfrak{q}} \subseteqq N'_{\mathfrak{q}}$, wobei $N'_{\mathfrak{q}}$ in einer Umgebung $U_{\mathfrak{q}}$ von $M_{\mathfrak{q}} \cup T_{\mathfrak{q}}$ analytisch und rein 2-dimensional ist, so ist

$$M_{\mathfrak{p}} \cup T_{\mathfrak{p}} \subseteqq \vartheta_P^{-1}(M_{\mathfrak{q}} \cup T_{\mathfrak{q}}) \subseteqq \vartheta_P^{-1}(N'_{\mathfrak{q}}) = N'_{\mathfrak{p}}\,, \tag{13.62}$$

wobei $N'_{\mathfrak{p}}$ in der offenen Umgebung $\vartheta_P^{-1}(U_{\mathfrak{q}}) = U_{\mathfrak{p}}$ von $M_{\mathfrak{p}} \cup T_{\mathfrak{p}}$ analytisch mit $\dim N'_{\mathfrak{p}} \leqq 2$ ist. Mit den schon bewiesenen Behauptungen 1 bis 4 ergibt sich, daß

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} H_{\mathfrak{p}}, & jA_{\mathfrak{p}}, & M_{\mathfrak{p}}, \cup T_{\mathfrak{p}}, & \tau_{\mathfrak{p}} \\ F_{\mathfrak{p}}, & C_{\mathfrak{p}}, & \tilde{N}_{\mathfrak{p}}, & \omega_{\mathfrak{p}} \end{pmatrix} \tag{13.63}$$

eine analytische Modifikation ist. Die Behauptungen 1 bis 5 sind richtig, w. z. b. w.

Insbesondere ist also

$$\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} H_0, A_0, M_0, \tau_0 \\ F, \; C_0, \tilde{N}_0, \omega_0 \end{pmatrix} \tag{13.64}$$

eine analytische Modifikation, und es wird später bewiesen werden, daß man auf diese Art jede analytische Modifikation erhält, bei der die Abbildung ω_0 in jedem Punkt von $\tilde{N}_0$ die Mannigfaltigkeit F ändert. Nun soll noch untersucht werden, unter welchen Voraussetzungen $\omega_\mathfrak{p}(F_\mathfrak{p}) \supseteq jH_\mathfrak{p}$ und insbesondere $\omega_0(F) = H_0$ ist.

Satz 13.2. Voraussetzung. *Ein σ-Baum* $\mathfrak{B} = [H_\mathfrak{p}, A_\mathfrak{p}, {}'A_\mathfrak{p}, B_\mathfrak{p}, M_\mathfrak{p}]$ *mit dem Indexbaum* $\langle \Gamma^\nu, \Delta^\nu, M_\mathfrak{p}\rangle$ *und dem j-Operator* $jS = S - T_\mathfrak{p}$ *sei gegeben. Die abgeschlossene Teilmenge* M_0 *von* H_0 *habe eine offene Umgebung* U, *in der eine höchstens 2-dimensionale analytische Menge* $N_0 \supseteq M_0$ *liegt. Jede Kette* $\mathfrak{p}_1 < \mathfrak{p}_2 < \cdots$ *breche nach endlich vielen Schritten ab.*

Behauptung. *Konstruiert man gemäß Satz 13.1 die Grenzmannigfaltigkeit* F, *so gilt in der Bezeichnungsweise dieses Satzes*:

$$\omega_\mathfrak{p}(F_\mathfrak{p}) \supseteq jH_\mathfrak{p} \qquad \text{für } \mathfrak{p} \in \Delta^\nu \text{ mit } \nu \geq 0\,, \tag{13.65}$$

$$\omega_0(F) = H_0\,. \tag{13.66}$$

Beweis. Ist $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \in \Delta^\nu$ mit $P \in jM_\mathfrak{q}$, so besteht $N_\mathfrak{p} \cap T_\mathfrak{p}$ höchstens aus endlich vielen Punkten. Wegen $P \notin T_\mathfrak{q} = \overline{T}_\mathfrak{q}$ ist nämlich

$$N_\mathfrak{p} \cap \overline{\sigma_P(T_\mathfrak{q} \cap {}'A_\mathfrak{p})} = N_\mathfrak{p} \cap \sigma_P(T_\mathfrak{q} \cap A_\mathfrak{p}) = \theta\,, \tag{13.67}$$

woraus

$$\begin{aligned} N_\mathfrak{p} \cap T_\mathfrak{p} &= N_\mathfrak{p} \cap \overline{\sigma_P([T_\mathfrak{q} \cup M_\mathfrak{q}] \cap {}'A_\mathfrak{p})} \\ &= N_\mathfrak{p} \cap [\overline{\sigma_P(T_\mathfrak{q} \cap {}'A_\mathfrak{p})} \cup \overline{\sigma_P(M_\mathfrak{q} \cap {}'A_\mathfrak{p})}] \\ &\subseteq N_\mathfrak{p} \cap \overline{\sigma_P(N_\mathfrak{q} \cap {}'A_\mathfrak{p})} \end{aligned} \tag{13.68}$$

folgt. Da $N_\mathfrak{q}$ im Falle $\mathfrak{q} = 0$ eine höchstens 2-dimensionale analytische Menge aus U und im Falle $\mathfrak{q} > 0$ eine kompakte komplexe Kurve ist, besteht $N_\mathfrak{p} \cap \overline{\sigma_P(N_\mathfrak{q} \cap {}'A_\mathfrak{p})}$ aus höchstens endlich vielen Punkten, was dann auch für die Teilmenge $N_\mathfrak{p} \cap T_\mathfrak{p}$ gilt.

Wenn $P_{\nu+1} \in jM_{\mathfrak{p}_\nu}$ und $\mathfrak{p}_\nu \in \Delta^\nu$ ist, so werde $\mathfrak{p}_{\nu+1} = (P_{\nu+1}, \mathfrak{p}_\nu)$ gesetzt. Es ist $\mathfrak{p}_{\nu+1} \in \Delta^{\nu+1}$ und $T_{\mathfrak{p}_{\nu+1}} \cap N_{\mathfrak{p}_{\nu+1}}$ besteht aus höchstens endlich vielen Punkten. Nun werden der Reihe nach $\mathfrak{p}_{\nu+1}, \ldots, \mathfrak{p}_\lambda \ldots$ konstruiert, so daß nach Konstruktion von $\mathfrak{p}_\lambda$ gilt:

1. Für $\lambda \geq \mu \geq \nu + 1$ ist $\mathfrak{p}_\mu = (P_\mu, \mathfrak{p}_{\mu-1}) \in \Delta^\mu$
2. Für $\lambda \geq \mu \geq \nu + 1$ ist $P_\mu \in jM_{\mathfrak{p}_{\mu-1}}$.
3. Für $\lambda > \mu \geq \nu + 1$ ist $N_{\mathfrak{p}_\mu} = M_{\mathfrak{p}_\mu}$.
4. Entweder ist $N_{\mathfrak{p}_\lambda} = M_{\mathfrak{p}_\lambda}$ oder $N_{\mathfrak{p}_\lambda} \cap jA_{\mathfrak{p}_\lambda} \neq \theta$.

Für $\lambda = \nu + 1$ sind die Aussagen 1 bis 3 erfüllt. Da $P_{\nu+1} \in jM_{\mathfrak{p}_\nu}$ ist, enthält $N_{\mathfrak{p}_{\nu+1}} \cap T_{\mathfrak{p}_{\nu+1}}$ höchstens endlich viele Punkte. Ist $N_{\mathfrak{p}_{\nu+1}} \neq M_{\mathfrak{p}_{\nu+1}}$, also $N_{\mathfrak{p}_{\nu+1}} \supset M_{\mathfrak{p}_{\nu+1}}$,

so ist $N_{\mathfrak{p}_{\nu+1}} \cap A_{\mathfrak{p}_{\nu+1}}$ eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus $A_{\mathfrak{p}_{\nu+1}}$. Also ist $N_{\mathfrak{p}_{\nu+1}} \cap jA_{\mathfrak{p}_{\nu+1}} = N_{\mathfrak{p}_{\nu+1}} \cap A_{\mathfrak{p}_{\nu+1}} - N_{\mathfrak{p}_{\nu+1}} \cap T_{\mathfrak{p}_{\nu+1}} \neq 0$. Für $\lambda = \nu + 1$ gelten die Aussagen 1 bis 4.

Sind sie für $\mathfrak{p}_\lambda$ erfüllt und ist $N_{\mathfrak{p}_\lambda} \cap jA_{\mathfrak{p}_\lambda} \neq 0$, so möge die Konstruktion abgebrochen werden. Ist aber $N_{\mathfrak{p}_\lambda} \cap jA_{\mathfrak{p}_\lambda}$ leer, so ist $M_{\mathfrak{p}_\lambda} = N_{\mathfrak{p}_\lambda} \neq 0$. Wegen $\mathfrak{p}_\lambda = (P_\lambda, \mathfrak{p}_{\lambda-1})$ mit $P_\lambda \in jM_{\mathfrak{p}_{\lambda-1}}$ besteht $N_{\mathfrak{p}_\lambda} \cap T_{\mathfrak{p}_\lambda}$ aus höchstens endlich vielen Punkten. Also ist $jM_{\mathfrak{p}_\lambda} = jN_{\mathfrak{p}_\lambda} = N_{\mathfrak{p}_\lambda} - N_{\mathfrak{p}_\lambda} \cap T_{\mathfrak{p}_\lambda}$ nicht leer. Man kann einen Punkt $P_{\lambda+1} \in jM_{\mathfrak{p}_\lambda}$ wählen. Es ist $\mathfrak{p}_{\lambda+1} = (P_{\lambda+1}, \mathfrak{p}_\lambda) \in \Delta^{\lambda+1}$, und die Aussagen 1 bis 3 sind für $\lambda + 1$ statt λ erfüllt. Ist $N_{\mathfrak{p}_{\lambda+1}} \neq M_{\mathfrak{p}_{\lambda+1}}$, so ist $N_{\mathfrak{p}_{\lambda+1}} \supset M_{\mathfrak{p}_{\lambda+1}}$ und $N_{\mathfrak{p}_{\lambda+1}} \cap A_{\mathfrak{p}_{\lambda+1}}$ eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus $A_{\mathfrak{p}_{\lambda+1}}$. Wegen $P_{\lambda+1} \in jM_{\mathfrak{p}_\lambda}$ besteht $N_{\mathfrak{p}_{\lambda+1}} \cap T_{\mathfrak{p}_{\lambda+1}}$ aus höchstens endlich vielen Punkten. Daher ist $N_{\mathfrak{p}_{\lambda+1}} \cap jA_{\mathfrak{p}_{\lambda+1}} = N_{\mathfrak{p}_{\lambda+1}} \cap A_{\mathfrak{p}_{\lambda+1}} - N_{\mathfrak{p}_{\lambda+1}} \cap T_{\mathfrak{p}_{\lambda+1}}$ nicht leer. Die Aussagen 1 bis 4 gelten für $\lambda + 1$ statt λ.

Nach endlich vielen Schritten bricht die monoton ansteigende Folge $\mathfrak{p}_\nu < \mathfrak{p}_{\nu+1} < \cdots$ mit $\mathfrak{p}_\varrho$ ab. Folglich ist $N_{\mathfrak{p}_\varrho} \cap jA_{\mathfrak{p}_\varrho} \neq 0$. Es gibt einen Punkt $R \in \tau_{\mathfrak{p}_\varrho}(N_{\mathfrak{p}_\varrho} \cap jA_{\mathfrak{p}_\varrho})$ mit $R \in C_{\mathfrak{p}_\varrho} \subseteq F_{\mathfrak{p}_\nu}$ und $Q = \tau_{\mathfrak{p}_\varrho}^{-1}(R) \in N_{\mathfrak{p}_\varrho} \cap jA_{\mathfrak{p}_\varrho}$. Also ist

(13.69) $\quad \omega_{\mathfrak{p}_\nu}(R) = \vartheta_{P_{\nu+1}} \ldots \vartheta_{P_\varrho} \tau_{\mathfrak{p}_\varrho}^{-1}(R) = \vartheta_{P_{\nu+1}} \ldots \vartheta_{P_\varrho}(Q) = P_{\nu+1}$.

Da $P_{\nu+1} \in jM_{\mathfrak{p}_\nu}$ beliebig gewählt war, ist $\omega_{\mathfrak{p}_\nu}(F_{\mathfrak{p}_\nu}) \supseteq jM_{\mathfrak{p}_\nu}$, woraus

(13.70) $\quad jH_{\mathfrak{p}_\nu} = jA_{\mathfrak{p}_\nu} \cup jM_{\mathfrak{p}_\nu} \subseteq \omega_{\mathfrak{p}_\nu}(C_{\mathfrak{p}_\nu}) \cup \omega_{\mathfrak{p}_\nu}(F_{\mathfrak{p}_\nu}) = \omega_{\mathfrak{p}_\nu}(F_{\mathfrak{p}_\nu})$

folgt, w. z. b. w.

Es seien noch 2 Bemerkungen zum Begriff des σ-Baumes und seiner Grenzmannigfaltigkeit gestattet.

1. Ist die Menge $\bigcup_{\nu=0}^{\infty} \Delta^\nu$ endlich, so ist $\tilde{N}_0$ kompakt und besteht aus den irreduziblen Teilen $N_{\mathfrak{p}}^* = \overline{\tau_{\mathfrak{p}}(N_{\mathfrak{p}} \cap jA_{\mathfrak{p}})}$ mit $\mathfrak{p} > 0$. H. Hopf[7]) definiert als σ-Baum den Nerv von $\tilde{N}_0$, das ist der Streckenkomplex S, dessen Ecken (0-Simplizes) die irreduziblen Teile $N_{\mathfrak{p}}^*$ und dessen Strecken (1-Simplizes) die Paare $(N_{\mathfrak{p}}^*, N_{\mathfrak{q}}^*)$ mit $N_{\mathfrak{p}}^* \cap N_{\mathfrak{q}}^* \neq 0$ sind. Dann und nur dann ist $N_{\mathfrak{p}}^* \cap N_{\mathfrak{q}}^* \neq 0$, wenn $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ Nachbarn sind. Jedem Indexbaum ist ein Streckenkomplex J zugeordnet, dessen Ecken die Indizes $\mathfrak{p} \in \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \Delta^\nu$ und dessen Strecken die Paare $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ von Nachbarn $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ sind. Beide Streckenzüge sind isomorph vermöge der Abbildung $\mathfrak{p} \to N_{\mathfrak{p}}^*$. Insofern stimmen beide Begriffe des σ-Baumes überein. Ist aber $\bigcup_{\nu=0}^{\infty} \Delta^\nu$ unendlich, so können die analytischen Mengen $N_{\mathfrak{p}}^*$ reduzibel oder gar leer sein. Dann brauchen also J und S nicht mehr isomorph zu sein. Hier unterscheiden sich die beiden Begriffe.

Jeder der Streckenzüge J und S enthält keinen Zyklus und kann daher Baum genannt werden. Zu einem Streckenkomplex S ohne Zyklus kann es immer noch verschiedene Indexbäume geben. Der Indexbaum wird erst eindeutig bestimmt, wenn man in jeder Komponente von S ein und nur ein Element als Element von Δ^1 auszeichnet.

2. In der Topologie werden Limesräume gerichteter und inverser Systeme eingeführt[9]). Die Grenzmannigfaltigkeit F eines σ-Baumes $[H_\mathfrak{p}, A_\mathfrak{p}, 'A_\mathfrak{p}, B_\mathfrak{p}, N_\mathfrak{p}]$ mit dem Indexbaum $\langle \Gamma_\nu, \Delta^\nu, M_\mathfrak{p} \rangle$ ergibt sich als Limesraum des gerichteten Systemes $(jA_\mathfrak{p}, \gamma_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}})$, nämlich als der $jA_\mathfrak{p}$-ale Limes im Sinne von FREUDENTHAL, wenn man voraussetzt, daß je zwei Elemente von $\bigcup\limits_{\nu=0}^{\infty} \Delta^\nu - \Delta$ auch einen gemeinsamen oberen Nachbarn haben. Das ist dann und nur dann der Fall, wenn jedes Δ^ν höchstens aus einem Element besteht. In allen anderen Fällen ist das nicht mehr richtig, da dann Δ bezüglich der gegebenen Teilordnung nicht mehr gerichtet ist. Man könnte versuchen, in Δ eine andere Quasiordnung, etwa nach der Stufe einzuführen, die dann gerichtet ist. Dann müßte aber für Stufe $\mathfrak{r} >$ Stufe $\mathfrak{p}$ auch $\gamma_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}}(jA_\mathfrak{p}) \subsetneqq jA_\mathfrak{r}$ sein, was wegen $\theta \neq \gamma_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}}(jA_\mathfrak{p} - D_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}}) \subsetneqq T_\mathfrak{r}$ im Falle $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{p} \neq \mathfrak{r}$ unmöglich ist. Ebenso führt die Einführung einer Teilordnung $\mathfrak{r} < \mathfrak{p}$, wenn $\mathfrak{p} < \mathfrak{r}$, nicht zum Ziel. Dann wäre zwar $(H_\mathfrak{p}, \gamma_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}})$ (oder auch $(jB_\mathfrak{p}, \gamma_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}})$) ein gerichtetes System, aber der Limesraum wäre H_0 (bzw. A_0), hätte also nichts mit der Grenzmannigfaltigkeit F zu tun.

Ebenso überlegt man sich, daß F nicht in natürlicher Weise Limesraum eines inversen Systemes ist, selbst nicht im einfachsten Fall, in dem jedes Δ^ν genau aus einem Element besteht. Ein inverses System würde man dann nur durch $H_\mathfrak{p}, \gamma_{\mathfrak{r}\mathfrak{p}}$ (mit $\mathfrak{r} \leqq \mathfrak{p}$) erhalten. Der Limesraum Y wäre der $H_\mathfrak{p}$-adische Limesraum von FREUDENTHAL. Man kann einen Teil von Y in natürlicher Weise mit F identifizieren, so daß $Y = F \cup P$ ist, wobei $P = (P_0, P_1, \ldots, P_\nu, \ldots)$ mit $P_\nu \in M_\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p} \in \Delta_\nu$ ist. (Zu jedem ν gibt es genau einen solchen Punkt P_ν.) Die irreduziblen Teile von N_0 häufen sich in P, weshalb Y keine komplexe Mannigfaltigkeit ist.

§ 14. Die Erzeugung analytischer Modifikationen

Der Satz 11.1, also der Satz von H. HOPF über die Erzeugung analytischer Modifikationen durch σ-Prozesse, kann nun ohne Einschränkung bewiesen werden.

Satz 14.1. Die Erzeugung analytischer Modifikationen.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M; \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei analytisch.*

Behauptung. *Man kann einen σ-Baum $\mathfrak{B} = [H_\mathfrak{p}, A_\mathfrak{p}, 'A_\mathfrak{p}, B_\mathfrak{p}, N_\mathfrak{p}]$ mit dem Indexbaum $\langle \Gamma^\nu, \Delta^\nu, M_\mathfrak{p} \rangle$ und dem j-Operator $jS = S - T_\mathfrak{p}$ angeben und zu ihm nach Satz* 13.1 *die Grenzmannigfaltigkeit F mit den Mengen $F_\mathfrak{p}, C_\mathfrak{p}, \hat{N}_\mathfrak{p}$ und den Abbildungen $\tau_\mathfrak{p}, \omega_\mathfrak{p}$ bestimmen, so daß gilt:*

1. *Es ist $H_0 = G$, $A_0 \supseteqq A$ und $M_0 \subseteqq M$.*

2. *Ist $\mathfrak{p} \in \Delta^\nu$ mit $\nu \geqq 0$, so wird H durch eine analytische Abbildung $\gamma_\mathfrak{p}$ mit der Vielfachheit $\varphi_\mathfrak{p}$ in $H_\mathfrak{p}$ abgebildet. Entweder ist $\hat{N}_\mathfrak{p} = \{Q \mid q_\mathfrak{p}(Q) = 0\}$ leer*

[9]) Man vergleiche: H. FREUDENTHAL, Entwicklungen von Räumen und ihren Gruppen. Compositio Math. Bd. 4, 146—238, 1935. Zum Begriff der inversen und gerichteten Systeme vergleiche man etwa S. LEFSCHETZ: Algebraic Topology. A.M.S. 1942, Kap. I 7 und Kap. II 3 und S. EILENBERG — N. STEENROD: Foundations of algebraic topology. Kap. VII. 1952.

oder eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus H, die in N enthalten ist. Durch $\gamma_\mathfrak{p}$ wird $\hat{A}_\mathfrak{p} = H - \hat{N}_\mathfrak{p}$ pseudokonform in $jA_\mathfrak{p}$ abgebildet. Es ist

$$(14.1)\qquad \begin{aligned} M_0 &= \overline{\gamma_0(\hat{N}_0)}, \\ M_\mathfrak{p} &= \overline{\gamma_\mathfrak{p}(\hat{N}_\mathfrak{p})} \cap N_\mathfrak{p} \qquad \textit{für } \mathfrak{p} \in \Delta^\nu \textit{ mit } \nu \geq 1 . \end{aligned}$$

3. *Für $Q \in H$ ist*

$$(14.2)\qquad \gamma_0(Q) = v(Q, H) .$$

Ist $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \in \Delta^\nu$ *mit* $\nu \geq 1$ *und setzt man* $\vartheta_P(Q) = v_P(Q, H_\mathfrak{p})$ *für* $Q \in H_\mathfrak{p}$, *so ist*

$$(14.3)\qquad \gamma_\mathfrak{p}(Q) = \sigma_P\, \gamma_\mathfrak{q}(Q) \qquad \textit{für } Q \in \hat{A}_\mathfrak{q} ,$$

$$(14.4)\qquad \gamma_\mathfrak{q}(Q) = \vartheta_P\, \gamma_\mathfrak{p}(Q) \qquad \textit{für } Q \in H .$$

4. *Eine pseudokonforme Abbildung π bildet H auf $\tilde{H} \subseteq F$ ab, wobei gilt:*

$$(14.5)\qquad H = \bigcup_{\nu=0}^{\infty} \bigcup_{\mathfrak{p} \in \Delta^\nu} \hat{A}_\mathfrak{p} ,$$

$$(14.6)\qquad \pi(Q) = \tau_\mathfrak{p}\, \gamma_\mathfrak{p}(Q) \qquad \textit{für } Q \in \hat{A}_\mathfrak{p} ,$$

$$(14.7)\qquad \pi(\hat{A}_\mathfrak{p}) \subseteq C_\mathfrak{p} ,$$

$$(14.8)\qquad \pi(\hat{N}_\mathfrak{p}) \subseteq F - C_\mathfrak{p} .$$

5. *Setzt man $\tilde{B} = \pi(B)$ und $\tilde{N} = \pi(N)$, so ist die analytische Modifikation $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau_0 \\ \tilde{H}, \tilde{B}, \tilde{N}, \omega_0 \end{pmatrix}$ vermöge der Abbildung π äquivalent der gegebenen Modifikation.*

Beweis. I. *Die Konstruktion des σ-Baumes.*

Der σ-Baum $\mathfrak{B}$ mit dem zugehörigen Indexbaum werde durch Induktion nach der Stufe ν schrittweise konstruiert.

a) *Formulierung der Konstruktionsvorschrift*: Ist man bei der Konstruktion bis zur Stufe ν gelangt, so soll gelten:

1_ν. Es sind Mengen $\Gamma^0, \ldots, \Gamma^\nu$ und $\Delta^\mu \subseteq \Gamma^\mu \times \cdots \times \Gamma^0$ für $\mu = 0, 1, \ldots, \nu$ gegeben. Für $0 \leq \mu \leq \nu$ ist jedem $\mathfrak{p} \in \Delta^\mu$ eine Menge $M_\mathfrak{p} \in \Gamma^\mu$ zugeordnet. Es besteht $\Gamma^0 = \Delta^0$ aus einem einzigen Element, das mit 0 bezeichnet werde. Für $0 \leq \mu < \nu$ gilt:

$$(14.9)\qquad \Delta^{\mu+1} = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \quad \text{mit } P \in M_\mathfrak{q} \text{ und } \mathfrak{q} \in \Delta^\mu\} .$$

2_ν. Zu jedem $\mathfrak{p} \in \Delta^\mu$ mit $0 \leq \mu \leq \nu$ ist eine 4-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit $H_\mathfrak{p}$ gegeben, die $M_\mathfrak{p}$ als abgeschlossene Teilmenge enthält, und wobei $A_\mathfrak{p} = H_\mathfrak{p} - M_\mathfrak{p}$ ist. Für $\nu = 0$, also $\mathfrak{p} = 0$ ist dabei $H_0 = G$, $M_0 \subseteq M$ und $A_0 \supseteq A$. Für $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \in \Delta^\mu$ mit $0 < \mu < \nu$ ist dabei

$$(14.10)\qquad \mathfrak{S}_\mathfrak{p} = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} H_\mathfrak{q}, {}'A_\mathfrak{p}, P, \sigma_P \\ H_\mathfrak{p}, B_\mathfrak{p}, N_\mathfrak{p}, v_P \end{pmatrix}$$

ein σ-Prozeß im Punkt $P \in M_\mathfrak{q}$.

3_ν. Ist $\mathfrak{p} \in \Delta^\mu$ mit $0 \leqq \mu \leqq \nu$, so wird H durch eine analytische Abbildung $\gamma_\mathfrak{p}$ mit der Vielfachheit $\varphi_\mathfrak{p}$ in $H_\mathfrak{p}$ abgebildet. Entweder ist $\hat{N}_\mathfrak{p} = \{Q \mid \varphi_\mathfrak{p}(Q) > 0\}$ leer oder eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus H, die in N enthalten ist. Durch $\gamma_\mathfrak{p}$ wird $\hat{A}_\mathfrak{p} = H - \hat{N}_\mathfrak{p} \supseteq B$ pseudokonform in $A_\mathfrak{p}$ abgebildet. Für $\mu = 0$, also $\mathfrak{p} = 0$ ist

$$M_0 = \overline{\gamma_0(\hat{N}_0)}\,. \tag{14.11}$$

Für $1 \leqq \mu \leqq \nu$ ist

$$M_\mathfrak{p} = \overline{\gamma_\mathfrak{p}(\hat{N}_\mathfrak{p})} \cap N_\mathfrak{p}\,. \tag{14.12}$$

4_ν. Für $Q \in H$ ist

$$\gamma_0(Q) = v(Q, H)\,. \tag{14.13}$$

Ist $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \in \Delta^\mu$ mit $\nu \geqq \mu \geqq 1$ und setzt man $\vartheta_P(Q) = v_P(Q, H_\mathfrak{p})$ für $Q \in H_\mathfrak{p}$, so ist

$$\gamma_\mathfrak{p}(Q) = \sigma_P\, \gamma_\mathfrak{q}(Q) \qquad \text{für } Q \in \hat{A}_\mathfrak{q}\,, \tag{14.14}$$

$$\gamma_\mathfrak{q}(Q) = \vartheta_P\, \gamma_\mathfrak{p}(Q) \qquad \text{für } Q \in H\,. \tag{14.15}$$

b) *Die Konstruktion werde für $\nu = 0$ durchgeführt.*

1_0: Es sei $\Gamma^0 = \Delta^0 = \{0\}$. Durch $\gamma_0(Q) = v(Q, H)$ wird H analytisch in $H_0 = G$ mit der Vielfachheit $\varphi_0(Q)$ abgebildet. Es werde $\hat{N}_0 = \{Q \mid \varphi_0(Q) > 0\}$ und $M_0 = \overline{\gamma_0(\hat{N}_0)}$ gesetzt.

2_0: Die abgeschlossene Menge M_0 liegt in $H_0 = G$. Da $\varphi_0(Q) = 0$ für $Q \in B$ ist, ergibt sich $\hat{N}_0 \subseteq N$ und $\gamma_0(\hat{N}_0) \subseteq M$; weil M abgeschlossen ist, folgt $M_0 = \overline{\gamma_0(\hat{N}_0)} \subseteq M$ und $A_0 = H_0 - M_0 \supseteq G - M = A$.

3_0: Als Teilmenge von N hat $\hat{N}_0 = \{Q \mid \varphi_0(Q) > 0\}$ keinen inneren Punkt. Nach Satz 7.1 ist $\hat{N}_0$ leer oder eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus H und $\hat{A}_0 = H - \hat{N}_0$ wird durch γ_0 pseudokonform auf die offene Teilmenge $\gamma_0(\hat{A}_0) \subseteq H_0 - \gamma_0(\hat{N}_0)$ abgebildet. Also ist $\gamma_0(\hat{A}_0) \subseteq H_0 - \overline{\gamma_0(\hat{N}_0)} = H_0 - M_0 = A_0$. Wegen $\hat{N}_0 \subseteq N$ ist $\hat{A}_0 \supseteq B$.

4_0 ist schon bewiesen.

c) ***Ist die Konstruktion bis ν durchgeführt, so werde sie bis zu $\nu + 1$ weitergeführt.***

$1_{\nu+1}$: Es werde

$$\Gamma^{\nu+1} = \bigcup_{\mathfrak{q} \in \Delta^\nu} M_\mathfrak{q}\,, \tag{14.16}$$

$$\Delta^{\nu+1} = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \text{ mit } P \in M_\mathfrak{q} \text{ und } \mathfrak{q} \in \Delta^\nu\} \tag{14.17}$$

gesetzt. Die Mengen $M_\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p} \in \Delta^{\nu+1}$ werden später konstruiert.

$2_{\nu+1}$: Zu jedem $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \in \Delta^{\nu+1}$ wird $H_\mathfrak{p}$ durch den σ-Prozeß

$$\mathfrak{S}_\mathfrak{p} = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} H_\mathfrak{q}, & 'A_\mathfrak{p}, & P, & \sigma_P \\ H_\mathfrak{p}, & B_\mathfrak{p}, & N_\mathfrak{p}, & v_P \end{pmatrix} \tag{14.18}$$

im Punkt $P \in M_\mathfrak{q}$ definiert. Die Voraussetzungen von Satz 10.16 und seiner Anmerkung 1 sind erfüllt, wie die folgende Übersetzungstabelle zeigt.

Satz 10.16	H	$\varkappa$	φ_*	H_1	G	B	A	N	M	$\mathfrak{S}_M$	σ_M	$\tilde{H}$
Hier	H	$\gamma_{\mathfrak{q}}$	$\varphi_{\mathfrak{q}}$	$\gamma_{\mathfrak{q}}(H)$	$H_{\mathfrak{q}}$	$\hat{A}_{\mathfrak{q}}$	$'A_{\mathfrak{p}}$	$\hat{N}_{\mathfrak{q}}$	$\{P\}$	$\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}$	σ_P	$H_{\mathfrak{p}}$

Satz 10.16	$\tilde{B}$	$\tilde{N}$	v_M	N_*	H_*	γ	φ_γ
Hier	$B_{\mathfrak{p}}$	$N_{\mathfrak{p}}$	v_P	$\hat{N}_{\mathfrak{q}}$	H	$\gamma_{\mathfrak{q}}$	$\varphi_{\mathfrak{p}}$

Durch $\gamma_{\mathfrak{p}}$ wird H analytisch in $H_{\mathfrak{p}}$ mit der Vielfachheit $\varphi_{\mathfrak{p}}$ abgebildet. Es ist

(14.19) $$\gamma_{\mathfrak{p}}(Q) = \sigma_P\, \gamma_{\mathfrak{q}}(Q) \qquad \text{für } Q \in \hat{A}_{\mathfrak{q}},$$

(14.20) $$1 \leqq \varphi_{\mathfrak{p}}(Q) \leqq \varphi_{\mathfrak{q}}(Q) \qquad \text{für } Q \in H,$$

(14.21) $$\varphi_{\mathfrak{p}}(Q) < \varphi_{\mathfrak{q}}(Q) \qquad \text{für } Q \in H \text{ mit } P = \gamma_{\mathfrak{q}}(Q),$$

(14.22) $$\varphi_{\mathfrak{p}}(Q) = \varphi_{\mathfrak{q}}(Q) \qquad \text{für } Q \in H \text{ mit } P \neq \gamma_{\mathfrak{q}}(Q).$$

Die analytische Menge $\hat{N}_{\mathfrak{p}} = \{Q \mid \varphi_{\mathfrak{p}}(Q) > 0\}$ liegt in $\hat{N}_{\mathfrak{q}} \subseteqq N$ und ist entweder leer oder rein 2-dimensional. Es ist

(14.23) $$M_{\mathfrak{p}} = \overline{\gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{N}_{\mathfrak{p}})} \cap N_{\mathfrak{p}}$$

eine abgeschlossene Teilmenge von $H_{\mathfrak{p}}$. Die Aussagen $2_{\nu+1}$ und jetzt auch $1_{\nu+1}$ sind bewiesen.

$3_{\nu+1}$: Ist $\mathfrak{p} \in \Delta^{\nu+1}$, so wird $\hat{A}_{\mathfrak{p}} = H - \hat{N}_{\mathfrak{p}} \supseteqq B$ durch $\gamma_{\mathfrak{p}}$ pseudokonform in $\underline{H_{\mathfrak{p}} - \gamma_{\mathfrak{p}}}(\hat{N}_{\mathfrak{p}})$ abgebildet. Da $\gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{p}})$ offen ist, wird $\hat{A}_{\mathfrak{p}}$ sogar in $H - \gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{N}_{\mathfrak{p}}) \subseteqq H_{\mathfrak{p}} - M_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}$ abgebildet. Die übrigen Behauptungen von $3_{\nu+1}$ wurden schon vorher bewiesen.

$4_{\nu+1}$: Ist $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \in \Delta^{\nu+1}$ und setzt man $\vartheta_P(Q) = v_P(Q, H_{\mathfrak{p}})$ für $Q \in H_{\mathfrak{p}}$, so wird

(14.24) $$\gamma_{\mathfrak{p}}(Q) = \sigma_P\, \gamma_{\mathfrak{q}}(Q) \qquad \text{für } Q \in \hat{A}_{\mathfrak{q}}$$

oder

(14.25) $$\gamma_{\mathfrak{q}}(Q) = \vartheta_P \cdot \gamma_{\mathfrak{p}}(Q) \qquad \text{für } Q \in \hat{A}_{\mathfrak{q}}.$$

Da aber $\gamma_{\mathfrak{q}}$ und $\vartheta_P\, \gamma_{\mathfrak{p}}$ auf H analytisch sind und $H - \hat{A}_{\mathfrak{q}}$ keinen inneren Punkt hat, gilt sogar

(14.26) $$\gamma_{\mathfrak{q}}(Q) = \vartheta_P\, \gamma_{\mathfrak{p}}(Q) \qquad \text{für } Q \in H.$$

Die Konstruktion ist damit einen Schritt weitergeführt.

d) Somit ist ein σ-Baum $\mathfrak{B} = [H_{\mathfrak{p}}, A_{\mathfrak{p}}, 'A_{\mathfrak{p}}, B_{\mathfrak{p}}, N_{\mathfrak{p}}]$ mit dem Indexbaum $\langle \Gamma^\nu, \Delta^\nu, M_{\mathfrak{p}} \rangle$ konstruiert. Ihm ist eindeutig der j-Operator $jS = S - T_{\mathfrak{p}}$ zugeordnet. Da $M_0 \subseteqq M$ ist und M eine offene Umgebung U hat, in der es eine höchstens 2-dimensionale, M umfassende, analytische Menge gibt, sind die Voraussetzungen von Satz 13.1 erfüllt. Zu $\mathfrak{B}$ kann man also die Grenzmannigfaltigkeit F, ihre Teilmengen $F_{\mathfrak{p}}$, $C_{\mathfrak{p}}$ und $\tilde{N}_{\mathfrak{p}}$ sowie die Abbildungen $\tau_{\mathfrak{p}}$ und $\omega_{\mathfrak{p}}$ bestimmen.

II. *Die Behauptungen 1 bis 5 werden bewiesen.*

1. ist schon bewiesen.

2. *Durch Induktion nach der Stufe ν von $\mathfrak{p}$ werde $\gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{p}}) \subseteqq jA_{\mathfrak{p}}$ bewiesen.*

Für $\nu = 0$, also $\mathfrak{p} = 0$, ist $\gamma_0(\hat{A}_0) \subseteq A_0 = jA_0$. Ist die Behauptung für $\nu - 1$ bewiesen und ist $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \in \Delta^\nu$, so gilt:

$$\gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{q}}) = \sigma_P\, \gamma_{\mathfrak{q}}(\hat{A}_{\mathfrak{q}}) \subseteq \sigma_P(jA_{\mathfrak{q}}) = jB_{\mathfrak{p}} \subseteq jA_{\mathfrak{p}}\,. \tag{14.27}$$

Wegen $\hat{N}_{\mathfrak{p}} \subseteq \hat{N}_{\mathfrak{q}}$ ist $\hat{A}_{\mathfrak{p}} \supseteq \hat{A}_{\mathfrak{q}}$ und auf $\hat{A}_{\mathfrak{p}} - \hat{A}_{\mathfrak{q}}$ hat $\gamma_{\mathfrak{q}}$ die positive Vielfachheit $\varphi_{\mathfrak{q}}(Q)$, während $\gamma_{\mathfrak{p}}$ die Vielfachheit $\varphi_{\mathfrak{p}}(Q) = 0$ hat. Wegen $\gamma_{\mathfrak{q}}(Q) = \vartheta_P \gamma_{\mathfrak{p}}(Q)$ hat ϑ_P auf $\gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{p}} - \hat{A}_{\mathfrak{q}})$ eine positive Vielfachheit. Also ist

$$\gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{p}} - \hat{A}_{\mathfrak{q}}) \subseteq N_{\mathfrak{p}}\,, \tag{14.28}$$

$$\gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{p}}) \cap B_{\mathfrak{p}} = \gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{q}}) \cap B_{\mathfrak{p}} = \gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{q}})\,. \tag{14.29}$$

Setzt man $T^*_{\mathfrak{p}} = \sigma_P((T_{\mathfrak{q}} \cup M_{\mathfrak{q}}) \cap {}'A_{\mathfrak{p}})$, so ist

$$\begin{aligned} T^*_{\mathfrak{p}} \cap \gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{p}}) &= T^*_{\mathfrak{p}} \cap B_{\mathfrak{p}} \cap \gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{p}}) = T^*_{\mathfrak{p}} \cap \gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{q}}) \\ &= T^*_{\mathfrak{p}} \cap \sigma_P\, \gamma_{\mathfrak{q}}(\hat{A}_{\mathfrak{q}}) \subseteq T_{\mathfrak{p}} \cap \sigma_P(jA_{\mathfrak{q}}) \\ &= T_{\mathfrak{p}} \cap jB_{\mathfrak{p}} = \theta. \end{aligned} \tag{14.30}$$

Da $\gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{p}})$ offen ist, erhält man

$$T_{\mathfrak{p}} \cap \gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{p}}) = \overline{T^*_{\mathfrak{p}}} \cap \gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{p}}) \subseteq \overline{T^*_{\mathfrak{p}} \cap \gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{p}})} = \theta \tag{14.31}$$

oder

$$\gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{p}}) \subseteq A_{\mathfrak{p}} - T_{\mathfrak{p}} = jA_{\mathfrak{p}}\,. \tag{14.32}$$

Damit ist die 2. Behauptung durch Induktion bewiesen.

3. ist schon bewiesen.

4. *Zunächst wird* $H = \bigcup_{\nu=0}^{\infty} \bigcup_{\mathfrak{p} \in \Delta^\nu} \hat{A}_{\mathfrak{p}}$ *behauptet*. Ist nämlich $Q \in H$ beliebig gewählt, so ist $\varphi_0(Q) \geq 0$. Ist $\varphi_0(Q)$ positiv, so ist $Q \in \hat{N}_0$, also $P_1 = \gamma_0(Q) \in M_0$, woraus sich $\mathfrak{p}_1 = (P_1, 0) \in \Delta^1$ und $\varphi_0(Q) > \varphi_{\mathfrak{p}_1}(Q) \geq 0$ ergibt. Hat man schon $0 < \mathfrak{p}_1 < \cdots < \mathfrak{p}_\lambda = (P_\lambda, \mathfrak{p}_{\lambda-1}) \in \Delta^\lambda$ mit $\varphi_0(Q) > \cdots > \varphi_{\mathfrak{p}_\lambda}(Q) \geq 0$ konstruiert, und ist $\varphi_{\mathfrak{p}_\lambda}(Q)$ positiv, so sei $P_{\lambda+1} = \gamma_{\mathfrak{p}_\lambda}(Q)$. Wegen $\vartheta_{P_\lambda}\gamma_{\mathfrak{p}_\lambda}(Q) = \gamma_{\mathfrak{p}_{\lambda-1}}(Q)$ und wegen $\varphi_{\mathfrak{p}_{\lambda-1}}(Q) > \varphi_{\mathfrak{p}_\lambda}(Q)$ hat ϑ_{P_λ} in $\gamma_{\mathfrak{p}_\lambda}(Q) = P_{\lambda-1}$ positive Vielfachheit, weshalb $P_{\lambda+1} \in N_{\mathfrak{p}_\lambda}$ ist. Weil außerdem $\varphi_{\mathfrak{p}_\lambda}(Q) > 0$ ist, gehört $P_{\lambda+1}$ zu $M_{\mathfrak{p}_\lambda}$, woraus sich $\mathfrak{p}_{\lambda+1} = (P_{\lambda+1}, \mathfrak{p}_\lambda) \in \Delta^{\lambda+1}$ und $\varphi_0(Q) > \cdots > \varphi_{\mathfrak{p}_\lambda}(Q) > \varphi_{\mathfrak{p}_{\lambda+1}}(Q) \geq 0$ ergibt. Nach spätestens $\varphi_0(Q)$ Schritten bricht das Verfahren mit $\varphi_{\mathfrak{p}_\varrho}(Q) = 0$ ab. Es ist $Q \in \hat{A}_{\mathfrak{p}_\varrho}$, womit die obige Behauptung bewiesen ist.

Ist nun $\mathfrak{p} = (P_\nu, \ldots, P_1, 0) \in \Delta^\nu$, so werde $\mathfrak{p}_\lambda = (P_\lambda, \ldots, P_1, 0)$ für $\lambda = 0, 1, \ldots, \nu$ gesetzt. Für $Q \in \hat{A}_0 \subseteq \ldots \subseteq \hat{A}_{\mathfrak{p}_\lambda} \subseteq \ldots \subseteq \hat{A}_{\mathfrak{p}_\lambda}$ ist $\gamma_{\mathfrak{p}_\lambda}(Q) \in jA_{\mathfrak{p}_\lambda}$, woraus

$$\begin{aligned} \tau_{\mathfrak{p}}\, \gamma_{\mathfrak{p}}(Q) &= \tau_{\mathfrak{p}_\nu}\, \gamma_{\mathfrak{p}_\nu}(Q) = \tau_{\mathfrak{p}_\nu}\, \sigma_{P_\nu}\, \gamma_{\mathfrak{p}_{\nu-1}}(Q) \\ &= \tau_{\mathfrak{p}_{\nu-1}}\, \gamma_{\mathfrak{p}_{\nu-1}}(Q) = \cdots = \tau_0\, \gamma_0(Q) \end{aligned} \tag{14.33}$$

folgt. Daher ist $\tau_0\, \gamma_0$ in allen Punkten von $\hat{N}_0 \cap \bigcup_{\nu=0}^{\infty} \bigcup_{\mathfrak{p} \in \Delta^\nu} \hat{A}_{\mathfrak{p}} = \hat{N}_0 \cap H = \hat{N}_0$

regulär, läßt sich also aus $\hat{A}_0$ in ganz H zu einer analytischen Abbildung π von H in F fortsetzen. Ist $Q \in H$, so ist $Q \in \hat{A}_\mathfrak{p}$ für ein $\mathfrak{p} \in \Delta^\nu$ mit $\nu \geqq 0$. In Q hat π die Vielfachheit $\varphi_\mathfrak{p}(Q) = 0$. Auf $\hat{A}_0$ ist π pseudoform, also bildet π sogar die ganze Mannigfaltigkeit H auf $\tilde{H} = \pi(H) \subseteq F$ pseudoform ab. Für $Q \in \hat{A}_\mathfrak{p}$ ist

(14.34) $$\pi(Q) = \tau_\mathfrak{p}\, \gamma_\mathfrak{p}(Q)\,,$$

(14.35) $$\pi(\hat{A}_\mathfrak{p}) = \tau_\mathfrak{p}\, \gamma_\mathfrak{p}(\hat{A}_\mathfrak{p}) \subseteq \tau_\mathfrak{p}(jA_\mathfrak{p}) = C_\mathfrak{p}\,.$$

Da $\hat{N}_\mathfrak{p} = H - \hat{A}_\mathfrak{p}$ keinen inneren Punkt hat, ist

(14.36) $$\omega_\mathfrak{p}\, \pi(Q) = \gamma_\mathfrak{p}(Q) \qquad \text{für } Q \in H \text{ mit } \pi(Q) \in F_\mathfrak{p}\,,$$

womit sich

(14.37) $$\omega_\mathfrak{p}\,(C_\mathfrak{p} \cap \pi(\hat{N}_\mathfrak{p})) = jA_\mathfrak{p} \cap \gamma_\mathfrak{p}(\hat{N}_\mathfrak{p}) \subseteq A_\mathfrak{p} \cap M_\mathfrak{p} = \theta$$

ergibt. Es ist

(14.38) $$\pi(\hat{N}_\mathfrak{p}) \subseteq F - C_\mathfrak{p}\,.$$

5. Wegen

(14.39) $$\tilde{H} = \pi(H)\,, \quad \tilde{B} = \pi(B)\,, \qquad \tilde{N} = \pi(N)\,,$$

(14.40) $$\omega_0 \pi(Q) = \gamma_0(Q) = v(Q) \qquad \text{für } Q \in B\,,$$

(14.41) $$\pi^{-1}\tau_0(Q) = \tau(Q) \qquad \text{für } Q \in A$$

ist die analytische Modifikation $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau_0 \\ H, \tilde{B}, \tilde{N}, \omega_0 \end{pmatrix}$ vermöge der Abbildung π äquivalent der gegebenen Modifikation, w. z. b. w.

Eine gegebene analytische Modifikation erhält man also, indem man in eine gewisse Teilmenge M_0 von M einen σ-Baum einsetzt und aus dessen Grenzmannigfaltigkeit in der eingesetzten Menge einen gewissen überflüssigen Teil $(F - \pi(H))$ wieder wegläßt. Man erhält also (wenn man mittels der Abbildung π identifiziert) eine Fortsetzung von H, während sich $v(Q, H)$ zu ω_0 fortsetzt. Die Modifikation wird durch den σ-Baum nicht genau gegeben, sondern der σ-Baum gibt eine „etwas zu große" Modifikation, wie das auch bei Satz 11.1 der Fall war.

Nun kann man aber die Operation „Weglassen einer abgeschlossenen Menge" auch durch σ-Prozesse bewirken. Will man beispielsweise die abgeschlossene Menge $M \subset G$ beseitigen, so übt man nur in jedem Punkt P von M einen σ-Prozeß aus und in jedem Punkt eines jeden $N_\mathfrak{p}$ wieder einen σ-Prozeß usw. aus. Immer wird $M_\mathfrak{p} = N_\mathfrak{p}$ gewählt. Die Grenzmannigfaltigkeit des entstehenden σ-Baumes ist $G - M$. Dies ist der Grund dafür, daß es im allgemeinen Fall auch gelingt, eine analytische Modifikation $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ genau durch σ-Prozesse nachzukonstruieren; d. h. man kann durch andere Wahl des σ-Baumes erreichen, daß die Grenzmannigfaltigkeit $F = \pi(H)$ ist:

Satz 14.2. Die Erzeugung analytischer Modifikationen.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei analytisch.*

Behauptung. *Man kann einen σ-Baum* $\mathfrak{B} = [H_\mathfrak{p}, A_\mathfrak{p}, 'A_\mathfrak{p}, B_\mathfrak{p}, N_\mathfrak{p}]$ *mit dem Indexbaum* $\langle \Gamma^\nu, \Delta^\nu, M_\mathfrak{p}\rangle$ *und dem j-Operator* $jS = S - T_\mathfrak{p}$ *angeben und zu ihm nach Satz* 13.1 *die Grenzmannigfaltigkeit F mit den Mengen* $F_\mathfrak{p}, C_\mathfrak{p}, \tilde{N}_\mathfrak{p}$ *und den Abbildungen* $\tau_\mathfrak{p}, \omega_\mathfrak{p}$ *bestimmen, so daß gilt:*

1. *Es ist* $H_0 = G$, $A_0 \geqq A$ *und* $M_0 \subseteq M$.

2. *Ist* $\mathfrak{p} \in \Delta^\nu$ *mit* $\nu \geqq 0$, *so wird H durch eine analytische Abbildung* $\gamma_\mathfrak{p}$ *mit der Vielfachheit* $\varphi_\mathfrak{p}$ *in* $H_\mathfrak{p}$ *abgebildet. Entweder ist* $\hat{N}_\mathfrak{p} = \{Q \mid \varphi_\mathfrak{p}(Q) > 0\}$ *leer oder eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus H, die in N enthalten ist. Durch* $\gamma_\mathfrak{p}$ *wird* $\hat{A}_\mathfrak{p} = H - \hat{N}_\mathfrak{p}$ *pseudokonform auf* $jA_\mathfrak{p}$ *abgebildet. Es ist*

$$M_0 = G - \gamma_0(\hat{A}_0)\,, \tag{14.42}$$

$$M_\mathfrak{p} = N_\mathfrak{p} - \gamma_\mathfrak{p}(\hat{A}_\mathfrak{p}) \qquad \textit{für } \mathfrak{p} \in \Delta^\nu \textit{ mit } \nu \geqq 1\,. \tag{14.43}$$

3. *Für* $Q \in H$ *ist*

$$\gamma_0(Q) = v(Q, H)\,. \tag{14.44}$$

Ist $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \in \Delta^\nu$ *mit* $\nu \geqq 1$ *und setzt man* $\vartheta_\mathfrak{p}(Q) = v_P(Q, H_\mathfrak{p})$ *für* $Q \in H_\mathfrak{p}$, *so ist*

$$\gamma_\mathfrak{p}(Q) = \sigma_P\, \gamma_\mathfrak{q}(Q) \qquad \text{für } Q \in \hat{A}_\mathfrak{q}\,, \tag{14.45}$$

$$\gamma_\mathfrak{q}(Q) = \vartheta_P\, \gamma_\mathfrak{p}(Q) \qquad \text{für } Q \in H\,. \tag{14.46}$$

4. *Eine pseudokonforme Abbildung* π *bildet H auf F ab, wobei gilt:*

$$\pi(Q) = \tau_\mathfrak{p}\, \gamma_\mathfrak{p}(Q) \qquad \text{für } Q \in \hat{A}_\mathfrak{p}\,, \tag{14.47}$$

$$\pi(\hat{A}_\mathfrak{p}) = C_\mathfrak{p}\,, \tag{14.48}$$

$$\pi(\hat{N}_\mathfrak{p}) = F - C_\mathfrak{p}\,. \tag{14.49}$$

5. *Setzt man* $\tilde{B} = \pi(B)$ *und* $\tilde{N} = \pi(N)$, *so ist*

$$\tilde{B} = \tau_0(A) \subseteq C_0\,, \quad \tilde{N} = \omega_0^{-1}(M) \geqq \omega_0^{-1}(M_0) \tag{14.50}$$

und die analytische Modifikation $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau_0 \\ F, \tilde{B}, \tilde{N}, \omega_0 \end{pmatrix}$ *vermöge der Abbildung* π *äquivalent der gegebenen Modifikation* $\mathfrak{M}$.

Zusatz zu Satz 14.2.

Ändert die Abbildung v die Mannigfaltigkeit H in jedem Punkt von N, so ist $A = A_0$, $M = M_0$ *und*

$$\tilde{B} = \pi(B) = \tau_0(A) = C_0\,, \quad \tilde{N} = \pi(N) = \omega_0^{-1}(M) = \tilde{N}_0\,. \tag{14.51}$$

Die analytische Modifikation $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A_0, M_0, \tau_0 \\ F, C_0, \tilde{N}_0, \omega_0 \end{pmatrix}$ *ist äquivalent der gegebenen Modifikation* $\mathfrak{M}$.

Mit Satz 14.2 und seinem Zusatz ist die im Anschluß an Satz 13.1 aufgestellte Behauptung bewiesen.

Der Beweis für Satz 14.2 wird ganz ähnlich wie der Beweis von Satz 14.1 geführt. Es sind nämlich nur die folgenden Änderungen vorzunehmen:

In I a) 3_ν muß es statt „Für $\mu = 0$ also $\ldots \cap N_\mathfrak{p}$" heißen „Für $\mu = 0$, also $\mathfrak{p} = 0$ ist $M_0 = G - \gamma_0(\hat{A}_0)$. Für $1 \leq \mu \leq \nu$ ist $M_\mathfrak{p} = N_\mathfrak{p} - \gamma_\mathfrak{p}(\hat{A}_\mathfrak{p})$."

In I b) ersetzte man in 1_0: $M_0 = \gamma_0(\hat{N}_0)$ durch $M_0 = G - \gamma_0(\hat{A}_0)$ und 2_0 durch 2_0: Auf $\hat{A}_0$ ist γ_0 pseudokonform, also ist $\gamma_0(\hat{A}_0)$ offen und $M_0 = G - \gamma_0(\hat{A}_0)$ abgeschlossen in $H_0 = G$. Es ist

$$M_0 = G - \gamma_0(\hat{A}_0) \subseteq G - \gamma_0(B) = G - A = M\,. \tag{14.52}$$

In I b) 3_0 muß es statt „Also ist $\ldots = A_0$" heißen „Es ist $\gamma(\hat{A}_0) = H_0 - M_0 = A_0$."

In I c) $2_{\nu+1}$ muß es statt „Es ist $M_\mathfrak{p} = \ldots$ von $H_\mathfrak{p}$" heißen „Durch $\gamma_\mathfrak{p}$ wird $\hat{A}_\mathfrak{p} = H - \hat{N}_\mathfrak{p} \supseteq B$ pseudokonform auf die offene Menge $\gamma_\mathfrak{p}(\hat{A}_\mathfrak{p})$ abgebildet. Also ist

$$M_\mathfrak{p} = N_\mathfrak{p} - \gamma_\mathfrak{p}(A_\mathfrak{p}) \tag{14.53}$$

eine abgeschlossene Teilmenge von $H_\mathfrak{p}$."

In I c) muß $3_{\nu+1}$ ersetzt werden durch: „Es ist

$$\gamma_\mathfrak{p}(\hat{A}_\mathfrak{p}) \subseteq H_\mathfrak{p} - (N_\mathfrak{p} - \gamma_\mathfrak{p}(\hat{A}_\mathfrak{p})) = H_\mathfrak{p} - M_\mathfrak{p} = A_\mathfrak{p}\,. \tag{14.54}$$

Die übrigen Behauptungen von $3_{\nu+1}$ wurden schon bewiesen."

In II 2. muß es in der ersten Zeile statt „$\gamma_\mathfrak{p}(\hat{A}_\mathfrak{p}) \subseteq jA_\mathfrak{p}$" heißen „$\gamma_\mathfrak{p}(\hat{A}_\mathfrak{p}) = jA_\mathfrak{p}$". Außerdem muß es statt „Für $\nu = 0$ also $\mathfrak{p} = 0$ ist $\gamma_0(\hat{A}_0) \subseteq A_0 = jA_0$" heißen „$\gamma_0(\hat{A}_0) = A_0 = jA_0$". Außerdem muß es statt „$\gamma_\mathfrak{p}(\hat{A}_\mathfrak{q}) = \cdots \subseteq jA_\mathfrak{p}$" heißen

$$„\gamma_\mathfrak{p}(\hat{A}_\mathfrak{q}) = \sigma_P\, \gamma_\mathfrak{q}(\hat{A}_\mathfrak{q}) = \sigma_P(jA_\mathfrak{q}) = jB_\mathfrak{p} \subseteq jA_\mathfrak{p}\text{"}\,. \tag{14.55}$$

Außerdem muß es statt „Damit ist die 2. Behauptung ... bewiesen" heißen „Andererseits ist

$$\begin{aligned} N_\mathfrak{p} \cap jA_\mathfrak{p} &= j(N_\mathfrak{p} - M_\mathfrak{p}) = j(N_\mathfrak{p} - (N_\mathfrak{p} - \gamma_\mathfrak{p}(\hat{A}_\mathfrak{p}))) \\ &= j(N_\mathfrak{p} \cap \gamma_\mathfrak{p}(\hat{A}_\mathfrak{p})) \subseteq \gamma_\mathfrak{p}(\hat{A}_\mathfrak{p}) \end{aligned} \tag{14.56}$$

also

$$jA_\mathfrak{p} = jB_\mathfrak{p} \cup (jA_\mathfrak{p} \cap N_\mathfrak{p}) \subseteq \gamma_\mathfrak{p}(\hat{A}_\mathfrak{q}) \cup \gamma_\mathfrak{p}(\hat{A}_\mathfrak{p}) = \gamma_\mathfrak{p}(\hat{A}_\mathfrak{p})\,. \tag{14.57}$$

Insgesamt folgt $jA_\mathfrak{p} = \gamma_\mathfrak{p}(\hat{A}_\mathfrak{p})$, womit die 2. Behauptung durch Induktion bewiesen ist."

In II 4 im 2. Abschnitt muß es statt „bildet π sogar ... H auf $\tilde{H} = \pi(H) \subseteq F$ pseudokonform ab" heißen „bildet π sogar ... H in F pseudokonform ab".

In II 4 im 2. Abschnitt muß es statt „$\pi(\hat{A}_\mathfrak{p}) = \ldots \pi(\hat{N}_\mathfrak{p}) \subseteq F - C_\mathfrak{p}$" heißen

$$„\pi(\hat{A}_\mathfrak{p}) = \tau_\mathfrak{p}\, \gamma_\mathfrak{p}(\hat{A}_\mathfrak{p}) = \tau_\mathfrak{p}(jA_\mathfrak{p}) = C_\mathfrak{p}\,, \tag{14.58}$$

$$\pi(H) = \pi\left(\bigcup_{\nu=0}^{\infty} \bigcup_{\mathfrak{p}\in J^\nu} \hat{A}_\mathfrak{p}\right) = \bigcup_{\nu=0}^{\infty} \bigcup_{\mathfrak{p}\in J^\nu} \pi(\hat{A}_\mathfrak{p}) = \bigcup_{\nu=0}^{\infty} \bigcup_{\mathfrak{p}\in J^\nu} C_\mathfrak{p} = F\,. \tag{14.59}$$

Da π die Mannigfaltigkeit H pseudokonform auf F abbildet, ist

$$\pi(\hat{N}_\mathfrak{p}) = \pi(H - \hat{A}_\mathfrak{p}) = \pi(H) - \pi(\hat{A}_\mathfrak{p}) = F - C_\mathfrak{p}\,.\text{"} \tag{14.60}$$

In II ist 5 zu ersetzen durch: „Wegen

$$F = \pi(H), \quad \widetilde{B} = \pi(B), \quad \widetilde{N} = \pi(N), \tag{14.61}$$

$$\omega_0 \pi(Q) = \gamma_0(Q) = v(Q) \qquad \text{für } Q \in B, \tag{14.62}$$

$$\pi^{-1}\tau_0(Q) = \tau(Q) \qquad \text{für } Q \in A \tag{14.63}$$

ist die analytische Modifikation $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau_0 \\ F, \widetilde{B}, \widetilde{N}, \omega_0 \end{pmatrix}$ vermöge der Abbildung π äquivalent zur gegebenen Modifikation. Es ist

$$\widetilde{B} = \pi(B) = \tau_0\, \gamma_0(B) = \tau_0(A) \subseteq \tau_0(A_0) = C_0, \tag{14.64}$$

$$\begin{aligned} \omega_0^{-1}(M) &= \omega_0^{-1}(G - A) = \omega_0^{-1}(G) - \omega_0^{-1}(A) = F - \tau_0(A) = \\ &= F - \widetilde{B} = \pi(H) - \pi(B) = \pi(H - B) = \pi(N) = \widetilde{N}, \end{aligned} \tag{14.65}$$

womit alle Behauptungen von Satz 14.2 bewiesen sind.

Beweis des Zusatzes zu Satz 14.2. Ändert v die Mannigfaltigkeit H in jedem Punkt von N, so ist $\varphi_0(Q)$ positiv für $Q \in N$, d. h. $N = \hat{N}_0$ und $B = \hat{A}_0$. Es folgt $A = \gamma_0(B) = \gamma_0(\hat{A}_0) = A_0$ und $M = M_0$, woraus sich

$$\widetilde{B} = \pi(B) = \pi(\hat{A}_0) = C_0 = \tau_0(A_0) = \tau_0(A), \tag{14.66}$$

$$\widetilde{N} = \pi(N) = \pi(\hat{N}_0) = F - C_0 = \omega_0^{-1}(M) = \omega_0^{-1}(M_0) = \hat{N}_0 \tag{14.67}$$

ergibt. Die analytische Modifikation $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A_0, M_0, \tau_0 \\ F, C_0, \widetilde{N}_0, \omega_0 \end{pmatrix}$ ist vermöge der Abbildung π äquivalent zur gegebenen Modifikation $\mathfrak{M}$, w. z. b. w.

Ist die analytische Modifikation $\mathfrak{M}$ beiderseits offen, so fallen die beiden Konstruktionen zusammen:

Satz 14.3. Beiderseits offene, analytische Modifikationen.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei analytisch und beiderseits offen.*

Behauptung. *Die Aussagen von Satz* 14.1 *lassen sich verschärfen durch*

$$\pi(H) = F, \tag{14.68}$$

$$\gamma_\mathfrak{p}(\hat{A}_\mathfrak{p}) = jA_\mathfrak{p} \qquad \textit{für } \mathfrak{p} \in \Delta^\nu \textit{ mit } \nu \geqq 0. \tag{14.69}$$

$$\pi(\hat{A}_\mathfrak{p}) = C_\mathfrak{p} \qquad \textit{für } \mathfrak{p} \in \Delta^\nu \textit{ mit } \nu \geqq 0. \tag{14.70}$$

$$\pi(\hat{N}_\mathfrak{p}) = F - C_\mathfrak{p} \qquad \textit{für } \mathfrak{p} \in \Delta^\nu \textit{ mit } \nu \geqq 0. \tag{14.71}$$

$$M_\mathfrak{p} = N_\mathfrak{p} - \gamma_\mathfrak{p}(\hat{A}_\mathfrak{p}) \qquad \textit{für } \mathfrak{p} \in \Delta^\nu \textit{ mit } \nu \geqq 0. \tag{14.72}$$

$$M_0 = G - \gamma_0(\hat{A}_0). \tag{14.73}$$

Beweis. Man setzt

$$B_\mathfrak{p}^* = \gamma_\mathfrak{p}(B), \quad N_\mathfrak{p}^* = H_\mathfrak{p} - B_\mathfrak{p}^*. \tag{14.74}$$

Es ist $B_\mathfrak{p}^* \subseteq \gamma_\mathfrak{p}(\hat{A}_\mathfrak{p}) \subseteq jA_\mathfrak{p}$ also $N_\mathfrak{p}^* \supseteq H_\mathfrak{p} - jA_\mathfrak{p} \supseteq M_\mathfrak{p}$ und

$$B_\mathfrak{p}^* = \sigma_P\,(B_\mathfrak{q}^*) \qquad \text{für } \mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \in \Delta^\nu \text{ mit } \nu \geqq 1, \tag{14.75}$$

$$\gamma_\mathfrak{p}(Q) = \sigma_P\, \gamma_\mathfrak{q}(Q) \qquad \text{für } Q \in B,\ \mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \in \Delta^\nu \text{ mit } \nu \geqq 1. \tag{14.76}$$

$$\gamma_\mathfrak{p}^{-1}(Q) = \gamma_\mathfrak{q}^{-1} v_P(Q) \qquad \text{für } Q \in B_\mathfrak{q},\ \mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \in \Delta^\nu \text{ mit } \nu \geqq 1. \tag{14.77}$$

Durch Induktion nach der Stufe ν wird nun bewiesen, daß die analytische Modifikation

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} H_{\mathfrak{p}}, & B^{*}_{\mathfrak{p}}, & N^{*}_{\mathfrak{p}}, & \gamma_{\mathfrak{p}}^{-1} \\ H, & B, & N, & \gamma_{\mathfrak{p}} \end{pmatrix} \tag{14.78}$$

beiderseits offen ist. Für $\nu = 0$ ist

$$\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, & A, & M, & \tau \\ H, & B, & N, & v \end{pmatrix} \tag{14.79}$$

beiderseits offen. Ist die Behauptung für die Stufe ν richtig und ist $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \in \Delta^{\nu+1}$, so sind die Modifikationen

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{q}}^{-1} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} H, & B, & N, & \gamma_{\mathfrak{q}} \\ H_{\mathfrak{q}}, & B^{*}_{\mathfrak{q}}, & N^{*}_{\mathfrak{q}}, & \gamma_{\mathfrak{q}}^{-1} \end{pmatrix} \text{ und } \mathfrak{S}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} H_{\mathfrak{q}}, & 'A_{\mathfrak{p}}, & P, & \sigma_P \\ H_{\mathfrak{p}}, & B_{\mathfrak{p}}, & N_{\mathfrak{p}}, & v_P \end{pmatrix} \tag{14.80}$$

beiderseits offen und $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}$ analytisch. Nach Satz 5.9 und seiner Anmerkung 1 ist auch die zusammengesetzte Modifikation

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}^{-1} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} H, & B, & N, & \sigma_P\,\gamma_{\mathfrak{q}} \\ H_{\mathfrak{p}}, & B^{*}_{\mathfrak{p}}, & N^{*}_{\mathfrak{p}}, & \gamma_{\mathfrak{q}}^{-1}\,v_P \end{pmatrix}, \tag{14.81}$$

also auch $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}$ beiderseits offen.

Daraus folgt $\gamma_{\mathfrak{p}}(H) = H_{\mathfrak{p}}$. Nun wird durch Induktion nach der Stufe ν auch $\gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{p}}) = jA_{\mathfrak{p}}$ bewiesen. Zunächst ergibt sich aus Satz 7.1 die Beziehung

$$\gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{p}}) = H_{\mathfrak{p}} - \gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{N}_{\mathfrak{p}})\,. \tag{14.82}$$

Also ist $\gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{N}_{\mathfrak{p}})$ abgeschlossen, woraus

$$M_0 = \gamma_0(\hat{N}_0)\,, \quad M_{\mathfrak{p}} = \gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{N}_{\mathfrak{p}}) \cap N_{\mathfrak{p}} \tag{14.83}$$

folgt. Für $\nu = 0$ ist

$$\gamma_0(\hat{A}_0) = G - \gamma_0(\hat{N}_0) = G - M_0 = A_0 = jA_0\,. \tag{14.84}$$

Ist die Behauptung für die Stufe ν richtig und ist $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \in \Delta^{\nu+1}$, so gilt:

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{q}}) &= \sigma_P\,\gamma_{\mathfrak{q}}(\hat{A}_{\mathfrak{q}}) = \sigma_P\,(jA_{\mathfrak{q}}) = jB_{\mathfrak{p}}\,, \\ N_{\mathfrak{p}} \cap jA_{\mathfrak{p}} &= j(N_{\mathfrak{p}} - M_{\mathfrak{p}}) = j(N_{\mathfrak{p}} - \gamma(\hat{N}_{\mathfrak{p}})) = j(N_{\mathfrak{p}} \cap \gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{p}})) \\ &= j\,\gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{p}}) \cap N_{\mathfrak{p}} = \gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{p}}) \cap N_{\mathfrak{p}}\,. \end{aligned} \tag{14.85}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{p}}) &\subseteq jA_{\mathfrak{p}} = jB_{\mathfrak{p}} \cup (N_{\mathfrak{p}} \cap jA_{\mathfrak{p}}) \\ &= \gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{q}}) \cup (\gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{p}}) \cap N_{\mathfrak{p}}) \subseteq \gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{p}})\,, \end{aligned} \tag{14.86}$$

woraus $\gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{p}}) = jA_{\mathfrak{p}}$ folgt. Es ist

$$M_{\mathfrak{p}} = N_{\mathfrak{p}} \cap \gamma(\hat{N}_{\mathfrak{p}}) = N_{\mathfrak{p}} - \gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{p}})\,, \tag{14.87}$$

$$M_0 = \gamma_0(\hat{N}_0) = G - \gamma_0(\hat{A}_0)\,, \tag{14.88}$$

$$\pi(\hat{A}_{\mathfrak{p}}) = \tau_{\mathfrak{p}}\,\gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{p}}) = \tau_{\mathfrak{p}}(jA_{\mathfrak{p}}) = C_{\mathfrak{p}}\,, \tag{14.89}$$

$$\begin{aligned} \pi(H) &= \pi\left(\bigcup_{\nu=0}^{\infty} \bigcup_{\mathfrak{p}\in\Delta^{\nu}} \hat{A}_{\mathfrak{p}}\right) = \bigcup_{\nu=0}^{\infty} \bigcup_{\mathfrak{p}\in\Delta^{\nu}} \pi(\hat{A}_{\mathfrak{p}}) \\ &= \bigcup_{\nu=0}^{\infty} \bigcup_{\mathfrak{p}\in\Delta^{\nu}} C_{\mathfrak{p}} = F\,, \end{aligned} \tag{14.90}$$

$$\pi(\hat{N}_{\mathfrak{p}}) = \pi(H - \hat{A}_{\mathfrak{p}}) = \pi(H) - \pi(\hat{A}_{\mathfrak{p}}) = F - C_{\mathfrak{p}}\,, \tag{14.91}$$

w. z. b. w.

Damit ist gezeigt, daß sich eine analytische Modifikation durch σ-Prozesse nachkonstruieren läßt. Diese Erzeugungsmöglichkeit wurde zuerst von H. Hopf bewiesen, jedoch nur für den Fall, daß M nur aus einem Punkt besteht. Seine Überlegungen lassen sich aber, wie oben gezeigt wurde, auf den allgemeinen Fall einer analytischen Modifikation übertragen. Wenn nun die Erzeugungsmöglichkeiten meromorpher Modifikationen untersucht werden, so treten hier wesentliche Schwierigkeiten auf, die jedoch durch den Hauptsatz über meromorphe Modifikationen (Satz 9.4) im Grunde schon überwunden sind.

§ 15. Die Erzeugung meromorpher Modifikationen

Der Satz über die Erzeugung meromorpher Modifikationen[10]) durch σ-Prozesse kann nun ohne Einschränkungen bewiesen werden.

Satz 15.1. Erzeugung meromorpher Modifikationen.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei meromorph und beiderseits offen.*

Behauptung.

A. *Man kann einen σ-Baum $\mathfrak{B} = [H_{\mathfrak{p}}, A_{\mathfrak{p}}, {}'A_{\mathfrak{p}}, B_{\mathfrak{p}}, N_{\mathfrak{p}}]$ mit dem Indexbaum $\langle \Gamma^\nu, \Delta^\nu, M_{\mathfrak{p}} \rangle$ und dem j-Operator $jS = S - T_{\mathfrak{p}}$ angeben und zu ihm nach Satz 13.1 die Grenzmannigfaltigkeit F mit den Mengen $F_{\mathfrak{p}}, C_{\mathfrak{p}}, \tilde{N}_{\mathfrak{p}}$ und den Abbildungen $\tau_{\mathfrak{p}}, \omega_{\mathfrak{p}}$ bestimmen, so daß gilt:*

1. *Es ist $G = H_0$, $A_0 \supseteq A$ und $M_0 \subseteq M$.*

2. *Ist $\mathfrak{p} \in \Delta^\nu$ mit $\nu \geq 0$, so wird $jA_{\mathfrak{p}}$ durch eine analytische Abbildung $\delta_{\mathfrak{p}}$ in H abgebildet. In jedem Punkt von $H_{\mathfrak{p}} - jA_{\mathfrak{p}}$ ist die Abbildung $\delta_{\mathfrak{p}}$ singulär. Es ist*

$$(15.1)\qquad \begin{aligned} M_0 &= M - jA_0 = M - A_0\,, \\ M_{\mathfrak{p}} &= N_{\mathfrak{p}} - jA_{\mathfrak{p}} = N_{\mathfrak{p}} - A_{\mathfrak{p}} \qquad \text{für } \mathfrak{p} \in \Delta^\nu \text{ mit } \nu \geq 1\,. \end{aligned}$$

3. *Für $Q \in A$ ist*

$$(15.2)\qquad \delta_0(Q) = \tau(Q)\,.$$

Für $\mathfrak{p} =_\nu (P, \mathfrak{q}) \in \Delta^\nu$ mit $\nu \geq 1$ ist

$$(15.3)\qquad \delta_{\mathfrak{p}}(Q) = \delta_{\mathfrak{q}}\, v_P(Q) \qquad \text{für } Q \in jB_{\mathfrak{p}}\,,$$

$$(15.4)\qquad \delta_{\mathfrak{q}}(Q) = \delta_{\mathfrak{p}}\, \sigma_P(Q) \qquad \text{für } Q \in jA_{\mathfrak{q}}\,.$$

4. *Die Grenzmannigfaltigkeit F wird durch eine analytische Abbildung χ auf die Mannigfaltigkeit H abgebildet, wobei*

$$(15.5)\qquad \chi(Q) = \delta_{\mathfrak{p}}\, \omega_{\mathfrak{p}}(Q) \qquad \text{für } Q \in C_{\mathfrak{p}}$$

mit $\mathfrak{p} \in \Delta^\nu$ und $\nu \geq 0$ ist.

B. *Man kann einen σ-Baum $\underline{\mathfrak{B}} = [\underline{H}_{\mathfrak{p}}, \underline{A}_{\mathfrak{p}}, {}'\underline{A}_{\mathfrak{p}}, \underline{B}_{\mathfrak{p}}, \underline{N}_{\mathfrak{p}}]$ mit dem Indexbaum $\langle \underline{\Gamma}^\nu, \underline{\Delta}^\nu, \underline{M}_{\mathfrak{p}} \rangle$ und dem j-Operator $j\underline{S} = \underline{S} - \underline{T}_{\mathfrak{p}}$ angeben und zu ihm nach Satz 13.1 die Grenzmannigfaltigkeit $\underline{F}$ mit den Mengen $\underline{F}_{\mathfrak{p}}, \underline{C}_{\mathfrak{p}}, \tilde{\underline{N}}_{\mathfrak{p}}$ und den Abbildungen $\underline{\tau}_{\mathfrak{p}}, \underline{\omega}_{\mathfrak{p}}$ bestimmen, so daß gilt:*

1. *Es ist $H = \underline{H}_0$, $\underline{A}_0 \supseteq B$ und $\underline{M}_0 \subseteq N$.*

---

[10]) Man vergleiche Satz 12.1 in Teil IV.

2. *Ist* $\mathfrak{p} \in \underline{\Delta}^\nu$ *mit* $\nu \geqq 0$, *so wird* $j\underline{A}_\mathfrak{p}$ *durch eine analytische Abbildung* $\underline{\delta}_\mathfrak{p}$ *in G abgebildet. In jedem Punkt von* $\underline{H}_\mathfrak{p} - j\underline{A}_\mathfrak{p}$ *ist die Abbildung* $\underline{\delta}_\mathfrak{p}$ *singulär. Es ist*

$$(15.6)\qquad \begin{aligned} \underline{M}_0 &= N - j\underline{A}_0 = N - \underline{A}_0\,, \\ \underline{M}_\mathfrak{p} &= \underline{N}_\mathfrak{p} - j\underline{A}_\mathfrak{p} = \underline{N}_\mathfrak{p} - \underline{A}_\mathfrak{p} \qquad \text{für } \mathfrak{p} \in \underline{\Delta}^\nu \text{ mit } \nu \geqq 1\,. \end{aligned}$$

3. *Für* $Q \in B$ *ist*

$$(15.7)\qquad \underline{\delta}_0(Q) = v(Q)\,.$$

Für $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \in \underline{\Delta}^\nu$ *mit* $\nu \geqq 1$ *ist*

$$(15.8)\qquad \underline{\delta}_\mathfrak{p}(Q) = \underline{\delta}_\mathfrak{q}\, v_P(Q) \qquad \text{für } Q \in j\underline{B}_\mathfrak{p}\,,$$

$$(15.9)\qquad \underline{\delta}_\mathfrak{q}(Q) = \underline{\delta}_\mathfrak{p}\, \sigma_P(Q) \qquad \text{für } Q \in j\underline{A}_\mathfrak{q}\,.$$

4. *Die Grenzmannigfaltigkeit* $\underline{F}$ *wird durch eine analytische Abbildung* $\underline{\chi}$ *auf G abgebildet, wobei*

$$(15.10)\qquad \underline{\chi}(Q) = \underline{\delta}_\mathfrak{p}\, \underline{\omega}_\mathfrak{p}(Q) \qquad \text{für } Q \in \underline{C}_\mathfrak{p}$$

mit $\mathfrak{p} \in \underline{\Delta}^\nu$ *und* $\nu \geqq 0$ *ist.*

C. *Die pseudokonforme Abbildung* $\underline{\tau}_0 \tau \omega_0$ *von* $\tau_0(A) \subseteq F$ *in* $\underline{F}$ *läßt sich zu einer pseudokonformen Abbildung* π *von F auf* $\underline{F}$ *fortsetzen, so daß gilt:*

1. *Ist die Menge der Punkte aus G, in der die Abbildung* τ *nichts ändert, E, und* $\underline{E}$ *die Menge der Punkte aus H, in der die Abbildung v nichts ändert, und sind*

$$(15.11)\qquad \tilde{E} = \tau_0(E) \text{ und } \tilde{\underline{E}} = \underline{\tau}_0(\underline{E})\,,$$

so gilt

$$(15.12)\qquad \pi(\tilde{E}) = \tilde{\underline{E}}\,,$$

$$(15.13)\qquad \begin{aligned} \pi(P) &= \underline{\tau}_0 \delta_0 \omega_0(P) = \underline{\tau}_0 \chi(P) \\ &= \underline{\chi}^{-1} \omega_0(P) = \underline{\chi}^{-1} \delta_0^{-1} \chi(P) \qquad \text{für } P \in \tilde{E}\,. \end{aligned}$$

2. *Entweder ist* $\tilde{N} = F - \tilde{E}$ *leer oder eine rein 2-dimensionale analytische Menge auf F. Entweder ist* $\tilde{\underline{N}} = \underline{F} - \tilde{\underline{E}}$ *leer oder eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus* $\underline{F}$.

3. *Ist* $\psi_0(P)$ *die Vielfachheit der Abbildung* δ_0 *und* $\underline{\psi}_0(P)$ *die der Abbildung* $\underline{\delta}_0$ *und wird*

$$(15.14)\qquad K_0 = \{P \mid \psi_0(P) > 0\,,\ P \in A_0\} \subseteq G\,,$$

$$(15.15)\qquad \underline{K}_0 = \{P \mid \underline{\psi}_0(P) > 0\,,\ P \in \underline{A}_0\} \subseteq H$$

gesetzt, so ist

$$(15.16)\qquad \tilde{N} = \omega_0^{-1}(K_0 \cup M_0)\,,$$

$$(15.17)\qquad \tilde{\underline{N}} = \underline{\omega}_0^{-1}(\underline{K}_0 \cup \underline{M}_0)\,,$$

$$(15.18)\qquad \pi(\tilde{N}) = \tilde{\underline{N}}\,.$$

Zusatz zu Satz 15.1.

Haben G und H eine abzählbare Basis der offenen Mengen, so haben $M_\mathfrak{p} \cup T_\mathfrak{p}$

und $\underline{M}_{\mathfrak{p}} \cup \underline{T}_{\mathfrak{p}}$ *keinen Häufungspunkt. Es ist*

$$T_{\mathfrak{p}} = \sigma_P\left((T_{\mathfrak{q}} \cup M_{\mathfrak{q}}) \cap {}'A_{\mathfrak{p}}\right) \qquad \textit{für } \mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \in \Delta^\nu, \tag{15.19}$$

$$\underline{T}_{\mathfrak{p}} = \sigma_P\left((\underline{T}_{\mathfrak{q}} \cup \underline{M}_{\mathfrak{q}}) \cap {}'\underline{A}_{\mathfrak{p}}\right) \qquad \textit{für } \mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \in \underline{\Delta}^\nu. \tag{15.20}$$

Beweis. A. a) Es sei ${}^*\underline{A}_0$ die größte Menge aus H, in der v regulär ist. Setzt man ${}^*N = N \cap {}^*\underline{A}_0 = {}^*\underline{A}_0 - B$, so ist $\mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ {}^*\underline{A}_0, B, {}^*N, v\end{pmatrix}$ eine analytische Modifikation. Auf sie wird Satz 14.1 angewandt mittels der Übersetzungstabelle

Satz 14.1	G	A	M	τ	H	B	N	v	$\mathfrak{B}$	$H_{\mathfrak{p}}$	$A_{\mathfrak{p}}$	${}'A_{\mathfrak{p}}$	$B_{\mathfrak{p}}$	$N_{\mathfrak{p}}$
Hier	G	A	M	τ	${}^*\underline{A}_0$	B	${}^*N$	v	$\mathfrak{B}$	$H_{\mathfrak{p}}$	$A_{\mathfrak{p}}$	${}'A_{\mathfrak{p}}$	$B_{\mathfrak{p}}$	$N_{\mathfrak{p}}$

Satz 14.1	Γ^ν	Δ^ν	$M_{\mathfrak{p}}$	$T_{\mathfrak{p}}$	$j\,S = S - T_{\mathfrak{p}}$	F	$F_{\mathfrak{p}}$	$C_{\mathfrak{p}}$	$\tilde{N}_{\mathfrak{p}}$	$\tau_{\mathfrak{p}}$
Hier	Γ^ν	Δ^ν	$M_{\mathfrak{p}}$	$T_{\mathfrak{p}}$	$j\,S = S - T_{\mathfrak{p}}$	F	$F_{\mathfrak{p}}$	$C_{\mathfrak{p}}$	$\tilde{N}_{\mathfrak{p}}$	$\tau'_{\mathfrak{p}}$

Satz 14.1	$\omega_{\mathfrak{p}}$	$\gamma_{\mathfrak{p}}$	$\varphi_{\mathfrak{p}}$	$\hat{N}_{\mathfrak{p}}$	$\hat{A}_{\mathfrak{p}}$	ϑ_P	π	$\tilde{H}$	$\tilde{B}$	$\tilde{N}$
Hier	$\omega_{\mathfrak{p}}$	$\gamma_{\mathfrak{p}}$	$\varphi_{\mathfrak{p}}$	$\hat{N}_{\mathfrak{p}}$	$\hat{A}_{\mathfrak{p}}$	ϑ_P	$\varkappa$	$\breve{H}$	$\breve{B}$	$\breve{N}$

Damit ist der σ-Baum $\mathfrak{B}$ konstruiert.

b) *In jedem Punkt von $A_0 \supseteq A$ ist τ regulär und in jedem Punkt von $M_0 \subseteq M$ ist τ singulär.*

Ist nämlich τ in P_0 singulär, so gibt es nach Satz 9.3 eine rein 2-dimensionale analytische Menge C aus H und eine Punktmenge $D \subset C$ ohne Häufungspunkt, so daß v auf $B \cup (C - D)$ regulär ist und $\gamma_0(Q) = v(Q, H) = P_0$ für $Q \in C - D$ gilt. Also ist $C - D$ in ${}^*\underline{A}_0$ enthalten. Auf $C - D$ hat γ_0 eine positive Vielfachheit; daher ist $C - D \subseteq \hat{N}_0$, woraus

$$P_0 \in v(C - D, H) = \gamma_0(C - D) \subseteq \gamma_0(\hat{N}_0) \subseteq M_0 \tag{15.21}$$

folgt.

Ist umgekehrt $P_0 \in \gamma_0(\hat{N}_0)$, so ist nach Satz 7.1 die Teilmenge $\gamma_0^{-1}(P_0)$ von ${}^*\underline{A}_0$ analytisch und rein 2-dimensional. Weil $\gamma_0^{-1}(P_0) \subseteq \Sigma_\tau(P_0)$ ist, verhält sich $\gamma_0^{-1} = \tau$ in P_0 nicht bestimmt. Es ist τ in P_0 singulär.

Die Menge der singulären Punkte von τ ist abgeschlossen. Also ist τ dann und nur dann in P_0 singulär, wenn

$$P_0 \in \gamma_0(\hat{N}_0) = \overline{\gamma_0(\hat{N}_0)} = M_0 \tag{15.22}$$

ist, w. z. b. w.

c) *Setzt man*

$$B_{\mathfrak{p}}^* = \gamma_{\mathfrak{p}}(B), \quad N_{\mathfrak{p}}^* = H_{\mathfrak{p}} - B_{\mathfrak{p}}^*, \tag{15.23}$$

so ist

$$B_{\mathfrak{p}}^* \subseteq \gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{p}}) \subseteq jA_{\mathfrak{p}}, \quad N_{\mathfrak{p}}^* \supseteq H_{\mathfrak{p}} - jA_{\mathfrak{p}} \supseteq H_{\mathfrak{p}} - A_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}}. \tag{15.24}$$

Durch Induktion nach der Stufe ν von $\mathfrak{p}$ wird nun bewiesen, daß die Modifikation

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} H, & B, & N, & \gamma_{\mathfrak{p}} \\ H_{\mathfrak{p}}, & B_{\mathfrak{p}}^*, & N_{\mathfrak{p}}^*, & \gamma_{\mathfrak{p}}^{-1}\end{pmatrix} \tag{15.25}$$

beiderseits offen und meromorph ist. Wegen

$$(15.26)\quad \begin{aligned} &H_0 = G\,, \quad B_0^* = v(B) = A\,, \quad N_0^* = H_0 - B_0^* = G - A = M\,,\\ &\gamma_0(P) = v(P) \quad \text{für} \quad P \in B, \quad \gamma_0^{-1}(P) = \tau(P) \quad \text{für} \quad P \in A \end{aligned}$$

ist die Modifikation $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} H, B, N, \tau \\ G, A, M, v \end{pmatrix} = \mathfrak{M}^{-1}$ beiderseits offen und meromorph.

Ist die Behauptung schon für ν bewiesen und ist $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \in \Delta^{\nu+1}$, so sind die Modifikationen

$$(15.27)\quad \mathfrak{M}_\mathfrak{q} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} H, & B, & N, & \gamma_\mathfrak{q} \\ H_\mathfrak{q}, & B_\mathfrak{q}^*, & N_\mathfrak{q}^*, & \gamma_\mathfrak{q}^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{S}_\mathfrak{p} = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} H_\mathfrak{q}, & 'A_\mathfrak{p}, & P, & \sigma_P \\ H_\mathfrak{p}, & B_\mathfrak{p}, & N_\mathfrak{p}, & v_P \end{pmatrix}$$

beiderseits offen und meromorph. Es ist $\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$ analytisch. Folglich ist wegen

$$(15.28)\quad P \in M_\mathfrak{q} \subseteq N_\mathfrak{q}^*\,, \quad 'A_\mathfrak{p} = H_\mathfrak{q} - \{P\} \supseteq H_\mathfrak{q} - M_\mathfrak{q} = A_\mathfrak{q} \supseteq B_\mathfrak{q}^*\,,$$

$$(15.29)\quad \gamma_\mathfrak{p}(Q) = \sigma_P\, \gamma_\mathfrak{q}(Q) \qquad \text{für } Q \in B \subseteq \hat{A}_\mathfrak{q}\,,$$

$$(15.30)\quad B_\mathfrak{p}^* = \gamma_\mathfrak{p}(B) = \sigma_P\, \gamma_\mathfrak{q}(B) = \sigma_P(B_\mathfrak{q}^*)\,,$$

$$(15.31)\quad N_\mathfrak{p}^* = H_\mathfrak{p} - B_\mathfrak{p}^*\,,$$

$$(15.32)\quad \gamma_\mathfrak{p}^{-1}(Q) = \gamma_\mathfrak{q}^{-1}\, v_P(Q) \qquad \text{für } Q \in B_\mathfrak{p}^*$$

nach Satz 5.9 und seiner Anmerkung 1 die zusammengesetzte Modifikation

$$(15.33)\quad \mathfrak{M}_\mathfrak{p} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} H, & B, & N, & \gamma_\mathfrak{p} \\ H_\mathfrak{p}, & B_\mathfrak{p}^*, & N_\mathfrak{p}^*, & \gamma_\mathfrak{p}^{-1} \end{pmatrix}$$

beiderseits offen und meromorph, w. z. b. w.

d) *Es gibt eine größte offene Menge* $^*A_\mathfrak{p}$ *mit* $B_\mathfrak{p}^* \subseteq {}^*A_\mathfrak{p} \subseteq H_\mathfrak{p}$, *in die sich* $\gamma_\mathfrak{p}^{-1}$ *analytisch zur Abbildung* $\delta_\mathfrak{p}$ *fortsetzen läßt, die* $^*A_\mathfrak{p}$ *in* H *abbildet. In* $^*A_\mathfrak{p}$ *ist* $\gamma_\mathfrak{p}^{-1}$ *regulär, in* $H_\mathfrak{p} - {}^*A_\mathfrak{p}$ *singulär. Durch Induktion nach der Stufe* ν *wird nun*

$$(15.34)\quad {}^*A_\mathfrak{p} = jA_\mathfrak{p}\,, \quad H_\mathfrak{p} - {}^*A_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p} \cap T_\mathfrak{p}$$

bewiesen.

Für $\nu = 0$ ist die Behauptung in b) bewiesen worden. Ist sie für die Stufe ν richtig, so werde $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \in \Delta^{\nu+1}$ beliebig gewählt.

Ist $\gamma_\mathfrak{p}^{-1}$ im Punkt $P_0 \in B_\mathfrak{p}$ regulär, so ist $v_P(P_0) = Q_0 \in {}'A_\mathfrak{p}$. Die Abbildung $\gamma_\mathfrak{p}^{-1}\sigma_P$ ist in einer Umgebung U von Q_0 regulär. Auf $U - B_\mathfrak{p}^*$ ist $\gamma_\mathfrak{p}^{-1}\sigma_P = \gamma_\mathfrak{q}^{-1}$, also ist $\delta_\mathfrak{p}\sigma_P = \delta_\mathfrak{q}$ auf U und $\gamma_\mathfrak{q}^{-1}$ verhält sich in Q_0 regulär. Es ist $Q_0 \in jA_\mathfrak{q}$ und $P_0 = \sigma_P(Q_0) \in \sigma_P(jA_\mathfrak{q}) = {}'jB_\mathfrak{p}$.

Umgekehrt wird $jB_\mathfrak{p}$ durch $\delta_\mathfrak{q} v_P(Q)$ analytisch in H abgebildet. Auf $jB_\mathfrak{p} - N_\mathfrak{p}^*$ ist

$$(15.35)\quad \gamma_\mathfrak{p}^{-1}(Q) = \gamma_\mathfrak{q}^{-1} v_P(Q) = \delta_\mathfrak{q} v_P(Q)\,.$$

Daher verhält sich $\gamma_\mathfrak{p}^{-1}$ auf $jB_\mathfrak{p}$ regulär.

Insgesamt folgt

$$(15.36)\quad {}^*A_\mathfrak{p} \cap B_\mathfrak{p} = jB_\mathfrak{p}\,.$$

Ist $\gamma_\mathfrak{p}^{-1}$ in einem Punkt P_0 singulär, so gibt es nach Satz 9.3 eine rein 2-dimensionale analytische Menge C aus H, die in N liegt, und eine Punktmenge $D \subset C$ ohne Häufungspunkte, so daß $\gamma_\mathfrak{p}$ auf $B \cup (C - D)$ regulär ist

und $\gamma_{\mathfrak{p}}(Q, H) = P_0$ für $Q \in C - D$ ist. Setzt man

$$(15.37)\quad \mathfrak{p} = (P_{\nu+1}, P_\nu, \ldots, P_1, 0) \quad \mathfrak{p}_\varrho = (P_\varrho, \ldots, P_1, 0) \quad (1 \leqq \varrho \leqq \nu + 1),$$

$$(15.38)\quad \vartheta_{P_\varrho}(Q) = v_{P_\varrho}(Q, H_{\mathfrak{p}_\varrho}) \qquad \text{für } Q \in H_{P_\varrho},$$

so wird $B \cup (C - D)$ durch $\vartheta_{P_1} \ldots \vartheta_{P_{\nu+1}} \gamma_{\mathfrak{p}}(Q, H)$ analytisch in G abgebildet, wobei für $Q \in B$ gilt:

$$(15.39)\quad \begin{aligned} \vartheta_{P_1} \ldots \vartheta_{P_{\nu+1}} \gamma_{\mathfrak{p}}(Q, H) &= \vartheta_{P_1} \ldots \vartheta_{P_{\nu+1}} \gamma_{\mathfrak{p}_{\nu+1}}(Q) \\ &= \vartheta_{P_1} \ldots \vartheta_{P_{\nu+1}} \sigma_{P_{\nu+1}} \gamma_{\mathfrak{p}_\nu}(Q) \\ &= \vartheta_{P_1} \ldots \vartheta_{P_\nu} \gamma_{\mathfrak{p}_\nu}(Q) = \cdots \\ &= \vartheta_{P_1} \gamma_{\mathfrak{p}_1}(Q) \\ &= v(Q). \end{aligned}$$

Auf $C - D$ ist v regulär, also ist $C - D$ in $^*\underline{A}_0$ enthalten. Weil $\gamma_{\mathfrak{p}}(Q, H) = \gamma_{\mathfrak{p}}(Q)$ auf $C - D$ konstant ist, hat $\gamma_{\mathfrak{p}}$ dort eine positive Vielfachheit; also ist $C - D \subseteq \hat{N}_{\mathfrak{p}}$, und man erhält

$$(15.40)\quad P_0 \in \gamma_{\mathfrak{p}}(C - D) \subseteq \gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{N}_{\mathfrak{p}}).$$

Ist umgekehrt $P_0 \in \gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{N}_{\mathfrak{p}})$, so ist nach Satz 7.1 die Teilmenge $\gamma_{\mathfrak{p}}^{-1}(P_0)$ von $^*A_{\mathfrak{p}}$ analytisch und rein 2-dimensional. Da $\gamma_{\mathfrak{p}}$ auf $\gamma_{\mathfrak{p}}^{-1}(P_0)$ analytisch ist, verhält sich die Abbildung $\gamma_{\mathfrak{p}}^{-1}$ in P_0 nicht bestimmt, ist also in P_0 singulär.

Insgesamt ergibt sich $H_{\mathfrak{p}} - {}^*A_{\mathfrak{p}} = \gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{N}_{\mathfrak{p}})$. Also ist $\gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{N}_{\mathfrak{p}})$ abgeschlossen. Für die regulären Punkte auf $N_{\mathfrak{p}}$ folgt

$$(15.41)\quad {}^*A_{\mathfrak{p}} \cap N_{\mathfrak{p}} = N_{\mathfrak{p}} - \gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{N}_{\mathfrak{p}}) = N_{\mathfrak{p}} - \overline{\gamma_{\mathfrak{p}}(\hat{N}_{\mathfrak{p}})} \cap N_{\mathfrak{p}} = N_{\mathfrak{p}} - M_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}} \cap N_{\mathfrak{p}}.$$

Angenommen, es ist $P_0 \in N_{\mathfrak{p}} \cap A_{\mathfrak{p}} \cap T_{\mathfrak{p}}$, so gibt es eine Folge $P^\nu = \sigma_P(Q^\nu)$ mit $Q^\nu \in (T_{\mathfrak{q}} \cup M_{\mathfrak{q}}) \cap A_{\mathfrak{p}}$, die gegen P_0 strebt. Weil $\gamma_{\mathfrak{p}}^{-1}$ in P_0 regulär ist, so auch in P^ν für $\nu \geqq \nu_0$. Also ist $P^\nu \in B_{\mathfrak{p}} \cap {}^*A_{\mathfrak{p}} = jB_{\mathfrak{p}}$, woraus

$$(15.42)\quad Q^\nu \in v_P(jB_{\mathfrak{p}}) = jA_{\mathfrak{q}} = H_{\mathfrak{q}} - T_{\mathfrak{q}} - M_{\mathfrak{q}}$$

folgt, was falsch ist. Daher ist $N_{\mathfrak{p}} \cap T_{\mathfrak{p}} \cap A_{\mathfrak{p}}$ leer und

$$(15.43)\quad {}^*A_{\mathfrak{p}} \cap N_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}} \cap N_{\mathfrak{p}} = (jA_{\mathfrak{p}} \cap N_{\mathfrak{p}}) \cup (A_{\mathfrak{p}} \cap T_{\mathfrak{p}} \cap N_{\mathfrak{p}}) = jA_{\mathfrak{p}} \cap N_{\mathfrak{p}}.$$

Die Menge der regulären Punkte von $\gamma_{\mathfrak{p}}^{-1}$ ist also

$$(15.44)\quad \begin{aligned} {}^*A_{\mathfrak{p}} = {}^*A_{\mathfrak{p}} \cap H_{\mathfrak{p}} &= ({}^*A_{\mathfrak{p}} \cap B_{\mathfrak{p}}) \cup ({}^*A_{\mathfrak{p}} \cap N_{\mathfrak{p}}) \\ &= jB_{\mathfrak{p}} \cup (jA_{\mathfrak{p}} \cap N_{\mathfrak{p}}) \\ &= (jA_{\mathfrak{p}} - N_{\mathfrak{p}}) \cup (jA_{\mathfrak{p}} \cap N_{\mathfrak{p}}) \\ &= jA_{\mathfrak{p}}, \end{aligned} \qquad \text{w. z. b. w.}$$

c) *Nun werden die Behauptungen A bewiesen.*

A 1 ist richtig.

A 2: Für $\mathfrak{p} \in \Delta^\nu$ wird $jA_{\mathfrak{p}}$ analytisch in H durch $\delta_{\mathfrak{p}}$ abgebildet, wobei $\delta_{\mathfrak{p}}$ in $H_{\mathfrak{p}} - jA_{\mathfrak{p}}$ singulär ist. Es ist

$$(15.46)\quad \begin{aligned} M_0 &= \gamma_0(\hat{N}_0) = M - A_0 = M - jA_0, \\ M_{\mathfrak{p}} &= N_{\mathfrak{p}} \cap \gamma(\hat{N}_{\mathfrak{p}}) = N_{\mathfrak{p}} - A_{\mathfrak{p}} = N_{\mathfrak{p}} - jA_{\mathfrak{p}}. \end{aligned}$$

A 3: Für $Q \in A$ ist

$$\delta_0(Q) = \gamma_0^{-1}(Q) = v^{-1}(Q) = \tau(Q). \tag{15.47}$$

Für $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \in \Delta^\nu$ mit $\nu \geqq 1$ ist

$$\delta_\mathfrak{p}(Q) = \gamma_\mathfrak{p}^{-1}(Q) = \gamma_\mathfrak{q}^{-1}\, v_P(Q) = \delta_\mathfrak{q}\, v_P(Q) \tag{15.48}$$

zunächst für $Q \in B_\mathfrak{p}^*$, dann durch analytische Fortsetzung auch für $Q \in jB_\mathfrak{p}$, woraus

$$\delta_\mathfrak{q}(Q) = \delta_\mathfrak{p}\, \sigma_P(Q) \qquad \text{für } Q \in jA_\mathfrak{q} \tag{15.49}$$

folgt.

A 4: Ist $Q \in C_0$, so ist $Q \in C_\mathfrak{p}$ für $\mathfrak{p} \in \Delta^\nu$ mit $\nu \geqq 0$. Es sei $\mathfrak{p} = (P_\nu, P_{\nu-1}, \ldots, P_0)$ und $\mathfrak{p}_\varrho = (P_\varrho, \ldots, P_0)$. Dann ist

$$\delta_\mathfrak{p}\, \omega_\mathfrak{p}(Q) = \delta_{\mathfrak{p}_\nu} \omega_{\mathfrak{p}_\nu}(Q) = \delta_{\mathfrak{p}_{\nu-1}}\, v_{P_\nu}\, \sigma_{P_\nu}\, \omega_{\mathfrak{p}_{\nu-1}}(Q) = \delta_{\mathfrak{p}_{\nu-1}}\, \omega_{\mathfrak{p}_{\nu-1}}(Q) = \delta_0\, \omega_0(Q). \tag{15.50}$$

Also verhält sich $\delta_0\, \omega_0$ in $\bigcup\limits_{\nu=0}^{\infty} \bigcup\limits_{\mathfrak{p} \in \Delta^\nu} C_\mathfrak{p} = F$ regulär und wird durch eine Abbildung χ analytisch in F fortgesetzt.

Ist $Q \in {}^*\underline{A}_0$, so ist $Q \in \hat{A}_\mathfrak{p}$ für ein $\mathfrak{p} \in \Delta^\nu$ und $R = \varkappa(Q) \in C_\mathfrak{p}$, woraus nach Satz 14.1 und der Übersetzungstabelle folgt

$$\chi(R) = \delta_\mathfrak{p}\, \omega_\mathfrak{p}\, \varkappa(Q) = \delta_\mathfrak{p}\, \omega_\mathfrak{p}\, \tau_\mathfrak{p}\, \gamma_\mathfrak{p}(Q) = Q. \tag{15.51}$$

Also ist ${}^*\underline{A}_0$ in $\chi(F)$ enthalten.

Ist $Q \in H - {}^*\underline{A}_0$, so verhält sich die Abbildung v in Q singulär. Also gibt es eine rein 2-dimensionale analytische Menge C aus H und darauf eine Punktmenge D ohne Häufungspunkte, so daß τ in $A \cup (C - D)$ regulär ist und $\tau(P, G) = \delta_0(P) = Q$ für $P \in C - D$ gilt. Es ist $C - D \subseteq jA_0$ und $\tau_0(P) = R \in C_0$. Es gilt $\chi(R) = \delta_0\, \omega_0(R) = \delta_0\, \omega_0\, \tau_0(P) = \delta_0(P) = Q$, womit sich $\chi(F) \supseteq H - {}^*\underline{A}_0$ ergibt. Insgesamt folgt

$$H \supseteq \chi(F) \supseteq (H - {}^*\underline{A}_0) \cup {}^*\underline{A}_0 = H, \qquad \text{also } \chi(F) = H, \tag{15.52}$$

w. z. b. w.

Da die Voraussetzungen symmetrisch sind, gelten auch die Behauptungen B, wobei ${}^*\underline{A}_0 = \underline{A}_0 = j\underline{A}_0$ ist.

f) *Nun werden die folgenden Induktionsbehauptungen aufgestellt.*

$1_\mathfrak{p}$: Für jedes $\mathfrak{p} \in \underline{\Delta}^\nu$ mit $\nu \geqq 0$ läßt sich die pseudokonforme Abbildung $\underline{\gamma}_\mathfrak{p}\, \omega_0(Q)$ von C_0 in $\underline{H}_\mathfrak{p}$ analytisch in die ganze Mannigfaltigkeit F zu einer Abbildung $\pi_\mathfrak{p}$ fortsetzen, deren Vielfachheit $\xi_\mathfrak{p}(Q)$ sei.

$2_\mathfrak{p}$: Die Menge $S_\mathfrak{p} = \{Q \mid \xi_\mathfrak{p}(Q) > 0\}$ ist leer oder eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus F. Die offene Menge $U_\mathfrak{p} = F - S_\mathfrak{p}$ wird durch $\pi_\mathfrak{p}$ pseudokonform in $\underline{H}_\mathfrak{p}$ abgebildet. Es ist

$$\varkappa(\underline{A}_0) = U_0 \subseteq U_\mathfrak{q} \subseteq U_\mathfrak{p} \qquad \text{für } \mathfrak{q} \leqq \mathfrak{p}, \tag{15.53}$$

$$\pi_\mathfrak{p}(U_\mathfrak{p}) \leqq j\underline{A}_\mathfrak{p}, \quad \pi_\mathfrak{p}(S_\mathfrak{p}) \supseteq \underline{T}_\mathfrak{p} \cup \underline{M}_\mathfrak{p}. \tag{15.54}$$

$3_{\mathfrak{p}}$: Ist $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \in \underline{\Delta}^{\nu}$ mit $\nu \geqq 1$, so gilt:

(15.55) $$\pi_0(Q) = \chi(Q) \quad \text{für } Q \in F,$$

(15.56) $$\pi_{\mathfrak{p}}(Q) = \sigma_P\, \pi_{\mathfrak{q}}(Q) \quad \text{für } Q \in U_{\mathfrak{q}},$$

(15.57) $$\xi_{\mathfrak{p}}(Q) \leqq \xi_{\mathfrak{q}}(Q) \quad \text{für } Q \in F,$$

(15.58) $$\xi_{\mathfrak{p}}(Q) < \xi_{\mathfrak{q}}(Q) \quad \text{für } Q \in F \text{ mit } P = \pi_{\mathfrak{q}}(Q).$$

g) *Die Induktionsbehauptungen werden für* $\mathfrak{p} = 0$ *bewiesen*:

1_0: Für $Q \in C_0$ ist $\chi(Q) = \delta_0\, \omega_0(Q) = \underline{\gamma}_0\, \omega_0(Q)$. Durch $\pi_0 = \chi$ wird $\underline{\gamma}_0\, \omega_0$ analytisch in F fortgesetzt. Die Vielfachheit der Abbildung π_0 sei $\xi_0(Q)$.

2_0: Es enthält $\omega_0^{-1}(M)$ keinen inneren Punkt. Auf $\omega_0^{-1}(A) = F - \omega_0^{-1}(M)$ ist $\chi = \delta_0\, \omega_0 = \tau\, \omega_0$ pseudokonform. Also ist S_0 ein Teil von $\omega_0^{-1}(M)$ und hat keinen inneren Punkt. Nach Satz 7.1 ist S_0 leer oder eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus F, und $U_0 = F - S_0$ wird durch π_0 pseudokonform in $\underline{H}_0$ abgebildet, wobei

(15.59) $$\pi_0(U_0) \cap \pi_0(S_0) = \theta$$

ist. Nach Satz 14.1 und der Übersetzungstabelle ist

(15.60) $$\pi_0(Q) = \chi(Q) = \delta_0\, \omega_0(Q) = \gamma_0^{-1}\, \tau_0^{-1}(Q) = \varkappa^{-1}(Q)$$

für $Q \in \tau_0(A)$, wobei $\varkappa$ die offene Menge ${}^*\underline{A}_0 = \underline{A}_0 \subseteq H$ pseudokonform in F abbildet. Daher ist

(15.61) $$\pi_0(Q) = \varkappa^{-1}(Q) \quad \text{für } Q \in \varkappa(\underline{A}_0),$$

woraus $U_0 \supseteq \varkappa(\underline{A}_0)$ folgt.

Angenommen, es gibt einen Punkt $P_0 \in U_0 - \varkappa(\underline{A}_0)$, so ist $Q_0 = \chi(P_0) \in$ $\in H - \underline{A}_0 = \underline{M}_0$. Also gibt es eine rein 2 dimensionale analytische Menge $C \subseteq G$ und eine Punktmenge $D \subseteq C$ ohne Häufungspunkte, so daß τ auf $C - D$ regulär ist und $\delta_0(R) = \tau(R, G) = Q_0$ für $R \in C - D$ gilt. Also ist $C - D$ in A_0 enthalten. Für $R^* \in \tau_0(C - D) \subseteq C_0$ ist

(15.62) $$\pi_0(R^*) = \delta_0\, \omega_0(R^*) = Q_0$$

konstant, weswegen $\xi_0(R^*)$ positiv für $R^* \in \tau_0(C - D)$ ist. Es liegt $\tau_0(C - D)$ in S_0, woraus

(15.63) $$\pi_0(P_0) = Q_0 \in \pi_0(U_0) \cap \pi_0(S_0) = \theta$$

folgt, was falsch ist. Also ergibt sich $U_0 = \varkappa(\underline{A}_0)$.

3_0 ist auch erfüllt.

h) *Ist die Behauptung für alle* $\mathfrak{p} \in \underline{\Delta}^{\mu}$ *mit* $0 \leqq \mu < \nu$ *bewiesen, so werde sie für* $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \in \underline{\Delta}^{\nu}$ *bewiesen.*

$1_{\mathfrak{p}}$: Durch $\pi_{\mathfrak{q}}$ wird F mit der Vielfachheit $\xi_{\mathfrak{q}}$ auf die Teilmenge $\pi_{\mathfrak{q}}(F)$ von $\underline{H}_{\mathfrak{q}}$ abgebildet. Durch $\pi_{\mathfrak{q}}$ wird dabei $U_{\mathfrak{q}}$ in ${}'\underline{A}_{\mathfrak{q}} \subseteq {}'\underline{A}_{\mathfrak{p}}$ abgebildet. Die Menge $S_{\mathfrak{q}} = F - U_{\mathfrak{q}}$, auf der $\xi_{\mathfrak{q}}(Q) > 0$ ist, hat keinen inneren Punkt. Im Punkt P wird der σ-Prozeß

(15.64) $$\underline{\mathfrak{S}}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} \underline{H}_{\mathfrak{q}}, {}'\underline{A}_{\mathfrak{p}}, P, \sigma_P \\ \underline{H}_{\mathfrak{p}}, \underline{B}_{\mathfrak{p}}, \underline{N}_{\mathfrak{p}}, v_P \end{pmatrix}$$

ausgeführt. Die Voraussetzungen von Satz 10.16 und seiner Anmerkung 1 sind erfüllt, wie die folgende Übersetzungstabelle zeigt:

Satz 10.16	H	$\varkappa$	φ_*	H_1	G	B	A	N	M	N_0	H_0
Hier	F	$\pi_\mathfrak{q}$	$\xi_\mathfrak{q}$	$\pi_\mathfrak{q}(F)$	$\underline{H}_\mathfrak{q}$	$U_\mathfrak{q}$	$'\underline{A}_\mathfrak{p}$	$S_\mathfrak{q}$	$\{P\}$	$S_\mathfrak{q}$	F

Satz 10.16	$\mathfrak{S}_M$	σ_M	$\tilde{H}$	$\tilde{B}$	$\tilde{N}$	v_M	γ	φ_γ
Hier	$\underline{\mathfrak{S}}_\mathfrak{p}$	σ_P	$\underline{H}_\mathfrak{p}$	$\underline{B}_\mathfrak{p}$	$\underline{N}_\mathfrak{p}$	v_P	$\pi_\mathfrak{p}$	$\xi_\mathfrak{p}$

Durch $\pi_\mathfrak{p}$ wird F analytisch in $\underline{H}_\mathfrak{p}$ abgebildet. Die Vielfachheit von $\pi_\mathfrak{p}$ in Q sei $\xi_\mathfrak{p}(Q)$. Für $Q \in C_0 \cap U_\mathfrak{q}$ ist

$$\pi_\mathfrak{p}(Q) = \sigma_P\, \pi_\mathfrak{q}(Q) = \sigma_P\, \gamma_\mathfrak{q}\, \omega_0(Q) = \gamma_\mathfrak{p}\, \omega_0(Q)\,. \tag{15.65}$$

Durch ω_0 wird C_0 analytisch in A_0 und durch $\gamma_\mathfrak{p}$ wird A_0 analytisch in $\underline{H}_\mathfrak{p}$ abgebildet. Daher ist $\gamma_\mathfrak{p}\, \omega_0$ auf C_0 analytisch und es gilt:

$$\pi_\mathfrak{p}(Q) = \gamma_\mathfrak{p}\, \omega_0(Q) \quad \text{für } Q \in C_0\,. \tag{15.66}$$

$2_\mathfrak{p}$: Es ist

$$\xi_\mathfrak{q}(Q) \geqq \xi_\mathfrak{p}(Q) \qquad \text{für } Q \in F\,, \tag{15.67}$$

$$\xi_\mathfrak{q}(Q) > \xi_\mathfrak{p}(Q) \qquad \text{für } Q \in \pi_\mathfrak{q}^{-1}(P). \tag{15.68}$$

Also ist $S_\mathfrak{p} = \{Q \mid \xi_\mathfrak{p}(Q) > 0\} \subseteq S_\mathfrak{q}$ eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus F oder leer. Außerdem folgt

$$U_\mathfrak{p} = F - S_\mathfrak{p} \supseteq F - S_\mathfrak{q} = U_\mathfrak{q} \supseteq U_0 = \varkappa(\underline{A}_0)\,. \tag{15.69}$$

Für $Q \in \pi_\mathfrak{p}(C_0 \cap U_\mathfrak{p})$ ist

$$\omega_0\, \pi_\mathfrak{p}^{-1}(Q) = \omega_0\, \omega_0^{-1}\, \gamma_\mathfrak{p}^{-1}(Q) = \underline{\delta}_\mathfrak{p}(Q)\,. \tag{15.70}$$

Die Abbildung $\omega_0\, \pi_\mathfrak{p}^{-1}$ ist auf $\pi_\mathfrak{p}(U_\mathfrak{p})$ erklärt und analytisch, also verhält sich dort $\delta_\mathfrak{p}$ regulär und es ist

$$\pi_\mathfrak{p}(U_\mathfrak{p}) \subseteq j\underline{A}_\mathfrak{p}\,. \tag{15.71}$$

Nach d) ist einerseits $\underline{M}_\mathfrak{p} \cup \underline{T}_\mathfrak{p}$, andererseits $\gamma_\mathfrak{p}(\hat{\underline{N}}_\mathfrak{p})$ die Menge der singulären Punkte von $\dot{\delta}_\mathfrak{p}$. Weil außerdem $\hat{\underline{N}}_\mathfrak{p} \subseteq A_0$ ist, folgt

$$\underline{M}_\mathfrak{p} \cup \underline{T}_\mathfrak{p} = \gamma_\mathfrak{p}(\hat{\underline{N}}_\mathfrak{p}) \subseteq \gamma_\mathfrak{p}\, \omega_0\, \tau_0(\hat{\underline{N}}_\mathfrak{p}) = \pi_\mathfrak{p}\, \tau_0(\hat{\underline{N}}_\mathfrak{p})\,. \tag{15.72}$$

Auf $\hat{\underline{N}}_\mathfrak{p}$ hat $\gamma_\mathfrak{p}$ eine positive Vielfachheit, also hat auch $\gamma_\mathfrak{p}\, \omega_0 = \pi_\mathfrak{p}$ auf $\tau_0(\hat{\underline{N}}_\mathfrak{p})$ eine positive Vielfachheit, woraus $\tau_0(\hat{\underline{N}}_\mathfrak{p}) \subseteq S_\mathfrak{p}$ und $\underline{M}_\mathfrak{p} \cup \underline{T}_\mathfrak{p} \subseteq \pi_\mathfrak{p}(S_\mathfrak{p})$ folgen.

$3_\mathfrak{p}$: Nach Definition von $\pi_\mathfrak{p}$ ist $\pi_\mathfrak{p}(Q) = \sigma_P\, \pi_\mathfrak{q}(Q)$ für $Q \in U_\mathfrak{q}$. Die übrigen Aussagen von $3_\mathfrak{p}$ sind schon bewiesen.

Damit ist die Induktion durchgeführt.

i) *Für* $\mathfrak{p} \in \underline{\Delta}^\nu$ *mit* $\nu \geqq 0$ *wird* $V_\mathfrak{p} = \pi_\mathfrak{p}^{-1}(j\underline{A}_\mathfrak{p})$ *gesetzt und*

$$F = \bigcup_{\nu=0}^{\infty} \bigcup_{\mathfrak{p} \in \underline{\Delta}^\nu} V_\mathfrak{p} \tag{15.73}$$

behauptet. Ist nämlich $R \in F - \bigcup\limits_{\nu=0}^{\infty} \bigcup\limits_{\mathfrak{p} \in \underline{\Delta}^\nu} V_\mathfrak{p}$, so ist $R \notin U_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in \underline{\Delta}^\nu$ und

$\nu = 0, 1, \ldots$, weil $V_{\mathfrak{p}}$ die Menge $U_{\mathfrak{p}}$ umfaßt. Es ist

$$(15.74) \qquad P_1 = \pi_0(R) \in H - j\underline{A}_0 = H - \underline{A}_0 = \underline{M}_0\,,$$

womit sich $\mathfrak{p}_1 = (P_1, 0) \in \underline{\Delta}^1$ ergibt. Wenn schon $\mathfrak{p}_\nu = (P_\nu, \mathfrak{p}_{\nu-1}) \in \underline{\Delta}^\nu$ mit $P_\nu = \pi_{\mathfrak{p}_{\nu-1}}(R) \in \underline{M}_{\mathfrak{p}_{\nu-1}}$ konstruiert ist, so werden $P_{\nu+1} = \pi_{\mathfrak{p}_\nu}(R)$ und $\mathfrak{p}_{\nu+1} = (P_{\nu+1}, \mathfrak{p}_\nu)$ gesetzt. Nach $3_{\mathfrak{p}}$ erhält man wegen $P_\nu = \pi_{\mathfrak{p}_{\nu-1}}(R)$ die Abschätzung

$$(15.75) \qquad \xi_{\mathfrak{p}_\nu}(R) < \xi_{\mathfrak{p}_{\nu-1}}(R)\,.$$

Andererseits ist

$$(15.76) \qquad \vartheta_{P_\nu}(P_{\nu+1}) = \vartheta_{P_\nu}\, \pi_{\mathfrak{p}_\nu}(R) = \pi_{\mathfrak{p}_{\nu-1}}(R)\,.$$

Daher hat ϑ_{P_ν} in $P_{\nu+1}$ eine positive Vielfachheit, weswegen $P_{\nu+1} \in N_{\mathfrak{p}_\nu}$ ist. Man erhält

$$(15.77) \qquad P_{\nu+1} = \pi_{\mathfrak{p}_\nu}(R) \in \pi_{\mathfrak{p}_\nu}(F) - \pi_{\mathfrak{p}_\nu}(V_{\mathfrak{p}_\nu}) \subseteq \underline{H}_{\mathfrak{p}_\nu} - j\underline{A}_{\mathfrak{p}_\nu}$$

zusammen

$$(15.78) \qquad P_{\nu+1} \in \underline{N}_{\mathfrak{p}_\nu} \cap (\underline{H}_{\mathfrak{p}_\nu} - j\underline{A}_{\mathfrak{p}_\nu}) = \underline{N}_{\mathfrak{p}_\nu} - j\underline{A}_{\mathfrak{p}_\nu} = \underline{N}_{\mathfrak{p}_\nu} - \underline{A}_{\mathfrak{p}_\nu} = \underline{M}_{\mathfrak{p}_\nu}$$

gemäß B 2. Es folgt

$$(15.79) \qquad \mathfrak{p}_{\nu+1} = (P_{\nu+1}, \mathfrak{p}_\nu) \in \underline{\Delta}^{\nu+1}\,.$$

Man hat eine unendliche Folge $\mathfrak{p}_1 < \cdots < \mathfrak{p}_\nu < \cdots$ mit

$$\xi_{\mathfrak{p}_1}(R) > \xi_{\mathfrak{p}_2}(R) > \cdots > \xi_{\mathfrak{p}_\nu}(R) > \cdots \geqq 0$$

konstruiert, was unmöglich ist. Daher ist $F = \bigcup\limits_{\nu=0}^{\infty} \bigcup\limits_{\mathfrak{p}\in\underline{\Delta}^\nu} V_{\mathfrak{p}}$, w. z. b. w.

j) Durch $\pi_{\mathfrak{p}}$ wird $V_{\mathfrak{p}}$ analytisch in $j\underline{A}_{\mathfrak{p}}$ und durch $\underline{\tau}_{\mathfrak{p}}$ wird $j\underline{A}_{\mathfrak{p}}$ pseudokonform auf $\underline{C}_{\mathfrak{p}} \subseteq \underline{F}$ abgebildet. Also wird $V_{\mathfrak{p}}$ durch $\underline{\tau}_{\mathfrak{p}}\, \pi_{\mathfrak{p}}$ analytisch in $\underline{C}_{\mathfrak{p}} \subseteq \underline{F}$ abgebildet.

Für $Q \in U_0$ und $\mathfrak{p} = (P_\nu, \ldots, P_1, 0)$ ist

$$(15.80) \qquad \vartheta_{P_1} \cdots \vartheta_{P_\nu}\, \pi_{\mathfrak{p}}(Q) = \pi_0(Q) \in j\underline{A}_0\,.$$

woraus

$$(15.81) \qquad \begin{aligned} \underline{\tau}_0\, \pi_0(Q) &= \underline{\tau}_{\mathfrak{p}}\, \sigma_{P_\nu} \cdots \sigma_{P_1}\, \pi_0(Q) \\ &= \underline{\tau}_{\mathfrak{p}}\, \sigma_{P_\nu} \cdots \sigma_{P_1}\, \vartheta_{P_1} \cdots \vartheta_{P_\nu}\, \pi_{\mathfrak{p}}(Q) \\ &= \underline{\tau}_{\mathfrak{p}}\, \pi_{\mathfrak{p}}(Q) \end{aligned}$$

folgt. Eine eindeutige analytische Abbildung π wird also von $F = \bigcup\limits_{\nu=0}^{\infty} \bigcup\limits_{\mathfrak{p}\in\underline{\Delta}^\nu} V_{\mathfrak{p}}$ in $\underline{F}$ durch

$$(15.82) \qquad \pi(Q) = \underline{\tau}_{\mathfrak{p}}\, \pi_{\mathfrak{p}}(Q) \qquad \text{für } Q \in V_{\mathfrak{p}} \text{ mit } \mathfrak{p} \in \underline{\Delta}^\nu$$

definiert. Für $Q \in \tau_0(A)$ ist $\pi_0(Q) \in B \subseteq j\underline{A}_0$ also

$$(15.83) \qquad \pi(Q) = \underline{\tau}_0\, \pi_0(Q) = \underline{\tau}_0\, \delta_0\, \omega_0(Q) = \underline{\tau}_0\, \tau\, \omega_0(Q)\,.$$

Damit ist die Abbildung π gefunden, die in den Behauptungen C auftritt.

Entsprechend läßt sich $\tau_0\, v\, \underline{\omega}_0$ analytisch zu einer Abbildung $\underline{\pi}$ von $\underline{F}$ in F fortsetzen. Auf $\tau_0(A)$ ist

$$\pi\,\tau_0(A) = \underline{\tau}_0\,\tau\,\omega_0\,\tau_0(A) = \underline{\tau}_0\,\tau(A) = \underline{\tau}_0(B) \tag{15.84}$$

also

$$\underline{\pi}\,\pi(Q) = \tau_0\, v\, \underline{\omega}_0\, \underline{\tau}_0\, \tau\, \omega_0(Q) = Q \tag{15.85}$$

für $Q \in \tau_0(A)$. Da $F - \tau_0(A) = \omega_0^{-1}(M)$ keinen inneren Punkt enthält, ist sogar

$$\underline{\pi}\,\pi(Q) = Q \qquad \text{für } Q \in F \tag{15.86}$$

und entsprechend

$$\pi\,\underline{\pi}(Q) = Q \qquad \text{für } Q \in \underline{F} \tag{15.87}$$

Also wird F durch π pseudokonform auf $\underline{F}$ abgebildet.

k) *Nun werden die Behauptungen C bewiesen.*

C 1: Ist E die Menge der Punkte aus G, in denen die Modifikation $\mathfrak{M}$ nichts ändert, und $\underline{E}$ die Menge der Punkte aus H, in denen die Modifikation $\mathfrak{M}^{-1}$ nichts ändert, so ist nach Satz 5.7

$$\underline{E} = \tau(E, G) = \delta_0(E)\,, \quad E = v(\underline{E}, H) = \underline{\delta}_0(\underline{E})\,. \tag{15.88}$$

Auf E bzw. $\underline{E}$ sind δ_0 bzw. $\underline{\delta}_0$ pseudokonform. Man setzt

$$\tilde{E} = \tau_0(E) \quad \text{und} \quad \tilde{\underline{E}} = \underline{\tau}_0(\underline{E})\,. \tag{15.89}$$

Für $Q \in \tau_0(A)$ ist

$$\pi(Q) = \underline{\tau}_0\,\tau\,\omega_0(Q) = \underline{\tau}_0\,\delta_0\,\omega_0(Q)\,. \tag{15.90}$$

Wegen $\omega_0(\tilde{E}) = E \subseteq jA_0$, $\delta_0(E) = \underline{E} \subseteq \underline{A}_0$, $\underline{\tau}_0(\underline{E}) = \tilde{\underline{E}}$ erhält man für $Q \in \tilde{E}$ durch analytische Fortsetzung

$$\begin{aligned}\pi(Q) &= \underline{\tau}_0\,\delta_0\,\omega_0(Q)\\ &= \underline{\tau}_0\,\chi(Q)\\ &= \underline{\chi}^{-1}\,\omega_0(Q) = \underline{\chi}^{-1}\,\delta_0^{-1}\,\chi(Q)\end{aligned} \tag{15.91}$$

und

$$\pi(\tilde{E}) = \underline{\tau}_0\,\delta_0\,\omega_0(\tilde{E}) = \tilde{\underline{E}}\,. \tag{15.92}$$

Damit ist C 1 bewiesen.

C 2: Ist $\psi_0(P)$ die Vielfachheit der Abbildung δ_0, so ist

$$K_0 = \{P \mid \psi_0(P) > 0\,, \quad P \in A_0\} \subseteq M \tag{15.93}$$

eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus A_0 oder leer. Die abgeschlossene Menge M umfaßt $\overline{K}_0$ und hat eine Umgebung U, in der eine M enthaltende, höchstens 2-dimensionale analytische Menge M^* liegt. Da $M^* \supseteq K_0$ ist und K_0 in A_0 abgeschlossen ist, wird K_0 durch $\overline{K}_0$ analytisch in G fortgesetzt. Es ist $\overline{K}_0$ eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus G oder leer. Also ist $\omega_0^{-1}(\overline{K}_0)$ eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus F oder leer. Nach Satz 13.1 ist $\omega_0^{-1}(M_0) = F - \omega_0^{-1}(A_0) = F - C_0 = \tilde{N}_0$ ebenfalls leer oder eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus F. Es ist

$$G - E = (A_0 - E) \cup (M_0 - E) = K_0 \cup M_0 = \overline{K}_0 \cup M_0\,. \tag{15.94}$$

Nun erweist sich

$$(15.95)\quad \begin{aligned}\tilde{N} &= F - \tilde{E} = \omega_0^{-1}(G) - \omega_0^{-1}(E) = \omega_0^{-1}(G - E)\\ &= \omega_0^{-1}(K_0 \cup M_0) = \omega_0^{-1}(\bar{K}_0 \cup M_0) = \omega_0^{-1}(\bar{K}_0) \cup \omega_0^{-1}(M_0)\end{aligned}$$

entweder als eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus F oder als leer.

Ist entsprechend $\underline{\psi}_0(P)$ die Vielfachheit der Abbildung $\underline{\delta}_0$ und wird

$$(15.96)\qquad \underline{K}_0 = \{P \mid \underline{\psi}_0(P) > 0, \quad P \in \underline{A}_0\}$$

gesetzt, so ist

$$(15.97)\qquad \underline{\tilde{N}} = \underline{F} - \underline{\tilde{E}} = \underline{\omega}_0^{-1}(\underline{K}_0 \cup \underline{M}_0)$$

entweder eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus $\underline{F}$ oder leer. Außerdem ergibt sich

$$(15.98)\qquad \pi(\tilde{N}) = \pi(F - \tilde{E}) = \pi(F) - \pi(\tilde{E}) = \underline{F} - \underline{\tilde{E}} = \underline{\tilde{N}}$$

Die Aussagen C_2 und C_3 sind bewiesen. Damit haben sich alle Behauptungen des Satzes als richtig herausgestellt, w. z. b. w.

B e w e i s d e s Z u s a t z e s. Die Mannigfaltigkeit $H_0 = G$ habe eine abzählbare Basis der offenen Mengen. Ist nun schon bewiesen, daß $H_{\mathfrak{p}}$ für alle $\mathfrak{p} \in \Delta^\mu$ mit $0 \leq \mu \leq \nu - 1$ eine abzählbare Basis der offenen Mengen hat, und ist $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \in \Delta^\nu$, so geht $H_{\mathfrak{p}}$ aus $H_{\mathfrak{q}}$ durch einen σ-Prozeß in P hervor. Also hat auch $H_{\mathfrak{p}}$ eine abzählbare Basis der offenen Mengen. Nach c) im Beweis zu Satz 15.1 ist

$$(15.99)\qquad \mathfrak{M}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} H, & B, & N, \gamma_{\mathfrak{p}} \\ H_{\mathfrak{p}}, & B_{\mathfrak{p}}^*, & N_{\mathfrak{p}}^*, \delta_{\mathfrak{p}} \end{pmatrix}$$

eine beiderseits offene und meromorphe Modifikation, bei der sowohl H als auch $H_{\mathfrak{p}}$ eine abzählbare Basis der offenen Mengen haben und die Menge der singulären Punkte von $\delta_{\mathfrak{p}}$ die Menge $H_{\mathfrak{p}} - jA_{\mathfrak{p}} = T_{\mathfrak{p}} \cup M_{\mathfrak{p}}$ ist. Nach Satz 9.4 hat $T_{\mathfrak{p}} \cup M_{\mathfrak{p}}$ keinen Häufungspunkt. Entsprechend hat auch $\underline{M}_{\mathfrak{p}} \cup \underline{T}_{\mathfrak{p}}$ keinen Häufungspunkt. Es folgt

$$(15.100)\quad T_{\mathfrak{p}} = \overline{\sigma_P((T_{\mathfrak{q}} \cup M_{\mathfrak{q}}) \cap {}'A_{\mathfrak{p}})} = \sigma_P((T_{\mathfrak{q}} \cup M_{\mathfrak{q}}) \cap {}'A_{\mathfrak{p}}) \quad \text{für } \mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \in \Delta^\nu,$$

$$(15.101)\quad \underline{T}_{\mathfrak{p}} = \overline{\sigma_P((\underline{T}_{\mathfrak{q}} \cup \underline{M}_{\mathfrak{q}}) \cap {}'\underline{A}_{\mathfrak{p}})} = \sigma_P((\underline{T}_{\mathfrak{q}} \cup \underline{M}_{\mathfrak{q}}) \cap {}'\underline{A}_{\mathfrak{p}}) \quad \text{für } \mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \in \underline{\Delta}^\nu,$$

w. z. b. w.

Den obigen Satz kann man auch so formulieren:

„Durch beiderseitiges Einsetzen eines σ-Baumes $\mathfrak{B}$ bzw. $\underline{\mathfrak{B}}$ bei der beiderseits offenen und meromorphen Modifikation $\mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ erhält man (bis auf analytische Äquivalenz) dieselbe Mannigfaltigkeit F."

Achtet man bei dieser Formulierung aber nicht auf die Art, wie die σ-Bäume $\mathfrak{B}$ und $\underline{\mathfrak{B}}$ aufgebaut sind, so wird der Satz trivial. Man hat ja nur bei einer beliebigen Modifikation $\mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ die σ-Bäume so zu wählen, daß immer $M_{\mathfrak{p}} = N_{\mathfrak{p}}$ bzw. $\underline{M}_{\mathfrak{p}} = \underline{N}_{\mathfrak{p}}$ mit $M = M_0$ und $N = \underline{M}_0$ ist. Dann ist die Grenzmannigfaltigkeit F äquivalent zu B bzw. $\underline{F}$ zu A. Man hat also durch beiderseitiges Einsetzen von σ-Bäumen lediglich die Mengen M und N entfernt und so (bis auf analytische Äquivalenz) die gleiche Mannigfaltigkeit

erhalten. Es kommt also darauf an, daß bei der Erzeugung durch σ-Prozesse nicht M und N oder irgendwelche Teile davon „unnötig" beseitigt werden. Man hat darauf zu achten, wie die σ-Bäume aufgebaut sind. Daher ist die Formulierung von Satz 15.1 so lang geworden.

Daß die σ-Bäume $\mathfrak{B}$ und $\underline{\mathfrak{B}}$ sich in Satz 15.1 tatsächlich konstruktiv aus der gegebenen Modifikation aufbauen, daß keine Punkte unnötig entfernt werden und daß die Mengen $M_\mathfrak{p}$, also die Anzahl der ausgeführten σ-Prozesse möglichst klein gehalten werden, kommt in den folgenden Aussagen zum Ausdruck:

1. Die Abbildung $\delta_\mathfrak{p}$ ist in $T_\mathfrak{p} \cup M_\mathfrak{p}$ singulär, wobei

(15.102) $$N_\mathfrak{p} \cap (T_\mathfrak{p} \cup M_\mathfrak{p}) = N_\mathfrak{p} \cap M_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p}$$

ist.

2. Die Abbildung χ bildet F auf (und nicht nur in) H ab.
3. Die Abbildung $\underline{\delta}_\mathfrak{p}$ ist in $\underline{T}_\mathfrak{p} \cup \underline{M}_\mathfrak{p}$ singulär, wobei

(15.103) $$\underline{N}_\mathfrak{p} \cap (\underline{T}_\mathfrak{p} \cup \underline{M}_\mathfrak{p}) = \underline{N}_\mathfrak{p} \cap \underline{M}_\mathfrak{p} = \underline{M}_\mathfrak{p}$$

ist.

4. Die Abbildung χ bildet $\underline{F}$ auf (und nicht nur in) G ab.

Die Voraussetzung, daß die meromorphe Modifikation $\mathfrak{M}$ beiderseits offen ist, besagt nun gerade, daß bei den Modifikationen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^{-1}$ keine Punkte „verloren"gehen. Es zeigt sich, daß diese Voraussetzung nicht nur des Beweises wegen erforderlich ist, sondern auch vernünftig erscheint, um eine nichttriviale Aussage zu ermöglichen.

§ 16. Die Erzeugung meromorpher Modifikationen bei abzählbarer Basis der offenen Mengen

Haben bei der beiderseits offenen, meromorphen Modifikation $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ die Mannigfaltigkeiten G und H je eine abzählbare Basis der offenen Mengen, so haben nach dem Zusatz zu Satz 15.1 die Mengen $M_\mathfrak{p} \cup T_\mathfrak{p}$ und $\underline{M}_\mathfrak{p} \cup \underline{T}_\mathfrak{p}$ keinen Häufungspunkt. Dies legt die Vermutung nahe, daß sich dann die Modifikation $\mathfrak{M}$ auch erzeugen läßt, indem man beiderseits je eine Folge von σ-Prozessen in Mengen $M_\mathfrak{r}$ (bzw. $\underline{M}_\mathfrak{r}$) ohne Häufungspunkte ausführt, ähnlich wie dies in Satz 12.1 geschehen ist. Diese Vermutung wird sich bestätigen.

Satz 16.1. Ein σ-Baum mit Mengen $M_\mathfrak{p}$ ohne Häufungspunkte.

Voraussetzung. *Beim σ-Baum $\mathfrak{B} = [H_\mathfrak{p}, A_\mathfrak{p}, 'A_\mathfrak{p}, B_\mathfrak{p}, N_\mathfrak{p}]$ mit dem Indexbaum $\langle \Gamma^\nu, \Delta^\nu, M_\mathfrak{p} \rangle$ und dem j-Operator $jS = S - T_\mathfrak{p}$ mögen die Mengen $M_\mathfrak{p}$ in $H_\mathfrak{p}$ keinen Häufungspunkt haben.*

Behauptung. *Auch die Mengen $T_\mathfrak{p}$ haben in $H_\mathfrak{p}$ keinen Häufungspunkt. Es ist*

(16.1) $$T_\mathfrak{p} = \sigma_P((T_\mathfrak{q} \cup M_\mathfrak{q}) \cap 'A_\mathfrak{p}) \qquad \text{für } \mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \in \Delta^\nu ,$$

(16.2) $$M_\mathfrak{p} = jM_\mathfrak{p} .$$

Beweis. Weil T_0 leer ist, gilt die Behauptung für $\mathfrak{p} = 0$. Ist die Behauptung für alle $\mathfrak{p} \in \Delta^\mu$ mit $0 \leq \mu \leq \nu - 1$ bewiesen, so werde sie nun für $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \in \Delta^\nu$ bewiesen. Da $T_\mathfrak{q} \cup M_\mathfrak{q}$ keinen Häufungspunkt hat, so hat auch

$$T_\mathfrak{p} \cap B_\mathfrak{p} = \sigma_P((T_\mathfrak{q} \cup M_\mathfrak{q}) \cap {}'A_\mathfrak{p}) \tag{16.3}$$

keinen Häufungspunkt in $B_\mathfrak{p}$. Für eine offene Umgebung U von P ist $(T_\mathfrak{q} \cup M_\mathfrak{q}) \cap {}'A_\mathfrak{p} \cap U$ leer. Es ist $V = v_P^{-1}(U)$ eine offene Umgebung von $N_\mathfrak{p}$ und $T_\mathfrak{p} \cap B_\mathfrak{p} \cap V$ leer. Folglich ist

$$T_\mathfrak{p} = \overline{T_\mathfrak{p} \cap B_\mathfrak{p}} \subseteq H_\mathfrak{p} - V \subseteq H_\mathfrak{p} - N_\mathfrak{p} = B_\mathfrak{p} \tag{16.4}$$

also

$$T_\mathfrak{p} = \overline{\sigma_P((T_\mathfrak{q} \cup M_\mathfrak{q}) \cap {}'A_\mathfrak{p})} \cap B_\mathfrak{p} = \sigma_P((T_\mathfrak{q} \cup M_\mathfrak{q}) \cap {}'A_P) \tag{16.5}$$

und

$$M_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p} - B_\mathfrak{p} \subseteq M_\mathfrak{p} - T_\mathfrak{p} = jM_\mathfrak{p} \subseteq M_\mathfrak{p}\,, \tag{16.6}$$

womit sich $M_\mathfrak{p} = jM_\mathfrak{p}$ ergibt, w. z. b. w.

Satz 16.2. σ-Baum und Folge von σ-Prozessen in Mengen.

Voraussetzung. *Ein σ-Baum $\mathfrak{B} = [H_\mathfrak{p}, A_\mathfrak{p}, {}'A_\mathfrak{p}, B_\mathfrak{p}, N_\mathfrak{p}]$ mit dem Indexbaum $\langle \Gamma^\nu, \Delta^\nu, M_\mathfrak{p} \rangle$ und dem j-Operator $jS = S - T_\mathfrak{p}$ sei gegeben. Als Teilmenge von $H_\mathfrak{p}$ habe $M_\mathfrak{p}$ keinen Häufungspunkt.*

Behauptung. *Es gibt eine Folge 4-dimensionaler komplexer Mannigfaltigkeiten H^ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$), so daß gilt:*

1. *In H^ν liegt eine Menge M^ν ohne Häufungspunkte und $A^\nu = H^\nu - M^\nu$ ist offen.*

2. *Es ist*

$$H^0 = H_0\,, \quad M^0 = M_0\,, \quad A^0 = A_0\,. \tag{16.7}$$

Für $\nu > 0$ ist

$$\mathfrak{S}_{\nu-1} = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} H^{\nu-1}, & A^{\nu-1}, & M^{\nu-1}, & \sigma_{\nu-1} \\ H^\nu, & B^\nu, & N^\nu, & v_{\nu-1} \end{pmatrix} \tag{16.8}$$

ein σ-Prozeß in der Menge $M^{\nu-1}$.

3. *Für $\nu \geq 1$ ist $N^\nu \supseteq M^\nu$.*

4. *Zu jedem $\mathfrak{p} \in \Delta^\nu$ mit $\nu \geq 0$ gibt es eine pseudokonforme Abbildung $\alpha_\mathfrak{p}$, die die offene Menge $jH_\mathfrak{p}$ auf $\widetilde{H}_\mathfrak{p} \subseteq H^\nu$ so abbildet, daß für $\nu \geq 1$ gilt:*

$$\begin{aligned} H^\nu &= B^\nu \cup \bigcup_{\mathfrak{p}\in\Delta^\nu} \widetilde{H}_\mathfrak{p}\,, & \widetilde{H}_\mathfrak{p} \cap M^\nu &= \alpha_\mathfrak{p}(M_\mathfrak{p})\,, \\ A^\nu &= B^\nu \cup \bigcup_{\mathfrak{p}\in\Delta^\nu} \alpha_\mathfrak{p}(jA_\mathfrak{p})\,, & \widetilde{H}_\mathfrak{p} \cap B^\nu &= \alpha_\mathfrak{p}(jB_\mathfrak{p})\,, \\ M^\nu &= \bigcup_{\mathfrak{p}\in\Delta^\nu} \alpha_\mathfrak{p}(M_\mathfrak{p})\,, & \widetilde{H}_\mathfrak{p} \cap N^\nu &= \alpha_\mathfrak{p}(N_\mathfrak{p})\,. \end{aligned} \tag{16.9}$$

Für $\nu = 0$ ist $\alpha_0(Q) = Q$ die Identität. Für $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \in \Delta^\nu$ mit $\nu \geq 1$ ist

$$\sigma_{\nu-1}\, \alpha_\mathfrak{q}(Q) = \alpha_\mathfrak{p}\, \sigma_P(Q) \qquad \textit{für } Q \in jA_\mathfrak{q}; \tag{16.10}$$

wenn man

$$\vartheta_P(Q) = v_P(Q, H_\mathfrak{p}) \qquad \textit{für } Q \in H_\mathfrak{p}\,, \tag{16.11}$$

$$\vartheta_{\nu-1}(Q) = v_{\nu-1}(Q, H^\nu) \qquad \textit{für } Q \in H^\nu \tag{16.12}$$

setzt, so ist

$$\alpha_q\,\vartheta_P(Q) = \vartheta_{\nu-1}\,\alpha_p(Q) \qquad \textit{für } Q \in jH_p\,. \tag{16.13}$$

5. *Nach Satz* 13.1 *lassen sich die Grenzmannigfaltigkeit F und darin die Mengen F_p, C_p, $\tilde{N}_p$ und die Abbildungen τ_p, ω_p bestimmen. Eine pseudokonforme Abbildung τ_ν bildet A^ν auf $C^\nu = \bigcup\limits_{\mu=0}^{\nu} \bigcup\limits_{p\in\Delta^\mu} C_p$ ab. Für $\nu = 0$ ist τ_0 die durch den σ-Baum $\mathfrak{B}$ gegebene Abbildung τ_0. Für $\nu > 0$ ist*

$$\tau_{\nu-1}(Q) = \tau_\nu\,\sigma_{\nu-1}(Q) \qquad \textit{für } Q \in A^{\nu-1}\,, \tag{16.14}$$

$$\tau_\nu(Q) = \tau_{\nu-1}\,v_{\nu-1}(Q) \qquad \textit{für } Q \in B^\nu\,. \tag{16.15}$$

Für $p \in \Delta^\nu$ und $Q \in \alpha_p(jA_p)$ ist

$$\tau_\nu(Q) = \tau_p\,\alpha_p^{-1}(Q)\,. \tag{16.16}$$

6. *Eine analytische Abbildung ω_ν bildet F auf H^ν ab, wobei*

$$\omega_\nu(Q) = \tau_\nu^{-1}(Q) \qquad \textit{für } Q \in C^\nu\,, \tag{16.17}$$

$$\omega_{\nu-1}(Q) = \vartheta_{\nu-1}\,\omega_\nu(Q) \qquad \textit{für } Q \in F \textit{ mit } \nu \geqq 1\,, \tag{16.18}$$

$$\omega_\nu(Q) = \sigma_{\nu-1}\,\omega_{\nu-1}(Q) \qquad \textit{für } Q \in C^{\nu-1} \textit{ mit } \nu \geqq 1 \tag{16.19}$$

gelten. Für $p \in \Delta^\nu$ und $Q \in F_p$ ist

$$\alpha_p\,\omega_p(Q) = \omega_\nu(Q)\,. \tag{16.20}$$

7. *Die Menge $\tilde{N}^\nu = F - C^\nu$ ist entweder leer oder eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus F, auf der ω_ν eine positive Vielfachheit hat.*

Beweis. Die Behauptung werde durch Induktion nach ν bewiesen.

I. *Die Behauptung ist für $\nu = 0$ richtig*:

1_0 und 2_0: Es sei $H^0 = H_0$, $M^0 = M_0$ und $A^0 = A_0$. Nach Voraussetzung hat M_0 keinen Häufungspunkt.

3_0 ist die leere Aussage.

4_0: Die identische Abbildung $\alpha_0(Q) = Q$ bildet $jH_0 = H_0$ pseudokonform auf H^0 ab.

5_0: Da M_0 nur aus isolierten Punkten besteht oder leer ist, da also M_0 eine analytische Menge aus H_0 mit $\dim M_0 < 2$ ist, lassen sich nach Satz 13.1 die Grenzmannigfaltigkeit F und darin die Mengen F_p, C_p, $\tilde{N}_p$ und die Abbildungen τ_p, ω_p bestimmen. Die Abbildung τ_0 bildet A_0 pseudokonform auf $C^0 = C_0$ ab. Für $Q \in A^0$ ist $\tau_0\,\alpha_0^{-1}(Q) = \tau_0(Q)$.

6_0: Durch ω_0 wird $F = F_0$ analytisch in $H^0 = H_0$ abgebildet, wobei gilt:

$$\omega_0(Q) = \tau_0^{-1}(Q) \qquad \text{für } Q \in C^0\,, \tag{16.21}$$

$$\alpha_0\,\omega_0(Q) = \omega_0(Q) \qquad \text{für } Q \in F = F_0\,. \tag{16.22}$$

Es ist $\omega_0(C^0) = A_0$. Für $P \in M^0 = M_0$ ist $p = (P, 0) \in \Delta^1$. Da $T_p \cup M_p$ nur aus isolierten Punkten besteht oder leer ist, gibt es einen Punkt $Q \in N_p \cap jA_p$. Für ihn ist $P = \vartheta_P(Q)$ und $R = \tau_p(Q) \in C_p \subseteq F_p \subseteq F$. Also gehört der Punkt $\omega_0(R) = \vartheta_P\,\omega_p(R) = \vartheta_P\,\omega_p\,\tau_p(Q) = \vartheta_P(Q) = P$ zu $\omega_0(F)$. Man hat

$$\omega_0(F) \geqq \omega_0(C^0) \cup \omega_0(F) \geqq A_0 \cup M_0 = H^0 \text{ also } \omega_0(F) = H^0.$$

7_0: Auf $\tilde{N}_0 = F - C_0 = F - C^0 = \tilde{N}^0$ hat ω_0 eine positive Vielfachheit und $\tilde{N}^0$ ist entweder leer oder eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus F.

II. *Ist die Behauptung für alle μ in $0 \leq \mu \leq \nu - 1$ richtig, so werde sie für $\mu = \nu$ bewiesen.*

Durch den σ-Prozeß

$$\mathfrak{S}_{\nu-1} = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} H^{\nu-1}, A^{\nu-1}, M^{\nu-1}, \sigma_{\nu-1} \\ H^\nu, \quad B^\nu, \quad N^\nu, \quad v_{\nu-1} \end{pmatrix} \tag{16.23}$$

werden H^ν, B^ν, $\sigma_{\nu-1}$, $v_{\nu-1}$ und N^ν definiert.

a) *Die Abbildung $\alpha_\mathfrak{p}$ werde für $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \in \Delta^\nu$ konstruiert.* Dazu wird Satz 10.16 mittels der folgenden Übersetzungstabelle angewandt.

Satz 10.16	H	$\varkappa$	$\varphi_\varkappa$	H_1	G	B	A	N	M
Hier	$j\,H_\mathfrak{p}$	$\alpha_\mathfrak{q}\vartheta_P$	$\varphi_\mathfrak{p}$	$\alpha_\mathfrak{q}\vartheta_P(j\,H_\mathfrak{p})$	$H^{\nu-1}$	$j\,B_\mathfrak{p}$	$A^{\nu-1}$	$N_\mathfrak{p}$	$M^{\nu-1}$

Satz 10.16	$\mathfrak{S}_M$	σ_M	$\tilde{H}$	$\tilde{B}$	$\tilde{N}$	v_M	N_0	H_0	γ	φ_γ
Hier	$\mathfrak{S}_{\nu-1}$	$\sigma_{\nu-1}$	H^ν	B^ν	N^ν	$v_{\nu-1}$	$N_\mathfrak{p}$	$j\,H_\mathfrak{p}$	$\alpha_\mathfrak{p}$	$\psi_\mathfrak{p}$

Setzt man $\vartheta_P(Q) = v_P(Q, H_\mathfrak{p})$ für $Q \in H_\mathfrak{p}$, so wird $jH_\mathfrak{p} = jB_\mathfrak{p} \cup N_\mathfrak{p}$ durch ϑ_P analytisch auf $jA_\mathfrak{q} \cup \{P\}$ abgebildet. Für $\mathfrak{q} = 0$ ist $jA_\mathfrak{q} \cup \{P\} \subseteq H_0 = jH_0 = jH_\mathfrak{q}$, für $\mathfrak{q} \in \Delta^{\nu-1}$ mit $\nu - 1 > 0$ ist $T_\mathfrak{q} \subseteq jB_\mathfrak{q}$ also

$$jA_\mathfrak{q} \cup \{P\} \subseteq jA_\mathfrak{q} \cup M_\mathfrak{q} = jA_\mathfrak{q} \cup jM_\mathfrak{q} = jH_\mathfrak{q}\,. \tag{16.24}$$

Durch $\alpha_\mathfrak{q}$ wird $jH_\mathfrak{q}$ pseudokonform in $H^{\nu-1}$ abgebildet. Also wird $jH_\mathfrak{p}$ durch $\alpha_\mathfrak{q}\vartheta_P$ analytisch in $H^{\nu-1}$ abgebildet, und zwar mit einer Vielfachheit $\varphi_\mathfrak{p}$, die mit der Vielfachheit von ϑ_P übereinstimmt. Also ist

$$\varphi_\mathfrak{p}(Q) = \begin{cases} 0 & \text{für } P \in jB_\mathfrak{p}\,, \\ 1 & \text{für } P \in N_\mathfrak{p}\,. \end{cases} \tag{16.25}$$

Die offene Menge $jB_\mathfrak{p} \subseteq jH_\mathfrak{p}$ wird durch $\alpha_\mathfrak{q}\,\vartheta_P$ pseudokonform auf

$$\alpha_\mathfrak{q}\,\vartheta_P(jB_\mathfrak{p}) = \alpha_\mathfrak{q}\,v_P(jB_\mathfrak{p}) = \alpha_\mathfrak{q}(jA_\mathfrak{q}) \subseteq A^{\nu-1} \tag{16.26}$$

abgebildet. Die Menge $N_\mathfrak{p} = jH_\mathfrak{p} - jB_\mathfrak{p}$, auf der $\varphi_\mathfrak{p}(Q) = 1$ ist, enthält keinen inneren Punkt. In $M^{\nu-1} = H^{\nu-1} - A^{\nu-1}$ wird der σ-Prozeß

$$\mathfrak{S}_{\nu-1} = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} H^{\nu-1}, A^{\nu-1}, M^{\nu-1}, \sigma_{\nu-1} \\ H^\nu, \quad B^\nu, \quad N^\nu, \quad v_{\nu-1} \end{pmatrix} \tag{16.27}$$

ausgeführt. Gemäß der Anmerkung 2 von Satz 10.16 sind die Voraussetzungen von Satz 10.16 erfüllt.

Die Abbildung $\alpha_\mathfrak{p}$, die man als Fortsetzung von $\sigma_{\nu-1}\,\alpha_\mathfrak{q}\,\vartheta_P$ erhält, bildet $jH_\mathfrak{p}$ analytisch auf $\tilde{H}_\mathfrak{p} \subseteq H^\nu$ ab, wobei ihre Vielfachheit

$$\psi_\mathfrak{p}(Q) = \varphi_\mathfrak{p}(Q) = 0 \qquad \text{für } Q \in jB_\mathfrak{p}\,, \tag{16.28}$$

$$\psi_\mathfrak{p}(Q) < \varphi_\mathfrak{p}(Q) \qquad \text{für } Q \in \vartheta_P^{-1}\,\alpha_\mathfrak{q}^{-1}(M^{\nu-1} \cap \tilde{H}_\mathfrak{q}) \tag{16.29}$$

ist. Nun gilt $\alpha_\mathfrak{q}\,\vartheta_P(N_\mathfrak{p}) = \alpha_\mathfrak{q}(\{P\}) \subseteq \alpha_\mathfrak{q}(M_\mathfrak{q}) \subseteq M^{\nu-1}$, also ist

$$0 \leq \psi_\mathfrak{p}(Q) < \varphi_\mathfrak{p}(Q) = 1 \qquad \text{für } Q \in N_\mathfrak{p}\,. \tag{16.30}$$

Folglich ist $\psi_\mathfrak{p}$ in $jH_\mathfrak{p}$ identisch Null, d. h. $jH_\mathfrak{p}$ wird durch $\alpha_\mathfrak{p}$ sogar pseudokonform auf $\tilde{H}_\mathfrak{p} \subseteq H^\nu$ abgebildet. Für $Q \in jA_\mathfrak{q}$ ist

(16.31) $$\sigma_{\nu-1}\, \alpha_\mathfrak{q}(Q) = \sigma_{\nu-1}\, \alpha_\mathfrak{q}\, \vartheta_P\, \sigma_P(Q) = \alpha_\mathfrak{p}\, \sigma_P(Q)$$

und

(16.32) $$\alpha_\mathfrak{q}\, \vartheta_P(Q) = \vartheta_{\nu-1}\, \sigma_{\nu-1}\, \alpha_\mathfrak{q}\, \vartheta_P(Q) = \vartheta_{\nu-1}\, \alpha_\mathfrak{p}(Q)\,.$$

Vermöge analytischer Fortsetzung gilt $\alpha_\mathfrak{q}\, \vartheta_P = \vartheta_{\nu-1}\, \alpha_\mathfrak{p}$ sogar auf $jH_\mathfrak{p}$.

b) *Nun wird* $\alpha_\mathfrak{p}(jB_\mathfrak{p}) = \tilde{H}_\mathfrak{p} \cap B^\nu$ *und* $\alpha_\mathfrak{p}(N_\mathfrak{p}) = \tilde{H}_\mathfrak{p} \cap N^\nu$ *für* $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \in \Delta^\nu$ *mit* $\nu \geqq 1$ *behauptet.* Es ist nämlich

(16.33) $$\vartheta_{\nu-1}\, \alpha_\mathfrak{p}(N_\mathfrak{p}) = \alpha_\mathfrak{q}\, \vartheta_P(N_\mathfrak{p}) = \alpha_\mathfrak{q}(\{P\}) \subseteq \alpha_\mathfrak{q}(M_\mathfrak{q}) \subseteq M^{\nu-1}\,,$$

also

(16.34) $$\alpha_\mathfrak{p}(N_\mathfrak{p}) \subseteq \vartheta_{\nu-1}^{-1}(M^{\nu-1}) = N^\nu\,.$$

Außerdem ist

(16.35) $$\alpha_\mathfrak{p}(jB_\mathfrak{p}) = \sigma_{\nu-1}\, \alpha_\mathfrak{q}\, \vartheta_P(jB_\mathfrak{p}) \subseteq B^\nu\,.$$

Da $jH_\mathfrak{p} = jB_\mathfrak{p} \cup N_\mathfrak{p}$ durch $\alpha_\mathfrak{p}$ pseudokonform auf $\tilde{H}_\mathfrak{p}$ abgebildet wird, ergibt sich

(16.36) $$\alpha_\mathfrak{p}(jB_\mathfrak{p}) = \tilde{H}_\mathfrak{p} \cap B^\nu\,, \quad \alpha_\mathfrak{p}(N_\mathfrak{p}) = \tilde{H}_\mathfrak{p} \cap N^\nu\,.$$

c) *Es wird* $\tilde{H}^\nu = B^\nu \cup \bigcup_{\mathfrak{p}\in\Delta^\nu} H_\mathfrak{p}$ *behauptet.* Ist nämlich $Q \in N^\nu$, so ist $P = \vartheta_{\nu-1}(Q) \in M^{\nu-1} = \bigcup_{\mathfrak{q}\in\Delta^{\nu-1}} \alpha_\mathfrak{q}(M_\mathfrak{q})$. Also gibt es ein $\mathfrak{q} \in \Delta^{\nu-1}$ und einen Punkt $R \in M_\mathfrak{q}$ mit $\alpha_\mathfrak{q}(R) = P$. Es gehört $\mathfrak{p} = (R, \mathfrak{q})$ zu Δ^ν. Es ist $\{R\} = \vartheta_R(N_\mathfrak{p})$, also

(16.37) $$\{P\} = \alpha_\mathfrak{q}\, \vartheta_R(N_\mathfrak{p}) = \vartheta_{\nu-1}\, \alpha_\mathfrak{p}(N_\mathfrak{p}) = \vartheta_{\nu-1}(\tilde{H}_\mathfrak{p} \cap N^\nu)\,.$$

Es ist $\alpha_\mathfrak{p}(N_\mathfrak{p})$ eine irreduzible analytische Menge der Dimension 2, die durch $\vartheta_{\nu-1}$ auf P abgebildet wird. Nach Satz 10.14 Behauptung 2 besteht aber $\vartheta_{\nu-1}^{-1}(P)$ aus genau einem irreduziblen Teil. Daher ist

(16.38) $$\vartheta_{\nu-1}^{-1}(P) = \alpha_\mathfrak{p}(N_\mathfrak{p}) = \tilde{H}_\mathfrak{p} \cap N^\nu\,,$$

also

(16.39) $$Q \in \vartheta_{\nu-1}^{-1}(P) = \alpha_\mathfrak{p}(N_\mathfrak{p}) = \tilde{H}_\mathfrak{p} \cap N^\nu\,.$$

Man erhält

(16.40) $$H^\nu = B^\nu \cup N^\nu \subseteq B^\nu \cup \bigcup_{\mathfrak{p}\in\Delta^\nu} (\tilde{H}_\mathfrak{p} \cap N^\nu) \subseteq B^\nu \cup \bigcup_{\mathfrak{p}\in\Delta^\nu} \tilde{H}_\mathfrak{p} \subseteq H^\nu\,,$$

also

(16.41) $$H^\nu = B^\nu \cup \bigcup_{\mathfrak{p}\in\Delta^\nu} \tilde{H}_\mathfrak{p}\,.$$

d) Wenn $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \in \Delta^\nu$ und $\mathfrak{r} = (R, \mathfrak{n}) \in \Delta^\nu$ verschieden sind, so ist $\alpha_\mathfrak{q}(P) \neq \alpha_\mathfrak{n}(R)$. Es sei nämlich $\mathfrak{m} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{r}$ mit

(16.42) $$\mathfrak{p} = (P_\nu, \ldots, P_\lambda, \mathfrak{m}) \qquad \text{mit } P_\nu = P\,,$$

(16.43) $$\mathfrak{p}_\mu = (P_\mu, \ldots, P_\lambda, \mathfrak{m}) \qquad \text{für } \lambda \leqq \mu \leqq \nu\,,$$

(16.44) $$\mathfrak{r} = (R_\nu, \ldots, R_\lambda, \mathfrak{m}) \qquad \text{mit } R_\nu = R\,,$$

(16.45) $$\mathfrak{r}_\mu = (R_\mu, \ldots, R_\lambda, \mathfrak{m}) \qquad \text{für } \lambda \leqq \mu \leqq \nu\,,$$

wobei $R_\lambda \neq P_\lambda$ ist. Nun erhält man

$$(16.46)\quad \begin{aligned} \vartheta_{\lambda-1}\ldots\vartheta_{\nu-2}\,\alpha_{\mathfrak{q}}(P) &= \vartheta_{\lambda-1}\ldots\vartheta_{\nu-2}\,\alpha_{\mathfrak{p}_{\nu-1}}(P_\nu) \\ &= \vartheta_{\lambda-1}\ldots\vartheta_{\nu-3}\,\alpha_{\mathfrak{p}_{\nu-2}}\,\vartheta_{P_{\nu-1}}(P_\nu) \\ &= \vartheta_{\lambda-1}\ldots\vartheta_{\nu-3}\,\alpha_{\mathfrak{p}_{\nu-2}}(P_{\nu-1}) = \cdots = \\ &= \vartheta_{\lambda-1}\,\alpha_{\mathfrak{p}_\lambda}(P_{\lambda+1}) \\ &= \alpha_{\mathfrak{m}}\,\vartheta_{P_\lambda}(P_{\lambda+1}) \\ &= \alpha_{\mathfrak{m}}(P_\lambda)\,. \end{aligned}$$

Entsprechend erhält man

$$(16.47)\quad \vartheta_{\lambda-1}\ldots\vartheta_{\nu-2}\,\alpha_{\mathfrak{n}}(R) = \alpha_{\mathfrak{m}}(R_\lambda)\,.$$

Da $R_\lambda \in M_{\mathfrak{m}}$ und $P_\lambda \in M_{\mathfrak{m}}$ verschieden sind und da $jH_{\mathfrak{m}} \supseteq M_{\mathfrak{m}}$ durch $\alpha_{\mathfrak{m}}$ pseudokonform in $H^{\lambda-1}$ abgebildet wird, ist

$$(16.48)\quad \alpha_{\mathfrak{m}}(R_\lambda) \neq \alpha_{\mathfrak{m}}(P_\lambda)\,,$$

also auch

$$(16.49)\quad \alpha_{\mathfrak{n}}(R) \neq \alpha_{\mathfrak{q}}(P)\,.$$

e) *Setzt man* $M^\nu = \bigcup_{\mathfrak{p}\in\Delta^\nu} \alpha_{\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}})$, *so wird* $\tilde{H}_{\mathfrak{p}} \cap M^\nu = \alpha_{\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}})$ *behauptet.* Sind nämlich $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q})$ und $\mathfrak{r} = (R, \mathfrak{n})$ verschiedene Elemente von Δ^ν, so ist

$$(16.50)\quad \vartheta_{\nu-1}(\alpha_{\mathfrak{p}}(N_{\mathfrak{p}}) \cap \alpha_{\mathfrak{r}}(N_{\mathfrak{r}})) = \{\alpha_{\mathfrak{q}}(P)\} \cap \{\alpha_{\mathfrak{n}}(R)\} = \emptyset\,,$$

also

$$(16.51)\quad \alpha_{\mathfrak{p}}(N_{\mathfrak{p}}) \cap \alpha_{\mathfrak{r}}(N_{\mathfrak{r}}) = \emptyset \quad \text{für } \mathfrak{p} \in \Delta^\nu,\ \mathfrak{r} \in \Delta^\nu \text{ mit } \mathfrak{p} \neq \mathfrak{r}.$$

Nun gilt

$$(16.52)\quad \begin{aligned} \alpha_{\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}}) \cap \tilde{H}_{\mathfrak{r}} &\subseteq \alpha_{\mathfrak{p}}(N_{\mathfrak{p}}) \cap (\alpha_{\mathfrak{r}}(N_{\mathfrak{r}}) \cup \alpha_{\mathfrak{r}}(jB_{\mathfrak{r}})) \\ &= \alpha_{\mathfrak{p}}(N_{\mathfrak{p}}) \cap \alpha_{\mathfrak{r}}(jB_{\mathfrak{r}}) \subseteq N^\nu \cap B^\nu = \emptyset \end{aligned}$$

für $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{r}$, also

$$(16.53)\quad \alpha_{\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}}) \cap \tilde{H}_{\mathfrak{r}} = \emptyset \qquad \text{für } \mathfrak{p} \neq \mathfrak{r}\,.$$

Man erhält

$$(16.54)\quad \begin{aligned} \tilde{H}_{\mathfrak{p}} \cap M^\nu &= \bigcup_{\mathfrak{r}\in\Delta^\nu} [\alpha_{\mathfrak{r}}(M_{\mathfrak{r}}) \cap \tilde{H}_{\mathfrak{p}}] \\ &= \tilde{H}_{\mathfrak{p}} \cap \alpha_{\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}}) \\ &= \alpha_{\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}})\,. \end{aligned}$$

f) *Es ist* $M^\nu = \bigcup_{\mathfrak{p}\in\Delta^\nu} \alpha_{\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}}) \subseteq \bigcup_{\mathfrak{p}\in\Delta^\nu} \alpha_{\mathfrak{p}}(N_{\mathfrak{p}}) \subseteq N^\nu$.

g) *Setzt man* $A^\nu = B^\nu \cup \bigcup_{\mathfrak{p}\in\Delta^\nu} \alpha_{\mathfrak{p}}(jA_{\mathfrak{p}})$, *so ist* A^ν *offen und* $A^\nu = H^\nu - M^\nu$.

Da nämlich die offene Menge $jA_{\mathfrak{p}}$ durch $\alpha_{\mathfrak{p}}$ pseudokonform auf $\alpha_{\mathfrak{p}}(jA_{\mathfrak{p}})$ abgebildet wird, ist $\alpha_{\mathfrak{p}}(jA_{\mathfrak{p}})$, also auch $B^\nu \cup \bigcup_{\mathfrak{p}\in\Delta^\nu} \alpha_{\mathfrak{p}}(jA_{\mathfrak{p}}) = A^\nu$ offen. Es gilt

$$(16.55)\quad \begin{aligned} A^\nu \cap M^\nu = A^\nu \cap N^\nu \cap M^\nu &\subseteq \bigcup_{\mathfrak{p}\in\Delta} \bigcup_{\mathfrak{r}\in\Delta^\nu} [\alpha_{\mathfrak{r}}(jA_{\mathfrak{r}}) \cap \alpha_{\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}})] \\ &= \bigcup_{\mathfrak{p}\in\Delta^\nu} (\alpha_{\mathfrak{p}}(jA_{\mathfrak{p}}) \cap \alpha_{\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}})) \\ &= \bigcup_{\mathfrak{p}\in\Delta^\nu} \alpha_{\mathfrak{p}}(jA_{\mathfrak{p}} \cap M_{\mathfrak{p}}) = \emptyset\,. \end{aligned}$$

Der Durchschnitt $A^\nu \cap M^\nu$ ist leer. Außerdem ist

$$\begin{aligned} A^\nu \cup M^\nu &\supseteqq B^\nu \cup \bigcup_{\mathfrak{p}\in\Delta^\nu} [\alpha_\mathfrak{p}(jA_\mathfrak{p}) \cup \alpha_\mathfrak{p}(M_\mathfrak{p})] \\ &= B^\nu \cup \bigcup_{\mathfrak{p}\in\Delta^\nu} \alpha_\mathfrak{p}(jA_\mathfrak{p} \cup M_\mathfrak{p}) \\ &= B^\nu \cup \bigcup_{\mathfrak{p}\in\Delta^\nu} \alpha_\mathfrak{p}(jA_\mathfrak{p} \cup jM_\mathfrak{p}) \qquad (16.55) \\ &= B^\nu \cup \bigcup_{\mathfrak{p}\in\Delta^\nu} \alpha_\mathfrak{p}(jH_\mathfrak{p}) \\ &= B^\nu \cup \bigcup_{\mathfrak{p}\in\Delta^\nu} \tilde{H}_\mathfrak{p} = H^\nu, \end{aligned}$$

woraus $H^\nu = A^\nu \cup M^\nu$ mit $A^\nu \cap M^\nu = \theta$, also $A^\nu = H^\nu - M^\nu$ folgt.

h) *Es hat M^ν keinen Häufungspunkt*. Angenommen, Q_0 ist ein Häufungspunkt von M^ν. Dann ist $Q_0 \in M^\nu$, weil $M^\nu = H^\nu - A^\nu$ abgeschlossen ist. Für ein $\mathfrak{p} \in \Delta^\nu$ ist $Q_0 \in \alpha_\mathfrak{p}(M_\mathfrak{p}) = \tilde{H}_\mathfrak{p} \cap M^\nu$. Es gibt eine Folge $Q^\lambda \in M^\nu$ mit $Q^\lambda \neq Q_0$, die gegen Q_0 strebt. Als pseudokonformes Bild der offenen Menge $jH_\mathfrak{p}$ ist $\tilde{H}_\mathfrak{p}$ offen. Für $\lambda \geqq \lambda_0$ ist also $Q^\lambda \in \tilde{H}_\mathfrak{p} \cap M^\nu = \alpha_\mathfrak{p}(M_\mathfrak{p})$. Es strebt $\alpha_\mathfrak{p}^{-1}(Q^\lambda) \to \alpha_\mathfrak{p}^{-1}(Q_0)$ für $\lambda \to \infty$, wobei $\alpha_\mathfrak{p}^{-1}(Q^\lambda) \in M_\mathfrak{p}$ mit $\alpha_\mathfrak{p}^{-1}(Q^\lambda) \neq \alpha_\mathfrak{p}^{-1}(Q_0)$ für $\lambda \geqq \lambda_0$ ist. Daher hat $M_\mathfrak{p}$ einen Häufungspunkt, was falsch ist. Folglich hat M^ν keinen Häufungspunkt.

Die Behauptungen 1_ν bis 4_ν sind bewiesen.

i) *Nun werde 5_ν bewiesen*. Durch $\tau_{\nu-1}\, v_{\nu-1}$ wird B^ν pseudokonform auf

$$\tau_{\nu-1}\, v_{\nu-1}(B^\nu) = \tau_{\nu-1}(A^{\nu-1}) = C^{\nu-1} = \bigcup_{\mu=0}^{\nu-1} \bigcup_{\mathfrak{p}\in\Delta^\mu} C_\mathfrak{p} \tag{16.56}$$

abgebildet. Durch $\tau_\mathfrak{p}\, \alpha_\mathfrak{p}^{-1}$ für $\mathfrak{p} \in \Delta^\nu$ wird $\alpha_\mathfrak{p}(jA_\mathfrak{p})$ pseudokonform auf $\tau_\mathfrak{p}(jA_\mathfrak{p}) = C_\mathfrak{p}$ abgebildet. Für $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q})$ ist

$$B^\nu \cap \alpha_\mathfrak{p}(jA_\mathfrak{p}) = \alpha_\mathfrak{p}(jB_\mathfrak{p}) = \alpha_\mathfrak{p}\, \sigma_P\, (jA_\mathfrak{q}) = \sigma_{\nu-1}\, \alpha_\mathfrak{q}\, (jA_\mathfrak{q}). \tag{16.57}$$

Es gibt zu $Q \in B^\nu \cap \alpha_\mathfrak{p}(jA_\mathfrak{p})$ genau einen Punkt $R \in jA_\mathfrak{q}$ mit

$$\alpha_\mathfrak{q}^{-1}\, \vartheta_{\nu-1}(Q) = \vartheta_P\, \alpha_\mathfrak{p}^{-1}(Q) = R, \tag{16.58}$$

$$\sigma_{\nu-1}\, \alpha_\mathfrak{q}(R) = \alpha_\mathfrak{p}\, \sigma_P(R) = Q, \tag{16.59}$$

$$\vartheta_{\nu-1}(Q) \in \alpha_\mathfrak{q}(jA_\mathfrak{q}). \tag{16.60}$$

Also ist

$$\tau_\mathfrak{p}\, \alpha_\mathfrak{p}^{-1}(Q) = \tau_\mathfrak{p}\, \sigma_P(R) = \tau_\mathfrak{q}(R) = \tau_\mathfrak{q}\, \alpha_\mathfrak{q}^{-1}\, \vartheta_{\nu-1}(Q) = \tau_{\nu-1}\, \vartheta_{\nu-1}(Q) \tag{16.61}$$

für $Q \in B^\nu \cap \alpha_\mathfrak{p}(jA_\mathfrak{p})$. Da $N^\nu = H^\nu - B^\nu$ eine höchstens 2-dimensionale analytische Menge ist, wird $A^\nu = B^\nu \cup \bigcup_{\mathfrak{p}\in\Delta^\nu} \alpha_\mathfrak{p}(jA_\mathfrak{p})$ durch

$$\tau_\nu(Q) = \begin{cases} \tau_\mathfrak{p}\, \alpha_\mathfrak{p}^{-1}(Q) & \text{für } Q \in \alpha_\mathfrak{p}(jA_\mathfrak{p}), \\ \tau_{\nu-1}\, \vartheta_{\nu-1}(Q) & \text{für } Q \in B^\nu \end{cases} \tag{16.62}$$

pseudokonform auf $C^\nu = C^{\nu-1} \cup \bigcup_{\mathfrak{p}\in\Delta^\nu} C_\mathfrak{p} = \bigcup_{\mu=0}^{\nu} \bigcup_{\mathfrak{p}\in\Delta^\mu} C_\mathfrak{p}$ abgebildet. Es ist

$$\tau_\nu(Q) = \tau_{\nu-1}\, \vartheta_{\nu-1}(Q) \quad \text{für } Q \in B^\nu, \tag{16.63}$$

$$\tau_{\nu-1}(Q) = \tau_\nu\, \sigma_{\nu-1}(Q) \quad \text{für } Q \in A^{\nu-1}, \tag{16.64}$$

$$\tau_\mathfrak{p}\, \alpha_\mathfrak{p}^{-1}(Q) = \tau_\nu(Q) \quad \text{für } Q \in \alpha_\mathfrak{p}(jA_\mathfrak{p}) \text{ mit } \mathfrak{p} \in \tag{16.65}$$

Die Behauptung 5_ν ist bewiesen.

j) *Ist* $\mathfrak{p} \in \Delta^\nu$ *und* $\mathfrak{r} = (R_\mu, \ldots, R_{\nu+1}, \mathfrak{p}) \in \Delta^\mu$ *mit* $\mu \geq \nu$, *so wird*

$$\vartheta_{R_{\nu+1}} \ldots \vartheta_{R_\mu}(jH_\mathfrak{r}) \subseteq jH_\mathfrak{p} \tag{16.66}$$

behauptet. Für $\mu = \nu$, also $\mathfrak{r} = \mathfrak{p}$, ist die Behauptung $jH_\mathfrak{r} = jH_\mathfrak{p}$ richtig. Ist die Behauptung schon für $\mu - 1 \geq \nu$ richtig und $\mathfrak{r} = (R_\mu, \ldots, R_{\nu+1}, \mathfrak{p}) \in \Delta^\mu$ gegeben. so wird $\mathfrak{q} = (R_{\mu-1}, \ldots, R_{\nu+1}, \mathfrak{p})$ gesetzt. Es ist

$$\begin{aligned}\vartheta_{R_\mu}(jH_\mathfrak{r}) &= \vartheta_{R_\mu}(jB_\mathfrak{r} \cup N_\mathfrak{r}) = jA_\mathfrak{q} \cup \{R_\mu\}\\ &\subseteq jA_\mathfrak{q} \cup M_\mathfrak{q} = jA_\mathfrak{q} \cup jM_\mathfrak{q} = jH_\mathfrak{q}\,.\end{aligned} \tag{16.67}$$

womit

$$\vartheta_{R_{\nu+1}} \ldots \vartheta_{R_{\mu-1}} \vartheta_{R_\mu}(jH_\mathfrak{r}) \subseteq \vartheta_{R_{\nu+1}} \ldots \vartheta_{R_{\mu-1}}(jH_\mathfrak{q}) \subseteq jH_\mathfrak{p} \tag{16.68}$$

folgt.

k) *Es wird* $\omega_\mathfrak{p}(F_\mathfrak{p}) = jH_\mathfrak{p}$ *behauptet.* Für $\mathfrak{p} \in \Delta^\nu$ ist nämlich, wenn man $\mathfrak{r} = (R_\mu, \ldots, R_{\nu+1}, \mathfrak{p})$ setzt,

$$\begin{aligned}\omega_\mathfrak{p}(F_\mathfrak{p}) &= \bigcup_{\mathfrak{r} \geq \mathfrak{p}} \omega_\mathfrak{p}(C_\mathfrak{r}) = \bigcup_{\mathfrak{r} \geq \mathfrak{p}} \vartheta_{R_{\nu+1}} \ldots \vartheta_{R_\mu} \omega_\mathfrak{r}(C_\mathfrak{r})\\ &= \bigcup_{\mathfrak{r} \geq \mathfrak{p}} \vartheta_{R_{\nu+1}} \ldots \vartheta_{R_\mu}(jA_\mathfrak{r})\\ &\subseteq \bigcup_{\mathfrak{r} \geq \mathfrak{p}} \vartheta_{R_{\nu+1}} \ldots \vartheta_{R_\mu}(jH_\mathfrak{r}) \subseteq jH_\mathfrak{p}\,.\end{aligned} \tag{16.69}$$

$$\omega_\mathfrak{p}(F_\mathfrak{p}) \supseteq \omega_\mathfrak{p}(C_\mathfrak{p}) = jA_\mathfrak{p}\,. \tag{16.70}$$

Für $R \in jH_\mathfrak{p} - jA_\mathfrak{p} = jM_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p}$ ist $\mathfrak{r} = (R, \mathfrak{p}) \in \Delta^{\nu+1}$ und $C_\mathfrak{r} \subseteq F_\mathfrak{p}$. Da $M_\mathfrak{r}$ keinen Häufungspunkt hat, gibt es einen Punkt $Q \in N_\mathfrak{r} - M_\mathfrak{r} = N_\mathfrak{r} \cap A_\mathfrak{p} = N_\mathfrak{r} \cap jA_\mathfrak{p}$. Für ihn ist $R = \vartheta_R(Q)$ und $P = \tau_\mathfrak{r}(Q) \in C_\mathfrak{r} \subseteq F_\mathfrak{p}$. Also gehört der Punkt

$$\omega_\mathfrak{p}(P) = \vartheta_R\, \omega_\mathfrak{r}(P) = \vartheta_R\, \omega_\mathfrak{r}\, \tau_\mathfrak{r}(Q) = \vartheta_R(Q) = R \tag{16.71}$$

zu $\omega_\mathfrak{p}(F_\mathfrak{p})$. Man erhält

$$\omega_\mathfrak{p}(F_\mathfrak{p}) \supseteq jA_\mathfrak{p} \cup (jH_\mathfrak{p} - jA_\mathfrak{p}) = jH_\mathfrak{p}\,. \tag{16.72}$$

Insgesamt folgt $\omega_\mathfrak{p}(F_\mathfrak{p}) = jH_\mathfrak{p}$.

l) *Nun wird* $\mathfrak{6}_\nu$ *bewiesen.* Für $\mathfrak{p} \in \Delta^\nu$ wird $F_\mathfrak{p}$ durch $\omega_\mathfrak{p}$ analytisch auf $jH_\mathfrak{p}$ und $jH_\mathfrak{p}$ durch $\alpha_\mathfrak{p}$ pseudokonform auf $\widetilde{H}_\mathfrak{p} \subseteq H^\nu$ abgebildet. Also wird $F_\mathfrak{p}$ durch $\alpha_\mathfrak{p}\, \omega_\mathfrak{p}$ pseudokonform auf $\widetilde{H}_\mathfrak{p}$ abgebildet. Für $Q \in C_\mathfrak{p}$ ist

$$\alpha_\mathfrak{p}\, \omega_\mathfrak{p}(Q) = \alpha_\mathfrak{p}\, \tau_\mathfrak{p}^{-1}(Q) = \tau_\nu^{-1}(Q)\,. \tag{16.73}$$

Vermöge analytischer Fortsetzung gilt

$$\alpha_\mathfrak{p}\, \omega_\mathfrak{p}(Q) = \tau_\nu^{-1}(Q) \qquad \text{für } Q \in F_\mathfrak{p} \cap C^\nu. \tag{16.74}$$

Da $F - C^\nu \subseteq F - C^0 = \widetilde{N}^0$ eine höchstens 2-dimensionale analytische Menge ist, wird

$$C^\nu \cup \bigcup_{\mathfrak{p} \in \Delta^\nu} F_\mathfrak{p} = \bigcup_{\mu=0}^{\nu} \bigcup_{\mathfrak{p} \in \Delta^\mu} C_\mathfrak{p} \cup \bigcup_{\mu=\nu}^{\infty} \bigcup_{\mathfrak{p} \in \Delta^\mu} C_\mathfrak{p} = F \tag{16.75}$$

durch

$$\omega_\nu(Q) = \begin{cases}\alpha_\mathfrak{p}\, \omega_\mathfrak{p}(Q) & \text{für } Q \in F_\mathfrak{p} \text{ mit } \mathfrak{p} \in \Delta^\nu,\\ \tau_\nu^{-1}(Q) & \text{für } Q \in C^\nu\end{cases} \tag{16.76}$$

analytisch auf $A^\nu \cup \bigcup_{\mathfrak{p}\in\Delta^\nu} \tilde{H}_\mathfrak{p} = H^\nu$ abgebildet. Für $Q \in C^{\nu-1}$ ist

$$\omega_\nu(Q) = \tau_\nu^{-1}(Q) = v_{\nu-1}^{-1}\,\tau_{\nu-1}^{-1}(Q) = \sigma_{\nu-1}\,\omega_{\nu-1}(Q)\,, \tag{16.77}$$

$$\omega_{\nu-1}(Q) = \vartheta_{\nu-1}\,\omega_\nu(Q)\,. \tag{16.78}$$

Vermöge analytischer Fortsetzung gilt:

$$\omega_{\nu-1}(Q) = \vartheta_{\nu-1}\,\omega_\nu(Q) \qquad \text{für } Q \in F\,. \tag{16.79}$$

Die Behauptung 6_ν ist bewiesen.

m) *Es werde nun* 7_ν *bewiesen.* Es ist $\omega_\nu(C^\nu) = \tau_\nu^{-1}(C^\nu) = A^\nu$. Da $\tilde{N}^\nu = F - C^\nu \subseteq F - C^0 = \tilde{N}^0$ keinen inneren Punkt hat, hat nach Satz 7.1 jeder Punkt $P \in A^\nu$ nur einen Urbildpunkt $\omega_\nu^{-1}(P)$ in F, also ist $\omega_\nu(C^\nu) \cap \omega_\nu(\tilde{N}^\nu)$ leer. Für $Q \in \tilde{N}^\nu$ ist

$$\begin{aligned} \omega_\mathfrak{p}(Q) = \alpha_\mathfrak{p}^{-1}\,\omega_\nu(Q) &\in \alpha_\mathfrak{p}^{-1}(\omega_\nu(\tilde{N}^\nu) \cap \tilde{H}_\mathfrak{p}) \\ &\subseteq \alpha_\mathfrak{p}^{-1}(M^\nu \cap \tilde{H}_\mathfrak{p}) = M_\mathfrak{p} \qquad \text{für ein } \mathfrak{p} \in \Delta^\nu; \end{aligned} \tag{16.80}$$

also hat $\omega_\mathfrak{p}$ in Q eine positive Vielfachheit, weswegen ω_ν in Q eine positive Vielfachheit hat. Nach Satz 7.1 ist $\tilde{N}^\nu$ eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus F oder leer.

Damit ist die Induktion durchgeführt, w. z. b. w.

Zusatz zu Satz 16.2.

Hat H_0 eine abzählbare Basis der offenen Mengen, so bestehen die Mengen M^ν aus höchstens abzählbar vielen Punkten und H^ν sowie F haben eine abzählbare Basis der offenen Mengen.

Beweis. Es hat $H^0 = H_0$ eine abzählbare Basis der offenen Mengen. Da M^0 eine Menge ohne Häufungspunkte ist, besteht M^0 aus höchstens abzählbar vielen Punkten. Ist die Behauptung schon für $\nu - 1 \geqq 0$ bewiesen, so hat $M^{\nu-1}$ höchstens abzählbar viele Punkte und $H^{\nu-1}$ eine abzählbare Basis der offenen Mengen. Da H^ν aus $H^{\nu-1}$ durch einen σ-Prozeß in der höchstens abzählbaren Menge $M^{\nu-1}$ hervorgeht, hat auch H^ν eine abzählbare Basis der offenen Mengen und M^ν besteht als Menge ohne Häufungspunkte aus höchstens abzählbar vielen Punkten.

Da $A^\nu \subseteq H^\nu$ pseudokonform durch τ_ν auf C^ν abgebildet wird, hat auch C^ν eine abzählbare Basis der offenen Mengen. Also hat

$$\bigcup_{\nu=0} C^\nu = \bigcup_{\mu=0}^{\infty} \bigcup_{\mathfrak{p}\in\Delta^\mu}^{\infty} C_\mathfrak{p} = F \tag{16.81}$$

eine abzählbare Basis der offenen Mengen, w. z. b. w.

Nun kann der Satz über die Erzeugung meromorpher Modifikationen zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten, die eine abzählbare Basis der offenen Mengen haben, bewiesen werden.

Satz 16.3. Die Erzeugung meromorpher Modifikationen.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei meromorph und beiderseits offen. Die Mannigfaltigkeiten G und H haben je eine abzählbare Basis der offenen Mengen.*

Behauptung.

A. *Zu jeder Zahl* $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ *gibt es eine 4-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit* H^ν *und eine Menge* $M^\nu \subseteq H^\nu$, *so daß gilt:*

1. *Es ist* $H_0 = G$ *und* $M_0 \subseteq M$. *Aus* H^ν *wird* $H^{\nu+1}$ *durch einen* σ-*Prozeß in der abgeschlossenen Menge* M^ν *gewonnen:*

$$\mathfrak{S}_\nu = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} H_\nu, & A^\nu, & M^\nu, & \sigma_\nu \\ H^{\nu+1}, & B^{\nu+1}, & M^{\nu+1}, & v_\nu \end{pmatrix}. \tag{16.82}$$

2. *Für* $\nu \geqq 1$ *ist* $M^\nu \subseteq N^\nu$ *und* $B^\nu \subseteq A^\nu$. *Die Mengen* M^ν *haben für* $\nu \geqq 0$ *keinen Häufungspunkt in* H^ν *und sind höchstens abzählbar.*

3. *Für* $\nu \geqq 0$ *bildet eine analytische Abbildung* $\delta_\nu(Q)$ *die offene Menge* A^ν *in* H *ab. In jedem Punkt von* M^ν *ist* δ_ν *singulär. Für* $Q \in A$ *ist*

$$\delta_0(Q) = \tau(Q). \tag{16.83}$$

Für $Q \in B^{\nu+1}$ *und* $\nu \geqq 0$ *ist*

$$\delta_{\nu+1}(Q) = \delta_\nu\, v_\nu(Q). \tag{16.84}$$

4. *Es gibt eine 4-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit* F *mit abzählbarer Basis der offenen Mengen und für* $\nu \geqq 0$ *eine pseudokonforme Abbildung* τ_ν *von* A^ν *auf* $C^\nu \subseteq F$, *wobei* $F = \bigcup_{\nu=0}^{\infty} C^\nu$ *ist. Es gilt*

$$\tau_\nu(Q) = \tau_{\nu+1}\,\sigma_\nu(Q) \qquad \text{für } Q \in A^\nu, \tag{16.85}$$

$$\tau_{\nu+1}(Q) = \tau_\nu\, v_\nu(Q) \qquad \text{für } Q \in B^{\nu+1}. \tag{16.85a}$$

5. *Eine analytische Abbildung* ω_ν *bildet* F *auf* H^ν *für* $\nu \geqq 0$ *ab, so daß gilt, wenn* $\vartheta_\nu(Q) = v_\nu(Q, H^\nu)$ *für* $Q \in H^\nu$ *gesetzt wird:*

$$\omega_\nu(Q) = \tau_\nu^{-1}(Q) \qquad \text{für } Q \in C^\nu, \tag{16.86}$$

$$\omega_{\nu+1}(Q) = \sigma_\nu\, \omega_\nu(Q) \qquad \text{für } Q \in C_\nu, \tag{16.87}$$

$$\omega_\nu(Q) = \vartheta_\nu\, \omega_{\nu+1}(Q) \qquad \text{für } Q \in F. \tag{16.88}$$

6. *Die Menge* $\tilde{N}^\nu = F - C^\nu$, *auf der* ω_ν *eine positive Vielfachheit hat, ist entweder leer oder eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus* F.

7. *Eine analytische Abbildung* χ *bildet* F *auf* H *ab, wobei*

$$\chi(Q) = \delta_\nu\, \omega_\nu(Q) \qquad \text{für } Q \in C^\nu \text{ mit } \nu \geqq 0 \tag{16.89}$$

gilt. Für $Q \in \tau_0(A)$ *ist insbesondere*

$$\chi(Q) = \tau\, \omega_0(Q). \tag{16.90}$$

B. *Zu jeder Zahl* $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ *gibt es eine 4-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit* $\underline{H}^\nu$ *und eine Menge* $\underline{M}^\nu \subseteq \underline{H}^\nu$, *so daß gilt:*

1. *Es ist* $\underline{H}_0 = H$ *und* $\underline{M}_0 \subseteq N$. *Aus* $\underline{H}^\nu$ *wird* $\underline{H}^{\nu+1}$ *durch einen* σ-*Prozeß in der abgeschlossenen Menge* $\underline{M}^\nu$ *gewonnen:*

$$\underline{\mathfrak{S}}_\nu = \mathfrak{S}\begin{pmatrix} \underline{H}^\nu, & \underline{A}^\nu, & \underline{M}^\nu, & \underline{\sigma}_\nu \\ \underline{H}^{\nu+1}, & \underline{B}^{\nu+1}, & \underline{M}^{\nu+1}, & \underline{v}_\nu \end{pmatrix}. \tag{16.91}$$

2. *Für* $\nu \geqq 1$ *ist* $\underline{M}^\nu \subseteq \underline{N}^\nu$ *und* $\underline{B}^\nu \subseteq \underline{A}^\nu$. *Die Mengen* $\underline{M}^\nu$ *haben für* $\nu \geqq 0$ *keinen Häufungspunkt in* $\underline{H}^\nu$ *und sind höchstens abzählbar.*

3. *Für $\nu \geqq 0$ bildet eine analytische Abbildung $\underline{\delta}_\nu(Q)$ die offene Menge $\underline{A}^\nu$ in G ab. In jedem Punkt von $\underline{M}^\nu$ ist $\underline{\delta}_\nu$ singulär. Für $Q \in B$ ist*

(16.92) $$\underline{\delta}_0(Q) = v(Q)\,.$$

Für $Q \in \underline{B}^{\nu+1}$ und $\nu \geqq 0$ ist

(16.93) $$\underline{\delta}_{\nu+1}(Q) = \underline{\delta}_\nu\, \underline{v}_\nu(Q)\,.$$

4. *Es gibt eine 4-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit $\underline{F}$ mit abzählbarer Basis der offenen Mengen und für $\nu \geqq 0$ eine pseudokonforme Abbildung $\underline{\tau}_\nu$ von $\underline{A}^\nu$ auf $\underline{C}^\nu \subseteq \underline{F}$, wobei $\underline{F} = \bigcup\limits_{\nu=0}^{\infty} \underline{C}^\nu$ ist. Es gilt*

(16.94) $$\underline{\tau}_\nu(Q) = \underline{\tau}_{\nu+1}\, \underline{\sigma}_\nu(Q) \qquad \text{für } Q \in \underline{A}^\nu\,,$$

(16.95) $$\underline{\tau}_{\nu+1}(Q) = \underline{\tau}_\nu\, \underline{v}_\nu(Q) \qquad \text{für } Q \in \underline{B}^{\nu+1}\,.$$

5. *Eine analytische Abbildung $\underline{\omega}_\nu$ bildet $\underline{F}$ auf $\underline{H}^\nu$ für $\nu \geqq 0$ ab, so daß gilt, wenn $\underline{\vartheta}_\nu(Q) = \underline{v}_\nu(Q, \underline{H}^\nu)$ für $Q \in \underline{H}^\nu$ gesetzt wird:*

(16.96) $$\underline{\omega}_\nu(Q) = \underline{\tau}_\nu^{-1}(Q) \qquad \text{für } Q \in \underline{C}^\nu\,,$$

(16.97) $$\underline{\omega}_{\nu+1}(Q) = \underline{\sigma}_\nu\, \underline{\omega}_\nu(Q) \qquad \text{für } Q \in \underline{C}^\nu\,,$$

(16.98) $$\underline{\omega}_\nu(Q) = \underline{\vartheta}_\nu\, \underline{\omega}_{\nu+1}(Q) \qquad \text{für } Q \in \underline{F}\,.$$

6. *Die Menge $\underline{\tilde{N}}^\nu = \underline{F} - \underline{C}^\nu$, auf der $\underline{\omega}_\nu$ eine positive Vielfachheit hat, ist entweder leer oder eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus $\underline{F}$.*

7. *Eine analytische Abbildung $\underline{\chi}$ bildet $\underline{F}$ auf G ab, wobei*

(16.99) $$\underline{\chi}(Q) = \underline{\delta}_\nu\, \underline{\omega}_\nu(Q) \qquad \text{für } Q \in C^\nu \text{ mit } \nu \geqq 0$$

gilt. Für $Q \in \underline{\tau}_0(B)$ ist also insbesondere

(16.100) $$\underline{\chi}(Q) = v\, \underline{\omega}_0(Q)\,.$$

C. *Die pseudokonforme Abbildung $\underline{\tau}_0\, \tau\, \omega_0$ von $\tau_0(A) \subseteq F$ in $\underline{F}$ läßt sich zu einer pseudokonformen Abbildung π von F auf $\underline{F}$ fortsetzen, so daß gilt:*

1. *Ist E die Menge der Punkte aus G, in denen die Modifikation $\mathfrak{M}$ nichts ändert, und $\underline{E}$ die Menge der Punkte aus H, in denen die Modifikation $\mathfrak{M}^{-1}$ nichts ändert, und sind*

(16.101) $$\tilde{E} = \tau_0(E)\,, \quad \underline{\tilde{E}} = \underline{\tau}_0(\underline{E})\,,$$

so gilt

(16.102) $$\pi(\tilde{E}) = \underline{\tilde{E}}\,,$$

(16.103) $$\begin{aligned} \pi(Q) &= \underline{\tau}_0\, \delta_0\, \omega_0(Q) = \underline{\tau}_0\, \chi(Q) \\ &= \underline{\chi}^{-1}\, \omega_0(Q) = \underline{\chi}^{-1}\, \delta_0^{-1}\, \chi(Q) \qquad \text{für } Q \in \tilde{E}. \end{aligned}$$

2. *Entweder ist $\tilde{N} = F - \tilde{E}$ leer oder eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus F. Entweder ist $\underline{\tilde{N}} = \underline{F} - \underline{\tilde{E}}$ leer oder eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus $\underline{F}$.*

3. *Ist $\psi_0(Q)$ die Vielfachheit der Abbildung δ_0 und $\underline{\psi}_0(Q)$ die der Abbildung $\underline{\delta}_0$ und wird*

(16.104) $$K_0 = \{Q \mid \psi_0(Q) > 0\,, \quad Q \in A_0\} \subseteq G\,,$$

(16.105) $$\underline{K}_0 = \{Q \mid \underline{\psi}_0(Q) > 0\,, \quad Q \in \underline{A}_0\} \subseteq H$$

gesetzt, so ist

(16.106) $$\tilde{N} = \omega_0^{-1}(K_0 \cup M_0)\,, \quad \tilde{\underline{N}} = \omega_0^{-1}(\underline{K}_0 \cup \underline{M}_0)\,,$$

(16.107) $$\pi(\tilde{N}) = \underline{N}\,.$$

Beweis. Die Voraussetzungen von Satz 15.1 sind erfüllt. Seine Aussagen werden mit denselben Bezeichnungen übernommen.

A: Da G und H eine abzählbare Basis der offenen Mengen haben, so haben die Mengen $T_\mathfrak{p} \cup M_\mathfrak{p}$ keinen Häufungspunkt. Zum σ-Baum $\mathfrak{B}$ kann man also die in Satz 16.2 angegebene Konstruktion durchführen, die mit denselben Bezeichnungen widerspruchsfrei übernommen werden kann. Nach dem Zusatz zu Satz 16.2 bestehen die Mengen M^ν aus höchstens abzählbar vielen Punkten, und jede komplexe Mannigfaltigkeit H^ν hat eine abzählbare Basis der offenen Mengen, was auch für die Grenzmannigfaltigkeit F gilt. Es ist

(16.108) $$F = \bigcup_{\mu=0}^{\infty} \bigcup_{\mathfrak{p}\in\Delta^\mu} C_\mathfrak{p} = \bigcup_{\nu=0}^{\infty} \bigcup_{\mu=0}^{\nu} \bigcup_{\mathfrak{p}\in\Delta^\mu} C_\mathfrak{p} = \bigcup_{\nu=0}^{\infty} C^\nu\,.$$

Die Behauptungen A1, A2, A4, A5, A6 sind bewiesen.

A3: Durch Induktion werde bewiesen, daß A^ν durch eine Abbildung δ_ν in H abgebildet wird, für die gilt

im Falle $\nu = 0$: $$\delta_0(Q) = \delta_0\,\alpha_0^{-1}(Q) = \tau(Q) \qquad \text{für } Q \in A\,,$$

im Falle $\nu > 0$: $$\delta_\nu(Q) = \begin{cases} \delta_\mathfrak{p}\,\alpha_\mathfrak{p}^{-1}(Q) & \text{für } Q \in \alpha_\mathfrak{p}(jA_\mathfrak{p}) \text{ und } \mathfrak{p} \in \Delta^\nu, \\ \delta_{\nu-1}\,\vartheta_{\nu-1}(Q) & \text{für } Q \in B^\nu\,. \end{cases}$$

Für $\nu = 0$ ist die Behauptung wegen $\alpha_0^{-1}(Q) = Q$ richtig. Die Behauptung sei nun schon für $0 \leqq \mu \leqq \nu - 1$ bewiesen. Durch $\delta_\mathfrak{p}\,\alpha_\mathfrak{p}^{-1}$ wird $\alpha_\mathfrak{p}(jA_\mathfrak{p})$ analytisch in H abgebildet, wenn $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{q}) \in \Delta^\nu$ ist. Es gilt

(16.109) $$B^\nu \cap \alpha_\mathfrak{p}(jA_\mathfrak{p}) = \alpha_\mathfrak{p}(jB_\mathfrak{p}) = \alpha_\mathfrak{p}\,\sigma_P(jA_\mathfrak{q}) = \sigma_{\nu-1}\,\alpha_\mathfrak{q}(jA_\mathfrak{q})\,.$$

Zu $Q \in B^\nu \cap \alpha_\mathfrak{p}(jA_\mathfrak{p})$ gibt es genau einen Punkt $R \in jA_\mathfrak{q}$ mit

(16.110) $$\alpha_\mathfrak{q}^{-1}\,\vartheta_{\nu-1}(Q) = \vartheta_P\,\alpha_\mathfrak{p}^{-1}(Q) = R\,,$$

(16.111) $$\sigma_{\nu-1}\,\alpha_\mathfrak{q}(R) = \alpha_\mathfrak{p}\,\sigma_P(R) = Q\,,$$

(16.112) $$\vartheta_{\nu-1}(Q) \in \alpha_\mathfrak{q}(jA_\mathfrak{q})\,.$$

Also ist

(16.113) $$\delta_\mathfrak{p}\,\alpha_\mathfrak{p}^{-1}(Q) = \delta_\mathfrak{p}\,\sigma_P(R) = \delta_\mathfrak{q}(R) = \delta_\mathfrak{q}\,\alpha_\mathfrak{q}^{-1}\,\vartheta_{\nu-1}(Q) = \delta_{\nu-1}\,\vartheta_{\nu-1}(Q)$$

für $Q \in B^\nu \cap \alpha_\mathfrak{p}(jA_\mathfrak{p})$. Da $N^\nu = H^\nu - B^\nu$ eine höchstens 2-dimensionale analytische Menge ist, wird $B^\nu \cup \bigcup_{\mathfrak{p}\in\Delta^\nu} \alpha_\mathfrak{p}(jA_\mathfrak{p}) = A^\nu$ durch

(16.114) $$\delta_\nu(Q) = \begin{cases} \delta_\mathfrak{p}\,\alpha_\mathfrak{p}^{-1}(Q) & \text{für } Q \in \alpha_\mathfrak{p}(jA_\mathfrak{p}) \text{ mit } \mathfrak{p} \in \Delta^\nu, \\ \delta_{\nu-1}\,\vartheta_{\nu-1}(Q) & \text{für } Q \in B^\nu \end{cases}$$

analytisch in H abgebildet. Damit ist der Induktionsbeweis geführt.

Angenommen, δ_ν ist in einem Punkt $Q_0 \in M^\nu$ regulär. Es ist $Q_0 \in \alpha_\mathfrak{p}(M_\mathfrak{p})$ für ein $\mathfrak{p} \in \Delta^\nu$ und $R_0 = \alpha_\mathfrak{p}^{-1}(Q_0) \in M_\mathfrak{p}$. Dann ist

(16.115) $$\delta_\mathfrak{p}(R) = \delta_\nu\,\alpha_\mathfrak{p}(R) \qquad \text{für } R \in jA_\mathfrak{p}$$

in R_0 regulär, was falsch ist. Also ist δ_ν in jedem Punkt von M^ν singulär. Die Behauptung A3 ist bewiesen.

A7: Die analytische Abbildung χ von F auf H ist durch Satz 15.1 gegeben. Für $Q \in C_0 = C^0$ ist $\chi(Q) = \delta_0\,\omega_0(Q)$. Die Behauptung A7 sei nun schon für alle μ mit $0 \leqq \mu \leqq \nu - 1$ bewiesen.

Für $Q \in C^{\nu-1} \subseteq C^\nu$ ist $\omega_\nu(Q) = \sigma_{\nu-1}\,\omega_{\nu-1}(Q) \in B^\nu$, also

$$\chi(Q) = \delta_{\nu-1}\,\omega_{\nu-1}(Q) = \delta_{\nu-1}\,v_{\nu-1}\,\sigma_{\nu-1}\,\omega_{\nu-1}(Q) = \delta_\nu\,\omega_\nu(Q)\,. \tag{16.116}$$

Für $Q \in C^\nu - C^{\nu-1} \subseteq \bigcup\limits_{\mathfrak{p}\in\Delta^\nu} C_{\mathfrak{p}}$ ist $Q \in C_{\mathfrak{p}}$ mit $\mathfrak{p} \in \Delta^\nu$, also

$$\chi(Q) = \delta_{\mathfrak{p}}\,\omega_{\mathfrak{p}}(Q) = \delta_{\mathfrak{p}}\,\alpha_{\mathfrak{p}}^{-1}\,\alpha_{\mathfrak{p}}\,\omega_{\mathfrak{p}}(Q) = \delta_\nu\,\omega_\nu(Q)\,, \tag{16.117}$$

womit A7 bewiesen ist.

Entsprechend werden die Behauptungen B bewiesen. Die Aussagen C ergeben sich unmittelbar aus Satz 15.1, w. z. b. w.

Zwischen Satz 16.3 und Satz 12.1 scheint ein Widerspruch zu bestehen. Während in Satz 12.1 nur endlich viele Mannigfaltigkeiten $H_1, \ldots, H_s$ bzw. $\underline{H}_1, \ldots, \underline{H}_s$ auftreten, erhält man in Satz 16.3 zwei unendliche Folgen von Mannigfaltigkeiten $H^1, H^2, \ldots$ bzw. $\underline{H}^1, \underline{H}^2, \ldots$. Jedoch bricht unter der Voraussetzung des Satzes 12.1 das Konstruktionsverfahren des Satzes 16.3 eben dadurch ab, daß die Mengen $M_s, M_{s+1}, \ldots$ bzw. $\underline{M}_s, \underline{M}_{s+1}, \ldots$ leer sind und $H_s = H_{s+1} = \cdots$ bzw. $\underline{H}_s = \underline{H}_{s+1} = \cdots$ ist. Man vergleiche hierzu die Definition des σ-Prozesses in der leeren Menge (nach dem Beweis von Satz 10.8 in Teil IV auf S. 160).

Ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ eine beiderseits offene und analytische Modifikation zwischen den komplexen Mannigfaltigkeiten G und H mit abzählbarer Basis der offenen Mengen, so gibt Satz 16.3 eine Verallgemeinerung des Satzes 11.1. Dann sind nämlich

$$\underline{M}^\nu = \emptyset\,, \quad \underline{H}^\nu = \underline{A}^\nu = H \qquad \text{für } \nu \geqq 0\,, \tag{16.118}$$

$$\underline{N}^\nu = \emptyset\,, \quad \underline{H}^\nu = \underline{B}^\nu = H \qquad \text{für } \nu \geqq 1\,, \tag{16.119}$$

d. h. der σ-Baum $\mathfrak{B}$ kann überhaupt wegfallen. Es ist

$$\chi(Q) = \pi(Q) \qquad \text{für } Q \in F \tag{16.120}$$

und

$$\underline{F} = H\,. \tag{16.121}$$

Ist aber die analytische Modifikation $\mathfrak{M}$ nicht beiderseits offen, so kann — auch wenn G und H eine abzählbare Basis der offenen Mengen haben — Satz 12.1 nicht zu einem Satz verallgemeinert werden, der Satz 16.3 entsprechen würde. Dies zeigte ja gerade das Gegenbeispiel am Anfang von § 13, das die Einführung des σ-Baumes veranlaßte.

(Eingegangen am 1. Februar 1955)

Ringel, G.
Math. Annalen, Bd. 130, S. 317—326 (1955)

Wie man die geschlossenen nichtorientierbaren Flächen in möglichst wenig Dreiecke zerlegen kann

Von
Gerhard Ringel in Bonn

Entsprechend dem allgemeinen Begriff der simplizialen Zerlegung eines n-dimensionalen Komplexes verstehen wir auch hier unter einer Dreieckszerlegung einer geschlossenen Fläche nur eine solche Zerlegung in lauter Dreiecke, bei der der Durchschnitt je zweier verschiedener Dreiecke entweder leer oder ein Eckpunkt oder eine Kante ist. Eine Dreieckszerlegung $\mathfrak{D}$ der geschlossenen Fläche $\mathfrak{F}$ heiße *minimal*, wenn die Anzahl der Dreiecke bei $\mathfrak{D}$ durch keine andere Dreieckszerlegung von $\mathfrak{F}$ unterboten werden kann. Für die Kugel ist z. B. das Tetraeder eine minimale Dreieckszerlegung. Das Ziel dieser Note ist die Bestimmung dieser Mindestanzahl der Dreiecke bei gegebener geschlossener Fläche. Im Falle der nichtorientierbaren Flächen gelingt uns der Nachweis einer expliziten Formel. Es wird gezeigt:

Für die Anzahl δ_q der Dreiecke in einer minimalen Dreieckszerlegung der geschlossenen nichtorientierbaren Fläche vom Geschlechte q gilt

$$\delta_q = 2\left[\sqrt{6q} + \frac{5}{2}\right] + 2q \qquad \textit{für } q \neq 2 \textit{ und } \neq 3, \tag{1}$$

$$\delta_2 = 16, \quad \delta_3 = 20.$$

Erheblich schwieriger ist die Untersuchung der Dreieckszerlegungen orientierbarer Flächen, für die vermutlich eine zu (1) analoge Formel gilt.

§ 1. Übergang zur dualen Fragestellung

Eine mehr als zwei Eckpunkte enthaltende polyedrische Zerlegung einer geschlossenen Fläche $\mathfrak{F}$ heiße *einfach*, wenn sie lauter dreikantige Eckpunkte (das sind Eckpunkte, die nur mit drei Kanten inzidieren), besitzt und je zwei Länder (= Polygone) höchstens längs einer Kante benachbart sind. Es sei $\mathfrak{L}$ der zu einer Dreieckszerlegung $\mathfrak{D}$ duale Komplex. Jedem Dreieck von $\mathfrak{D}$ entspricht also ein dreikantiger Eckpunkt von $\mathfrak{L}$. Zwei Dreiecke von $\mathfrak{D}$ mit zwei gemeinsamen Eckpunkten haben stets auch die diese Eckpunkte verbindende Kante gemeinsam. Das bedeutet, daß $\mathfrak{L}$ keine zwei Länder mit zwei gemeinsamen Kanten besitzt. $\mathfrak{L}$ ist also eine einfache Zerlegung von $\mathfrak{F}$. Auch umgekehrt ist jeder zu einer einfachen Zerlegung duale Komplex stets eine Dreieckszerlegung. Es sei δ die Anzahl der Dreiecke und λ die Anzahl der Eckpunkte in $\mathfrak{D}$; dann ist die Anzahl der Kanten in $\mathfrak{D}$ gleich $\frac{3\delta}{2}$, weil jedes Dreieck mit drei Kanten und jede Kante mit zwei Dreiecken inzidiert. Wenn N die Eulersche Charakteristik der betrachteten geschlossenen Fläche $\mathfrak{F}$ ist,

so ergibt sich aus der EULERschen Polyederformel $N = -\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2$ die Gleichung

$$\delta = 2N + 2\lambda. \tag{2}$$

Wir setzen nun zusätzlich voraus, daß $\mathfrak{D}$ eine minimale Dreieckszerlegung von $\mathfrak{F}$ ist. Dann ist die Zahl λ wegen (2) die kleinstmögliche Länderanzahl einer einfachen Länderzerlegung von $\mathfrak{F}$. An Stelle von δ suchen wir nun diese Ländermindestzahl λ zu bestimmen. Nach (2) ist sodann auch δ bekannt.

Die Anzahl der Kanten in $\mathfrak{L}$ ist höchstens gleich $\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}$, weil $\mathfrak{L}$ einfach ist. Wird auf $\mathfrak{L}$ die Eulersche Polyederformel angewandt, ergibt sich daher

$$N + \delta + \lambda \leqq \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}.$$

Wegen (2) folgt

$$6N + 6\lambda \leqq \lambda(\lambda-1),$$

$$\frac{7+\sqrt{49+24N}}{2} \leqq \lambda. \tag{3}$$

Wenn wir nun noch ausnützen, daß λ eine ganze Zahl ist, können wir die Abschätzung (3) in folgender Weise verschärfen. Wir behaupten, daß sogar

$$\left[\frac{9+\sqrt{48+24N}}{2}\right] \leqq \lambda \tag{4}$$

ist. Gälte das Gegenteil von (4), nämlich

$$\frac{9+\sqrt{48+24N}}{2} - 1 > \lambda,$$

so folgte aus (3) weiter

$$\frac{7+\sqrt{49+24N}}{2} \leqq \lambda < \frac{7+\sqrt{48+24N}}{2},$$

$$49 + 24N \leqq (2\lambda-7)^2 < 48 + 24N.$$

Das ist ein Widerspruch.

Wie können wir nun zeigen, daß für eine Fläche $\mathfrak{F}$ mit der Eulerschen Charakteristik N in (4) sogar das Gleichheitszeichen gültig ist? Dazu müssen wir eine einfache Länderzerlegung $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{F}$ mit genau

$$n = \left[\frac{9}{2} + \sqrt{12+6N}\right] \tag{5}$$

Ländern tatsächlich konstruieren. Wir nehmen an, es sei gelungen, ein solches $\mathfrak{Z}$ zu finden. Die Kantenanzahl α_1 von $\mathfrak{Z}$ sei gleich $\frac{n(n-1)}{2} - r$, wobei natürlich $r \geqq 0$ ist. Für die Eckpunktanzahl α_0 von $\mathfrak{Z}$ gilt $3\alpha_0 = 2\alpha_1$, weil in $\mathfrak{Z}$ nur lauter dreikantige Eckpunkte vorkommen und jede Kante mit zwei Eckpunkten inzidiert. Aus der Eulerschen Formel

$$N = -\frac{2}{3}\left(\frac{n(n-1)}{2} - r\right) + \frac{n(n-1)}{2} - r - n$$

für $\mathfrak{Z}$ folgt

$$N + 2 = \frac{(n-3)(n-4)}{6} - \frac{r}{3}. \tag{6}$$

Hieraus kann man ablesen:

(7) $\quad$ Falls $n \not\equiv 2 \pmod 3$ ist, gilt $r \equiv 0 \pmod 3$ und
falls $n \equiv 2 \pmod 3$ ist, gilt $r \equiv 1 \pmod 3$.

Aus (5) folgt $n \leq \frac{9}{2} + \sqrt{12 + 6N}$. Mit (6) ergibt sich $r \leq n - \frac{33}{8}$. Da r und n ganz sind, ist daher $r \leq n - 5$. Wegen (7) folgt sogar die noch schärfere Ungleichung

$$0 \leq r \leq n - 6. \tag{8}$$

Zu jeder Charakteristik N ist wegen der obigen Formeln das Zahlenpaar n, r stets (eindeutig) bestimmbar. Man kann auch umgekehrt nachrechnen, daß aus (6) und (8) die Gl. (5) folgt. Wir können also sagen: Dann und nur dann gilt in (4) das Gleichheitszeichen, wenn auf der betrachteten Fläche $\mathfrak{F}$ mit der Charakteristik N ein einfacher Länderkomplex $\mathfrak{Z}$ mit n Ländern und $\frac{n(n-1)}{2} - r$ Kanten existiert, wobei n und r durch (6) und (8) bestimmt sind.

Einen einfachen Länderkomplex mit n Ländern können wir durch ein Nummernschema beschreiben, indem wir die n Länder mit den Nummern 1, 2, ..., n bezeichnen und für jedes Land die zyklische Reihenfolge ihrer Nachbarländer notieren. Diese Darstellung durch ein Nummernschema ist in früheren Arbeiten des Verfassers ausführlich dargelegt. Für das folgende sind wir insbesondere genötigt, die genaue Kenntnis einer Arbeit[1]), die hier mit MN zitiert wird, vorauszusetzen. In Verallgemeinerung der dort benützten Schemata S_m, $S_m^{(-1)}$, $S_m^{(-3)}$ usw. bezeichnen wir ein Schema, das einen einfachen Länderkomplex mit n Ländern und $\frac{n(n-1)}{2} - r$ Kanten darstellt, mit Schema $S_n^{(-r)}$. Es kommt also darauf an, solche Schemata $S_n^{(-r)}$ zu konstruieren. In § 3 werden wir den Beweis liefern zu

Satz I. *Für $m = 9, 12, 15, \ldots$ existiert mindestens je ein nichtorientierbares Exemplar der $m - 3$ Schemata*

$$S_m^{(-m+6)}, \ldots, S_m^{(-6)}, S_m^{(-3)}, S_m,$$
$$S_{m+1}^{(-m+6)}, \ldots, S_{m+1}^{(-6)}, S_{m+1}^{(-3)}, S_{m+1},$$
$$S_{m+2}^{(-m+5)}, \ldots, S_{m+2}^{(-7)}, S_{m+2}^{(-4)}, S_{m+2}^{(-1)}.$$

Es sind dies genau alle Schemata $S_n^{(-r)}$ mit $n \geq 9$, für die (7) und (8) gilt. Daher folgt aus Satz I, daß für die nichtorientierbare geschlossene Fläche $\mathfrak{F}_q$ vom Geschlechte $q \geq 4$, die ja die Charakteristik $N = q - 2 \geq 2$ hat, in (4) tatsächlich das Gleichheitszeichen gilt. Wegen der Existenz eines nichtorientierbaren Schemas S_6 trifft das auch für $q = 1$ zu. Aus der Gültigkeit des Gleichheitszeichens in (4) folgt sodann wegen (2) die in der Einleitung behauptete Gl. (1). — Bevor wir den Beweis zu Satz I nachtragen, behandeln wir die beiden Ausnahmefälle $q = 2$ und $q = 3$. Mit λ_q bezeichnen wir die

---

[1]) G. RINGEL: Bestimmung der Maximalzahl der Nachbargebiete auf nichtorientierbaren Flächen. Math. Ann. 127, 181—214 (1954).

kleinste Länderanzahl, die durch eine einfache Länderzerlegung von $\mathfrak{F}_q$ realisiert werden kann.

§ 2. Die Fälle $q = 2$ und $q = 3$

Nachweis von $\delta_2 = 16$. Wir betrachten also die nichtorientierbare Fläche $\mathfrak{F}_2$ mit der Charakteristik 0. Wegen (4) ist $\lambda_2 \geqq 7$. Wenn $\lambda_2 = 7$ wäre, müßte ein einfacher Länderkomplex $\mathfrak{K}_7$ mit sieben Ländern auf $\mathfrak{F}_2$ existieren. Wegen der Eulerschen Formel ist die Kantenanzahl von $\mathfrak{K}_7$ gleich 21. Weil $\mathfrak{K}_7$ einfach ist, muß jedes Land zu jedem anderen benachbart sein. Also müßte dann ein nichtorientierbares Schema S_7 existieren, was aber nach früheren Ergebnissen[1]) nicht der Fall ist. Daher ist $\lambda_2 \geqq 8$. Das nichtorientierbare Schema

	1.	5	2	6	3	8	4	7
	2.	6	1	5	4	7	3	8
	3.	7	2	8	1	6	4	5
	4.	8	1	7	2	5	3	6
$(S_8^{(-4)})$	5.	1	2	4	3	7		
	6.	2	1	3	4	8		
	7.	3	2	4	1	5		
	8.	4	1	3	2	6		

stellt einen einfachen Länderkomplex auf $\mathfrak{F}_2$ dar. Daher ist $\lambda_2 = 8$. Wegen (2) folgt somit $\delta_2 = 16$.

Nachweis von $\delta_3 = 20$. Wegen (4) ist $\lambda_3 \geqq 8$. Wenn $\lambda_3 = 8$ wäre, müßte ein einfacher Länderkomplex $\mathfrak{K}_8$ mit 8 Ländern auf $\mathfrak{F}_3$ existieren. $\mathfrak{K}_8$ hat auf

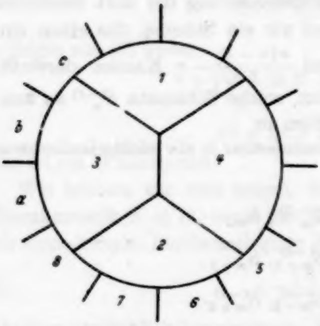

Fig. 1

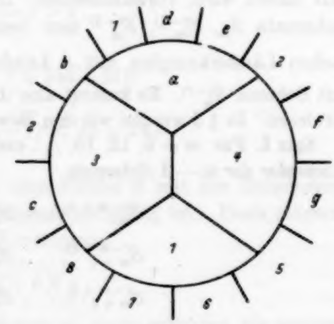

Fig. 2

Grund der Eulerschen Formel 27 Kanten. Es gibt aber im ganzen nur $\binom{8}{2} = 28$ Länderpaare. Weil $\mathfrak{K}_8$ einfach ist, sind also nur zwei Länder zueinander nicht benachbart, d. h. $\mathfrak{K}_8$ besteht aus 6 Siebenecken und 2 Sechsecken. Die 8 Länder von $\mathfrak{K}_8$ wollen wir mit den Nummern 1 bis 8 bezeichnen; davon seien 1 und 2 die beiden Sechsecke. Wir zeigen, daß $\mathfrak{K}_8$ und hiermit auch ein Schema $S_8^{(-1)}$ nicht existieren kann. Es werden einige Fälle unterschieden.

[1]) G. Ringel: Farbensatz für nichtorientierbare Flächen beliebigen Geschlechtes J. reine u. angew. Math. **190**, 129—147 (1952).

a) Es existiere in $\mathfrak{K}_8$ eine Kante, die von einem Eckpunkt eines Sechseckes zu einem Eckpunkt des anderen Sechseckes führt. Sodann gibt es in $\mathfrak{K}_8$ bei geeigneter Numerierung den durch Fig. 1 mitgeteilten Ausschnitt.

a 1) Bei $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$ würde das Land 6 zu einem Viereck.

a 2) Bei $a = 5$, $b = 7$, $c = 6$ folgte für die 6. Zeile des den Länderkomplex $\mathfrak{K}_8$ darstellenden Schemas $S_8^{(-1)}$:

6.	1	3	7	2	5	4	8	oder
6.	1	3	7	2	5	8	4.	

Dann müßte das Land 5 ein Dreieck werden oder 6 und 1 wären zweimal benachbart.

a 3) Bei $a = 6$, $b = 5$, $c = 7$ folgte für die 5. Zeile

5.	4	2	6	3	7	1	8	oder
5.	4	2	6	3	7	8	1.	

Es müßten sich dann die drei Länder 5, 7, 1 oder 5, 4, 1 in einem Eckpunkt treffen. Alsdann wäre das Land 1 zu 7 oder zu 4 zweimal benachbart.

a 4) Bei $a = 6$, $b = 7$, $c = 5$ folgte für die 7. Zeile

7.	5	3	6	2	8	1	4	oder
7.	5	3	6	2	8	4	1.	

Dann wäre 4 oder 1 zweimal zu 5 benachbart.

a 5) Bei $a = 7$ würde das Land 8 zum Dreieck.

b) Jetzt nehmen wir an, *daß in $\mathfrak{K}_8$ keine Kante existiert, welche von einem Eckpunkt des einen Sechseckes zu einem Eckpunkt des anderen Sechseckes führt.* In diesem Falle gibt es in $\mathfrak{K}_8$ den in Fig. 2 veranschaulichten Ausschnitt. Bis auf Spiegelung der ganzen Figur tritt das Sechseck 2 wirklich nur dort auf, wo es in Fig. 2 eingezeichnet ist, weil unter Berücksichtigung der Annahme b) das Land 2 zu den Ländern 3, 4 und $a \neq 2$ benachbart sein muß. Für die 1 als Nachbar von a bleibt sodann nur die eingezeichnete Möglichkeit.

b 1) Aus $a = 6$ folgte der Reihe nach $b = 7$, $c = 5$, $d = 5$, $e = 8$, $f = 7$, $g = 8$. Dann aber hätte die Kante zwischen 5 und 8 sogar drei Endpunkte.

b 2) Aus $a = 7$ folgte, weil die einzige Kante zwischen 1 und 7 in Fig. 2 zweimal gezeichnet erscheint, daß $b = 6$, $d = 8$, $c = 5$, $e = 5$ ist. Das Land 5 würde daher zum Viereck.

Die Annahme, daß ein $\mathfrak{K}_8$ existiert, führt also in allen denkbaren Fällen zum Widerspruch. Daher ist $\lambda_3 \neq 8$. Da ein nichtorientierbares Schema

	1.	7	9	8	6	3	5	2	4
	2.	8	7	9	4	1	5		
	3.	9	8	7	5	1	6		
	4.	1	2	9	6	8	5	7	
$(S_9^{(-6)})$	5.	2	1	3	7	4	8		
	6.	3	1	8	4	9			
	7.	4	5	3	8	2	9	1	
	8.	5	4	6	1	9	3	7	2
	9.	6	4	2	7	1	8	3	

vorhanden ist, gilt $\lambda_3 = 9$ und wegen (2) auch $\delta_3 = 20$.

§ 3. Der allgemeine Fall

Satz II. *Wenn wir in einem Schema $S_n^{(-r)}$ einen Ausschnitt von der Form*

b.	. . . *p d c a* . . . .
p.	. . *a c* . . . *b d* . .

finden können, so existiert auch ein Schema $S_n^{(-r-3)}$.

Beweis. Wegen der Regel R (MN, S. 184) lautet der genannte Ausschnitt ausführlicher

	a.	. . . . *p c b* . . . .
	b.	. . . *p d c a* . . . .
($S_n^{(-r)}$)	*p.*	. . *a c* . . . *b d* . .
	c.	. . . *p a b d* . . . .
	d.	. . . . *p b c* . . . .

Wir können durch

	a.	. . . . *p b* . . . .
	b.	. . . *p a* . . . .
($S_n^{(-r-3)}$)	*p.*	. . *a b* . . . *c d* . .
	c.	. . . *p d* . . . .
	d.	. . . . *p c* . . . .

ein neues Schema definieren. Wir erhalten dieses $S_n^{(-r-3)}$ aus $S_n^{(-r)}$, indem wir

die *a*-te	Zeile	durch	Entnahme	der	Zahl *c*,
„ *b*-te	„	„	„	„	Zahlen *d* und *c*,
„ *c*-te	„	„	„	„	Zahlen *a* und *b*,
„ *d*-te	„	„	„	„	Zahl *b*

verkürzen und in der *p*-ten Zeile das Zeilenstück von *c* bis *b* in seiner Reihenfolge umkehren. Wir können leicht verifizieren, daß in diesem so gewonnenen Schema $S_n^{(-r-3)}$ wieder die Regel R ausnahmslos gültig ist. Hiermit ist Satz II bewiesen.

Bemerkung 1: Anschaulich ist der Übergang von $S_n^{(-r-3)}$ zurück zu $S_n^{(-r)}$ gleichbedeutend mit der durch Fig. 1 der Arbeit MN dargestellten Einfügung einer Kreuzhaube. Daher ist ein Schema $S_n^{(-r)}$, das die Anwendung von Satz II gestattet, stets nicht orientierbar. — Die drei Länderpaare *bc*, *cd* und *db* sind in $S_n^{(-r)}$ benachbart, in $S_n^{(-r-3)}$ jedoch nicht.

Solche in Satz II gewünschte Ausschnitte lassen sich in allen Schemata, die mit Hilfe von Leitquadraten (MN, S. 187) konstruiert worden sind, leicht auffinden:

α) Kommt in einem Schema ein 3reihiges Leitquadrat vor, so enthält es wegen Regel R auch ein zugehöriges Rechteck A'' (MN, S. 190), d. h. bis auf die Numerierung den Ausschnitt

	4.	1	3	2		
(A')	5.	2	1	3		
	6.	3	2	1		
	1.	6	2	5	3	4
(A'')	2.	4	3	6	1	5
	3.	5	1	4	2	6

Hierin finden wir den gesuchten Ausschnitt

3.	.	1	4	2	6
1.	6	2	.	3	4

β) **Enthält ein Schema ein 4reihiges Leitquadrat, so hat es bis auf die Numerierung die Form**

$$\begin{array}{lccccccc}
5. & 3 & 4 & 2 & 1 & & & \\
6. & 4 & 3 & 1 & 2 & & & \\
7. & 1 & 4 & 2 & 3 & & & \\
8. & 2 & 3 & 1 & 4 & & & \\
1. & 5 & 2 & 6 & 3 & 8 & 4 & 7 \\
2. & 6 & 1 & 5 & 4 & 7 & 3 & 8 \\
3. & 7 & 2 & 8 & 1 & 6 & 4 & 5 \\
4. & 8 & 1 & 7 & 2 & 5 & 3 & 6
\end{array}$$

Hierin können die beiden Ausschnitte

$$\begin{array}{l}4.\ \ ..1\ \ 7\ \ 2\ \ 5\ \ \ldots \\ 1.\ \ ..5\ \ 2\ \ldots\ 4\ \ 7\ \ldots\end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l}3.\ \ ..2\ \ 8\ \ 1\ \ 6\ \ \ldots \\ 2.\ \ ..6\ \ 1\ \ldots\ 3\ \ 8\ \ldots\end{array}$$

gewählt werden. Wir können uns überzeugen, daß nach einmaliger Anwendung von Satz II bezüglich des ersten Ausschnitts der zweite Ausschnitt unberührt bleibt, so daß eine abermalige Anwendung von Satz II möglich ist.

γ) **Ein Schema, das ein nach MN (S. 189) konstruiertes Leitquadrat A mit ungerader Seitenlänge $n \geqq 5$ enthält, hat bis auf die Numerierung die Form**

$$\begin{array}{lccccccccccc}
n+1. & 1 & 3 & n-1 & \ldots & & & & & & & \\
n+2. & 2 & 4 & n & \ldots & & & & & & & \\
n+3. & 3 & 5 & 1 & \ldots & & & & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & & & & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & & & & & & & \\
2n. & n & 2 & n-2 & \ldots & & & & & & & \\
1. & n+1 & 3 & n+2 & 5 & n+3 & \ldots & n-1 & 2n & \ldots \\
2. & n+2 & 4 & n+3 & 6 & n+4 & \ldots & n & n+1 & \ldots \\
3. & n+3 & 5 & n+4 & 7 & n+5 & \ldots & 1 & n+2 & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots \\
n-1. & 2n-1 & 1 & 2n & 3 & n+1 & \ldots & n-3 & 2n-2 & \ldots \\
n. & 2n & 2 & n+1 & 4 & n+2 & \ldots & n-2 & 2n-1 & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots
\end{array}$$

Hierin können wir den Ausschnitt

$$(9) \qquad \begin{array}{l} n-1.\ \ .\ .\ \ 1\ \ \ 2n\ \ 3\ \ n+1\ \ldots\ldots\ldots \\ \quad 1.\ \ .\ .\ \ n+1\ \ 3\ \ \ldots\ \ldots\ \ n-1\ \ 2n\ \ .\ . \end{array}$$

finden und $n-1$ weitere solche Ausschnitte, die durch wiederholte Anwendung der Permutation $\lambda = (1\,2 \ldots n)$ auf alle Nummern von (9) entstehen. Hierbei sei $\lambda(n+i) = n + \lambda(i)$ gesetzt. Wir können uns überzeugen, daß sich bezüglich dieser n Ausschnitte ohne weiteres Satz II nacheinander n-mal anwenden läßt.

Die folgenden Sätze werden so numeriert, daß z. B. Satz III (8) eine Verallgemeinerung des Satzes 8 der Arbeit MN ist.

Satz III (8). ***Für jedes $n \not\equiv 2 \pmod 4$ existieren die Schemata***

$$S_{3n},\ S_{3n}^{(-3)},\ S_{3n}^{(-6)},\ \ldots,\ S_{3n}^{(-3n)}.$$

Beweis. Es sei $n = 2^r \cdot k$ mit k ungerade und $\geqq 3$ oder $k = 4$. Ein nach MN konstruiertes n-reihiges Leitquadrat enthält 2^r Exemplare k-reihiger Leitquadrate. Das zum Beweis von Satz 8 der Arbeit MN konstruierte Schema S_{3n} enthält also $2^r \cdot 3$ Leitquadrate, die k-reihig sind. Nach α), β) oder γ) können wir dann $[2^r \cdot 3(k-2)]$-mal, d. h. mindestens n-mal, den Satz II auf das Schema S_{3n} anwenden und gewinnen so nacheinander alle in Satz III angegebenen Schemata. Das Beispiel $S_9^{(-6)}$ beim Fall $q = 3$ ist übrigens auf diese Weise konstruiert. Die beiden folgenden Sätze erhalten wir analog.

Satz IV (10). *Für jedes $n \not\equiv 0 \pmod 4$ existieren die Schemata*

$$S_{3n+1},\ S_{3n+1}^{(-3)},\ S_{3n+1}^{(-6)}, \ldots,\ S_{3n+1}^{(-3n)}.$$

Satz V (11). *Für jedes $n \not\equiv 2 \pmod 4$ existieren die Schemata*

$$S_{3n+2}^{(-1)},\ S_{3n+2}^{(-4)},\ S_{3n+2}^{(-7)}, \ldots,\ S_{3n+2}^{(-3n-1)}.$$

Bemerkung 2: Bei ungeradem $n \geqq 5$ können wir speziell bei der obigen Konstruktion wegen γ) in S_{3n} bzw. S_{3n+1} bzw. $S_{3n+2}^{(-1)}$ nur diejenigen n Ausschnitte benützen, die einem einzigen der drei vorkommenden Leitquadrate entsprechen. Auch bei n-maliger Anwendung von Satz II bezüglich dieser n Ausschnitte bleiben in S_{3n} bzw. S_{3n+1} bzw. $S_{3n+2}^{(-1)}$ mindestens n Zeilen unberührt. Bei ungeradem $n \geqq 5$ können also alle Schemata der Sätze III, IV, V auch so gefunden werden, daß jedes dieser Schemata mindestens eine *volle Zeile* enthält, d. h. eine Zeile, die ein Land vertritt, das zu allen anderen Ländern benachbart ist.

Satz VI. *Für $r = 1, 2, \ldots$ existiert ein nichtorientierbares Schema $S_{12r+8}^{(-1)}$.*

Dieser Satz VI wird in der Habilitationsschrift[1]) des Verfassers bewiesen. Weil der Beweis sehr langwierig ist, wird er hier nicht wiedergegeben. In Satz 11 von MN wurde gezeigt, daß für jedes $t \not\equiv 2 \pmod 4$ ein nichtorientierbares Schema $S_{3t+2}^{(-1)}$ existiert. Zusammen mit Satz VI ergibt sich also

Satz VII. *Für jedes $n \equiv 1 \pmod 3$ mit $n \neq 7$ existiert ein Schema $S_{n+1}^{(-1)}$.*

In MN (S. 214) wurde der Beweis erbracht zu

Satz VIII. *Für jedes $n \not\equiv 1 \pmod 3$ existiert ein Schema S_{n+1}.*

Wenden wir auf diese beiden Sätze VII und VIII den Satz 12 von MN an, so erhalten wir

Satz IX. *Für jedes $n \not\equiv 0 \pmod 4$ läßt sich unter Benützung eines n-reihigen Leitquadrates entweder ein Schema S_{2n} oder ein Schema $S_{2n}^{(-1)}$ konstruieren.*

Satz X. *Für jedes $n \not\equiv 0 \pmod 4$ mit $n \geqq 7$ existieren die Schemata*

S_{2n}, $S_{2n}^{(-3)}$, $S_{2n}^{(-6)}, \ldots$, $S_{2n}^{(-3n)}$, *falls $n \not\equiv 1 \pmod 3$ ist und die Schemata* $S_{2n}^{(-1)}$, $S_{2n}^{(-4)}$, $S_{2n}^{(-7)}, \ldots$, $S_{2n}^{(-3n-1)}$, *falls $n \equiv 1 \pmod 3$ ist.*

Beweis. Unter dieser Voraussetzung ist entweder n ungerade und $\geqq 7$ oder $n = 2k$ mit ungeradem $k \geqq 5$. Der Satz II kann also nach γ) mindestens n-mal auf S_{2n} bzw. $S_{2n}^{(-1)}$ angewandt werden, womit Satz X bewiesen ist.

[1]) G. Ringel: Über polyedrische Zerlegungen geschlossener Flächen. Habilitationsschrift, Bonn Mai 1953 (s. S. 45).

Satz XI. *Es gibt für jedes $n \equiv 4 \pmod 6$ mit $n \geq 10$ die Schemata*

$$S_{2n}^{(-1)},\ S_{2n}^{(-4)},\ S_{2n}^{(-7)},\ldots,\ S_{2n}^{(-3n-1)}.$$

Beweis. Das erste in Satz XI angegebene Schema $S_{2n}^{(-1)}$ existiert nach Satz VI. Wir setzen $2n = 12s + 8 = 3t + 2$, wobei $t \equiv 2 \pmod 4$ wird mit $t \geq 6$. Beim Beweis von Satz 14 der Arbeit MN wurde für jedes $t \equiv 2 \pmod 4$ ein Schema $S_{3t+2}^{(-4)} = S_{2n}^{(-4)}$ konstruiert, das drei t-reihige Leitquadrate enthält. Es sei $t = 2k$ mit k ungerade. Da das Schema $S_{2n}^{(-4)}$ sechs k-reihige Leitquadrate enthält, können wir Satz II nach α) oder γ) mindestens $6(k-2)$-mal anwenden; hier genügt bereits $(n-1)$-mal.

Bemerkung 3: Wegen der Sätze X und XI gelten die beiden Sätze III und V sogar für jedes $n \geq 3$ ohne Restklassenbedingung.

Satz XII (16). *Wenn drei Schemata $S_{4r+1}^{(-f)}$, $S_{4r+1}^{(-g)}$, $S_{4r+1}^{(-h)}$ existieren, die je mindestens eine volle Zeile besitzen, so gibt es ein Schema $S_{12r+1}^{(-f-g-h)}$, das ebenfalls eine volle Zeile enthält.*

Dieser Satz folgt sofort aus dem Beweis zu Satz 16 der Arbeit MN, indem wir an Stelle der dort benützten drei Exemplare von S_{4r+1} die drei Schemata $S_{4r+1}^{(-f)}$, $S_{4r+1}^{(-g)}$, $S_{4r+1}^{(-h)}$ verwenden (vgl. die Fig. 2 in MN). Die volle Zeile des Schemas $S_{12r+1}^{(-f-g-h)}$ ist z. B. durch die dortige z-te Zeile gegeben.

Satz XIII (18). *Für $r = 1, 2, \ldots$ existieren die Schemata*

$$S_{12r+1},\ S_{12r+1}^{(-3)},\ S_{12r+1}^{(-6)},\ldots,\ S_{12r+1}^{(-12r)}.$$

Wir werden zeigen, daß jedes in Satz XIII aufgezählte Schema sogar so konstruiert werden kann, daß es eine volle Zeile enthält. Auch alle im folgenden Beweis zu Hilfe genommenen Schemata besitzen eine volle Zeile bzw. werden nach Bemerkung 2 so gewählt. Wir unterscheiden 3 Fälle je nach der Restklasse $r \pmod 3$.

a) Es sei r von der Form $r = 3s + 1$. Zunächst gibt es nach Satz 17 von MN ein Schema S_{12r+1}. Wir setzen $4r + 1 = 12s + 5 = 3n + 2$ mit $n \equiv 1 \pmod 4$. Wegen Satz V existieren die Schemata $S_{4r+1}^{(-1)}$, $S_{4r+1}^{(-4)}, \ldots$, $S_{4r+1}^{(-4r)}$. Wenden wir auf diese Schemata den Satz XII an, so erhalten wir die noch gesuchten Schemata $S_{12r+1}^{(-3)}$, $S_{12r+1}^{(-6)}, \ldots, S_{12r+1}^{(-12r)}$.

b) Falls $r = 3s + 2$ ist, setzen wir $4r + 1 = 12s + 9 = 3n$ mit $n \equiv 3 \pmod 4$. Nach Satz III existieren sodann die Schemata S_{4r+1}, $S_{4r+1}^{(-3)}, \ldots$, $S_{4r+1}^{(-4r-1)}$, mit deren Hilfe sich nach Satz XII auch die Schemata S_{12r+1}, $S_{12r+1}^{(-3)}, \ldots, S_{12r+1}^{(-12r)}$ konstruieren lassen.

c) Falls r durch 3 teilbar ist, wenden wir vollständige Induktion nach der größten in r aufgehenden Dreierpotenz an. Es sei $r = 3^p \cdot q$ mit $q \not\equiv 0 \pmod 3$ und $q \geq 1$. Der Induktionsanfang für $p = 0$ ist durch a) und b) für jedes q gegeben. Als Induktionsannahme sei für alle t von der Form $t = 3^{p-1} \cdot q$ die Existenz der Schemata S_{12t+1}, $S_{12t+1}^{(-3)}, \ldots, S_{12t+1}^{(-12t)}$ vorausgesetzt. Mit Satz XII gewinnen wir sofort auch die Schemata $S_{36t+1} = S_{12r+1}$, $S_{12r+1}^{(-3)}, \ldots$, $S_{12r+1}^{(-12r)}$. Hiermit ist Satz XIII bewiesen.

Aus den Sätzen III, IV, V, XIII sowie der Bemerkung 3 folgt die Existenz aller in Satz I gesuchten Schemata. Jedes Schema, das die Anwendung von Satz II gestattet, ist wegen der Bemerkung 1 nichtorientierbar. Daher sind z. B. die Schemata von Satz III bis auf das letzte sicher nichtorientierbar. Dieses letzte (auch das vorletzte) wird aber für den Beweis von Satz I gar nicht benötigt. Auf diese Weise sehen wir, daß alle zum Beweis von Satz I konstruierten Schemata tatsächlich nichtorientierbar sind.

(Eingegangen am 19. April 1955)

UNKELBACH, H.
Math. Annalen, Bd. 130, S. 327—336 (1955)

Geometrie und konforme Abbildung verallgemeinerter Kreisbogenpolygone. II

Von

HELMUT UNKELBACH in Bonn

Die vorliegende Untersuchung knüpft an die beiden Arbeiten an:

1. „Die konforme Abbildung echter Polygone", Math. Ann. 125, 82—118 (1952), nachstehend zitiert mit „U. 1".

2. „Geometrie und konforme Abbildung verallgemeinerter Kreisbogenpolygone. I", Math. Ann. 129, 391—414 (1955), nachstehend zitiert mit „U. 2".

In der Arbeit U. 2 wird u. a. die Frage beantwortet, wie bei den verallgemeinerten Kreisbogenpolygonen $\mathfrak{Q}$ die Ordnungen k_ν und die Arten l_ν der Ecken E_ν in den Abbildungsfunktionen zum Ausdruck kommen[1]). Für die Winkel der Ecken ist diese Frage bisher in U. 1 nur für die echten geradlinigen Polygone behandelt, während sie im übrigen noch offen ist. Die vorliegende Arbeit liefert einen Beitrag zur Lösung der Frage. Hierbei sind noch die geometrischen Fragen zu beantworten, wie sich die Winkeldefinition auf die verallgemeinerten Ecken E_ν von U. 2 in sinnvoller Weise ausdehnen läßt und ob eine solche Ausdehnung in allen Fällen überhaupt möglich ist.

Bezüglich der letzteren Frage führen die vorliegenden Untersuchungen zu der Vermutung, daß sie negativ zu beantworten ist, und zwar im folgenden Sinne: Nur Ecken gerader Ordnung besitzen Winkel, und zwar Ecken 1. Art reelle Winkel, Ecken 2. Art rein imaginäre Winkel; dagegen ist für Ecken ungerader Ordnung eine sinnvolle Winkeldefinition nicht möglich (oder nur in dem Sinne möglich, daß für alle Ecken einer bestimmten ungeraden Ordnung der Winkel einen festen Betrag hat).

In der vorliegenden Arbeit werden die Winkel zunächst für die Fälle $k_\nu = 2$, $l_\nu = 2$ und für beliebiges geradzahliges k_ν mit $l_\nu = 1$ definiert (für $k_\nu = 2$, $l_\nu = 1$ gilt die geläufige Winkeldefinition). Es wird gezeigt, daß die betreffenden Definitionen „natürliche" Verallgemeinerungen oder Modifikationen der gewöhnlichen Definitionen und der Definitionen von U. 1 sind.

---

[1]) Wo in dieser Arbeit ohne weiteren Zusatz von der Ordnung k_ν und der Art l_ν einer Ecke E_ν die Rede ist, werden diese Begriffe im Sinne von U. 2 gebraucht. Wo sie im Sinne von U. 1 gebraucht werden, ist die Ordnung mit k'_ν und die Art mit l'_ν bezeichnet. Die nach U. 1 definierten Winkel bezeichnen wir hier mit w'_ν.

Im Falle $k_\nu = 2$, $l_\nu = 2$ ergeben sich rein imaginäre Winkel im Sinne der analytischen Geometrie. Bei der konformen Abbildung ist folgendes bemerkenswert: Wir betrachten z. B. ein Kreisbogendreieck, dessen Rand aus drei getrennt liegenden, unendlich vielblättrigen Vollkreisen besteht (für die drei Ecken ist $k_\nu = 2$, $l_\nu = 2$; vgl. die Arbeit U. 2, § 1). Für dieses Dreieck gelten unverändert die bekannten Schwarzschen Differentialgleichungen für die Abbildungsfunktionen von Kreisbogendreiecken[2]), wobei lediglich statt der reellen Winkel (in der dortigen Bezeichnung $\lambda\pi$, $\mu\pi$ und $\nu\pi$) die imaginären Winkel einzusetzen sind.

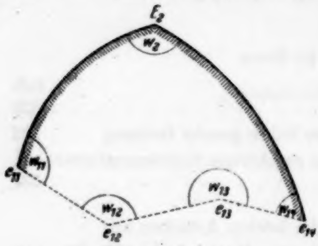

Fig. 1

Im Falle $l_\nu = 1$, $k_\nu = 4, 6, 8, \ldots$ besteht der Winkel aus einer alternierenden Summe gewöhnlicher Winkel (Definition IV). Zur Veranschaulichung dient das Zweieck in der Figur mit $k_1 = 8$, $l_1 = 1$ und $k_2 = 2$, $l_2 = 1$. Der (eigentliche) Rand des Zweiecks besteht aus den schraffierten Ufern der beiden Kreisbogen und aus den isolierten Punkten e_{12} und e_{13}. Die Ecke E_1 besitzt die eigentlichen Elemente e_{11}, e_{12}, e_{13} und e_{14} und den Winkel $w_1 = w_{11} - w_{12} + w_{13} - w_{14}$.

Das Hauptergebnis dieser Arbeit besteht nun darin, daß gewisse einfache Beziehungen angegeben werden zwischen den Winkeln w_ν und bestimmten rationalen Funktionen der Koeffizienten $a_{\nu\mu}$ in Hauptsatz 5 der Arbeit U. 2. Setzen wir zur Abkürzung $w_\nu = \alpha_\nu \pi$, dann gilt

$$a_{\nu,2} = \frac{1-\alpha_\nu^2}{2} \quad \text{für } k_\nu = 2,\ l_\nu = 1 \text{ und } l_\nu = 2$$

$$\frac{a_{\nu,3}^2}{a_{\nu,4}} = -2\,\alpha_\nu^2 \quad \text{für } k_\nu = 4,\ l_\nu = 1$$

$$\frac{1}{a_{\nu,6}^3} \cdot (a_{\nu,5}^2 - 4\,a_{\nu,4}\,a_{\nu,6})^2 = -32\,\alpha_\nu^2 \quad \text{für } k_\nu = 6,\ l_\nu = 1\,.$$

Diese Gleichungen werden unter einer einschränkenden Voraussetzung (Satz 3) bewiesen. Es wird gezeigt, daß die Größen auf den linken Seiten Invarianten kongruenter Winkel sind, und zwar auch für $l_\nu = 2$ und ohne die einschränkende Voraussetzung von Satz 3 (vgl. Satz 2).

Die Ausdehnung der Sätze auf beliebiges gerades k_ν bleibt zunächst noch offen; ebenso der Beweis, daß es für kein ungerades k_ν eine entsprechende Invariante gibt.

§ 1. Definition der Winkel

Bei der Definition der Winkel $w_\nu = \alpha_\nu \pi$ von Ecken E_ν gerader Ordnung beschränken wir uns zunächst auf die folgenden beiden Fälle:

a) $k_\nu = 2$; $l_\nu = 2$,

b) k_ν beliebig geradzahlig, $l_\nu = 1$.

---

[2]) C. CARATHÉODORY: Funktionentheorie II, S. 121.

a) Ecken von 2. Ordnung und 2. Art

Wird die Ecke E_ν charakterisiert durch $k_\nu = 2$ und $l_\nu = 2$, dann gehören die Polygonseiten $s_{\nu-1}$ und s_ν zu getrennt liegenden Kreisen. Betrachten wir diese vom Standpunkt der analytischen Geometrie, dann besitzen sie im Endlichen zwei imaginäre Schnittpunkte und in diesen je zwei imaginäre Tangenten. Die beiden Tangenten eines Schnittpunktes bilden einen imaginären Winkel, und es liegt nahe, diesen als Winkel der Ecke E_ν zu definieren. Wir gelangen daher zu der nachstehenden

Definition I: Für eine Ecke E_ν mit $k_\nu = 2$ und $l_\nu = 2$ ist w_ν der rein imaginäre Winkel (mit positivem Imaginärteil), den die Kreise der Seiten $s_{\nu-1}$ und s_ν (vom Standpunkt der analytischen Geometrie betrachtet) miteinander bilden.

Bringen wir das Polygon $\mathfrak{Q}$ durch eine lineare Transformation in eine Lage, daß weder $s_{\nu-1}$ noch s_ν geradlinig ist, dann ergibt die Rechnung für w_ν folgendes:

Bezeichnen wir die Radien der beiden Kreise von $s_{\nu-1}$ und s_ν mit $r_{\nu-1}$ und r_ν und den Abstand der beiden Kreismittelpunkte mit d_ν, dann gilt

$$\cos w_\nu = \frac{r_{\nu-1}^2 + r_\nu^2 - d_\nu^2}{2 r_{\nu-1} r_\nu}.$$

Diese Formel wird besonders einfach, wenn wir unsere lineare Transformation so wählen, daß die beiden Kreise konzentrisch werden ($d_\nu = 0$). Dabei können wir noch erreichen, daß $r_{\nu-1} = 1$ wird. Dann ist

$$\cos w_\nu = \frac{1 + r_\nu^2}{2 r_\nu},$$

und eine einfache Umformung ergibt

$$w_\nu = i \cdot \log \frac{1}{r_\nu}. \tag{1}$$

Auch für Winkel 2. Art und beliebiger gerader Ordnung lassen sich, wie in einer späteren Arbeit gezeigt wird, rein imaginäre Winkel definieren.

b) Ecken von beliebiger gerader Ordnung und 1. Art

Bei der Definition der betreffenden Winkel kommt es darauf an, bestimmte Forderungen zu erfüllen, so daß die Definition als naturgemäße Verallgemeinerung der Winkeldefinition für gewöhnliche Kreisbogendreiecke erscheint. Hierzu ist zunächst die Kongruenz von Ecken E_ν zu definieren. Dies kann rein geometrisch geschehen, indem man E_ν durch gewöhnliche Ecken approximiert. Jedoch ist eine funktionentheoretische Formulierung im Anschluß an die Arbeit U. 2 einfacher, und zwar gemäß der folgenden

Definition II: Das Polygon $\mathfrak{Q}$ bzw. $\mathfrak{Q}^*$ möge durch die Funktion $z = f(\zeta)$ bzw. $z = f^*(\zeta_*)$ so auf die obere ζ-Halbebene bzw. ζ_*-Halbebene abgebildet werden, daß die Ecke E_ν bzw. E_ν^* dem Punkt $\zeta = 0$ bzw. $\zeta_* = 0$ entspricht. Dann heißen die Ecken E_ν und E_ν^* kongruent, wenn sie durch lineare Transformationen in eine solche Lage gebracht werden können, daß die Funktion

$$\zeta_* = \overline{f^*}(f(\zeta)) \equiv g(\zeta) \tag{1a}$$

in einer gewissen Umgebung von $\zeta = 0$ regulär und umkehrbar eindeutig ist und innerhalb dieser Umgebung die Halbachse $\zeta > 0$ auf die Halbachse $\zeta_* > 0$ abbildet. Dabei wird mit $\zeta_* = \overline{f^*}(z)$ die Umkehrfunktion von $z = f^*(\zeta_*)$ bezeichnet.

An diese Definition knüpfen wir an bei der folgenden

Forderung A: Zwei kongruente Ecken E_ν und E_ν^* sollen denselben Winkel $w_\nu = w_\nu^*$ besitzen. Daraus folgt insbesondere, daß w_ν gegenüber linearen Transformationen invariant ist.

Außerdem ist es erforderlich, den Zusammenhang mit der entsprechenden Definition in der Arbeit U. 1 herzustellen. Man wird zwar keine vollständige Übereinstimmung der Definitionen für den Spezialfall der echten Polygone $\mathfrak{P}$ verlangen können; denn bereits bei den gewöhnlichen Ecken zeigen sich Abweichungen im Vorzeichen entsprechend der Gleichung

$$w_\nu = (-1)^{l'_\nu - 1} w'_\nu, \tag{2a}$$

wobei die gestrichenen Größen den Definitionen der Arbeit U. 1 entsprechen. Außerdem zeigt sich für außergewöhnliche Ecken, daß sich gewisse Differenzen zwischen $|w_\nu|$ und $|w'_\nu|$ nicht vermeiden lassen. Dabei kann man es allerdings so einrichten, daß diese Differenzen nur von k'_ν und l'_ν, nicht aber von w'_ν abhängen. In diesem Zusammenhang ist noch zu berücksichtigen, daß sich die Definition der Winkel w'_ν in U. 1 nicht nur auf die echten Polygone $\mathfrak{P}$ anwenden läßt, sondern auf alle *echten Ecken* der Polygone $\mathfrak{Q}$. Darunter verstehen wir diejenigen Ecken E_ν, die durch eine lineare Transformation in eine Lage gebracht werden können, so daß die Seiten $s_{\nu-1}$ und s_ν geradlinig werden und daß von zwei aufeinanderfolgenden Elementen von E_ν *eines* über dem Punkt $z = \infty$ liegt; nach Durchführung einer solchen linearen Transformation sagen wir, daß sich die echte Ecke E_ν in einer Normallage befindet. Daraus ergibt sich die folgende

Forderung B: Bei den echten Ecken soll zwischen dem Winkel w_ν und dem gemäß U. 1 für eine Normallage definierten Winkel w'_ν eine Gleichung

$$w_\nu = (-1)^{l'_\nu - 1} w'_\nu + C \tag{2b}$$

bestehen, wo C höchstens von k'_ν und l'_ν, nicht aber von w'_ν abhängt.

Zu einer weiteren Forderung werden wir dadurch geführt, daß wir das Polygon $\mathfrak{Q}$ durch eine Folge gewöhnlicher Teilpolygone $\mathfrak{S}_\mu$ von $\mathfrak{Q}$ approximieren, wobei die Ecke E_ν von $\mathfrak{Q}$ durch ein „Zusammenrücken" gewöhnlicher Ecken $E_{\nu,\lambda}^{(\mu)}$ erzeugt wird. Hierbei sollen die Ecken $E_{\nu,\lambda}^{(\mu)}$ im Gegensatz zu U. 2, Satz 2[3]) nicht von der 1. Ordnung, sondern von der 2. Ordnung gewählt werden, da ihre Winkel sonst für die Ecke E_ν nicht charakteristisch sein könnten. Die Ecken $E_{\nu,\lambda}^{(\mu)}$, deren Winkel wir mit $w_{\nu,\lambda}^{(\mu)}$ bezeichnen, sollen mit den eigentlichen Elementen $e_{\nu,\lambda}$, $\lambda = 1, 2, \ldots, \frac{k_\nu}{2}$ der Ecke E_ν zusammenfallen. Falls nun für den Komplex aufeinanderfolgender Ecken $E_{\nu,\lambda}^{(\mu)}$, $\lambda = 1, 2, \ldots, \frac{k_\nu}{2}$ ein Komplexwinkel

$$W_\nu = W(w_{\nu,1}^{(\mu)}, w_{\nu,2}^{(\mu)}, \ldots, w_{\nu,m}^{(\mu)}), \qquad m = \frac{k_\nu}{2} \tag{3}$$

so definiert werden kann, daß W_ν von der unter den obigen Bedingungen getroffenen Wahl der Folge $\mathfrak{S}_\mu$ und von μ völlig unabhängig ist, dann erscheint

[3]) $\mathfrak{S}_\mu$ hat hier eine andere Bedeutung als dort.

es sinnvoll, $w_\nu = W_\nu$ zu setzen, wenn für W_ν noch die Forderungen A und B erfüllt sind. Wir gelangen so zu der nachstehenden

Forderung C: Der Winkel w_ν von E_ν soll als ein Komplexwinkel W_ν des Eckenkomplexes $E_{\nu,\lambda}^{(\mu)}$, $\lambda = 1, 2, \ldots, m$ gemäß (3) *definiert werden können, der von der Wahl der Folge $\mathfrak{G}_\mu$ und von μ völlig unabhängig ist.*

Zu einer vierten Forderung gelangen wir durch die Betrachtung symmetrischer Polygonecken, die geometrisch und funktionentheoretisch von Interesse sind. Hierfür gilt die folgende

Definition III: Wir bezeichnen eine Ecke E_ν von $\mathfrak{Q}$ als symmetrisch, wenn auf $\mathfrak{Q}$ ein Kreisbogen $\mathfrak{k}_\nu^{(s)}$ mit folgenden Eigenschaften existiert:

a) $\mathfrak{Q}$ geht durch Spiegelung an $\mathfrak{k}_\nu^{(s)}$ in sich selbst über;

b) ein (eigentliches oder uneigentliches) Element von E_ν ist Endpunkt[4]*) von $\mathfrak{k}_\nu^{(s)}$.*

Von den beiden symmetrischen Hälften, in welche $\mathfrak{Q}$ durch $\mathfrak{k}_\nu^{(s)}$ geteilt wird, bezeichnen wir diejenige, welche die Seite $s_{\nu-1}$ enthält, mit $\mathfrak{Q}^{(s)}$. Zu dem Polygon $\mathfrak{Q}^{(s)}$ gehört eine „Hälfte" $E_\nu^{(s)}$ der Ecke E_ν, welche von den Seiten $s_{\nu-1}$ und $\mathfrak{k}_\nu^{(s)}$ gebildet wird. $E_\nu^{(s)}$ ist dann ebenso wie E_ν von der 1. Art. Bezeichnen wir den Winkel von $E_\nu^{(s)}$ mit $w_\nu^{(s)}$, dann erscheint es sinnvoll, folgendes zu verlangen:

Forderung D: Ist $E_\nu^{(s)}$ von gerader Ordnung, dann soll gelten:

$$w_\nu^{(s)} = \frac{1}{2} w_\nu . \tag{4}$$

Auf Grund der vorstehenden Forderungen gelangen wir nun zu der folgenden Definition und dem anschließenden Satz:

Definition IV: $$w_\nu = \sum_{\lambda=1}^{m} (-1)^{\lambda-1} w_{\nu,\lambda}^{(\mu)} .$$

Satz 1: w_ν erfüllt die Forderungen A bis D und ist von μ unabhängig. Gemäß Forderung B gilt für echte Ecken E_ν:

$$w_\nu = (-1)^{l'_\nu-1}[w'_\nu + (k'_\nu - 1)\pi] . \tag{2}$$

Anmerkung zu Satz 1: Eine weitere Rechtfertigung für Definition IV wird sich aus den in §§ 2 und 3 betrachteten Invarianten kongruenter Ecken ergeben.

Beweis von Satz 1: Zunächst erkennt man, daß zwei Ecken E und E^* von derselben Ordnung und Art sind, wenn sie kongruent sind. Wir betrachten dann zu E und E^* zwei approximierende Polygonfolgen $\mathfrak{G}_\mu$ und $\mathfrak{G}_\mu^*$, wie sie der Forderung C zugrunde liegen. Sind die Ecken E und E^* kongruent, dann kann man die Folgen so wählen, daß $\mathfrak{G}_\mu$ und $\mathfrak{G}_\mu^*$ in einer „Umgebung" von E bzw. E^* kongruent sind. Daraus ergibt sich ohne weiteres, daß die Forderung A erfüllt ist.

Zum Nachweis, daß auch die Forderung B erfüllt ist, bringen wir zunächst die echte Ecke E_ν in eine „Normallage". Dann gibt es ein beschränktartiges geradliniges n-Eck ${}^n\mathfrak{P}_\nu$, dessen eine Ecke ${}^{(1)}E_\nu$ sich in einer gewissen

[4]) Vgl. U. 2, Definitionen IX und XIIa.

„Umgebung" von E_ν mit E_ν deckt. Wir können dann die Polygone $\mathfrak{G}_\mu$ in einer „Umgebung" von E_ν alle geradlinig wählen und können für $\mathfrak{G}_1$ die Winkel $w_{\nu,\lambda}^{(1)}$ der Ecken $E_{\nu,\lambda}^{(1)}$ den folgenden Bedingungen unterwerfen (wir wollen hierbei die Punkte $E_{\nu,\lambda}^{(1)}$, die mit den Elementen der Ecke E_ν zusammenfallen, entgegen unserer sonstigen Terminologie auch in denjenigen Fällen als „Ecken" bezeichnen, in welchen $w_{\nu,\lambda}^{(1)} = \pi$ ist):

$w_{\nu,\lambda}^{(1)} = \pi$ für diejenigen $E_{\nu,\lambda}^{(1)}$, die mit nicht-isolierten endlichen Elementen von E_ν zusammenfallen,

$w_{\nu,\lambda}^{(1)} = 0$ für diejenigen $E_{\nu,\lambda}^{(1)}$, die mit unendlich fernen Elementen von E_ν zusammenfallen.

Dann ergibt sich (2) aus Definition IV auf Grund einer elementargeometrischen Betrachtung, wobei die Tatsache benutzt wird, daß in dem beschränktartigen n-Eck ${}^n\mathfrak{P}_\nu$ die Summe der Winkel gleich $(n-2)\,\pi$ ist.

Daß auch die Forderungen C und D erfüllt sind, folgt aus einfachen geometrischen Überlegungen. Aus der Konstruktion der Polygone $\mathfrak{G}_\mu$ ergibt sich insbesondere, daß w_ν von μ unabhängig ist.

§ 2. Funktionentheoretische Invarianten kongruenter Ecken gerader Ordnung

Wir knüpfen nun an Hauptsatz 5 der Arbeit U. 2 und an die dortige Bezeichnung an und wollen fragen, welche gemeinsamen Merkmale die Abbildungsfunktionen im Falle kongruenter Ecken besitzen. Einen Beitrag zur Beantwortung dieser Frage liefert der folgende

Satz 2: Für kongruente Ecken E_ν sind die folgenden Größen invariant:

(5a) $$R_{\nu,2} \equiv a_{\nu,2} \qquad \text{für } k_\nu = 2$$

(5b) $$R_{\nu,4} \equiv \frac{a_{\nu,3}^2}{a_{\nu,4}} \qquad \text{für } k_\nu = 4$$

(5c) $$R_{\nu,6} \equiv \frac{1}{a_{\nu,6}^3}\,(a_{\nu,5}^2 - 4\,a_{\nu,4}\,a_{\nu,6})^2 \qquad \text{für } k_\nu = 6.$$

Beweis: Aus (1a) folgt

(6) $$\{f(\zeta), \zeta\} = [g'(\zeta)]^2 \cdot \{f^*(\zeta_*), \zeta_*\} + \{g(\zeta), \zeta\}.$$

Wir setzen ohne Beschränkung der Allgemeinheit: $\nu = 1$, $\nu^* = 1$, $\varkappa_1 = 0$, $\varkappa_1^* = 0$ und lassen in den Bezeichnungen von Hauptsatz 5 die Indizes $\nu = 1$ weg. Dann ist

$$\{f(\zeta), \zeta\} = \frac{a_k}{\zeta^k} + \frac{a_{k-1}}{\zeta^{k-1}} + \cdots + \frac{a_1}{\zeta} + \sum_{\nu=0}^{\infty} {}^0a_\nu\, \zeta^\nu.$$

Außerdem setzen wir

$$\{f^*(\zeta_*), \zeta_*\} = \frac{b_k}{\zeta_*^k} + \frac{b_{k-1}}{\zeta_*^{k-1}} + \cdots + \frac{b_1}{\zeta_*} + \sum_{\nu=0}^{\infty} {}^0b_\nu\, \zeta_*^\nu$$

$$\zeta_* = g(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu\, \zeta^\nu; \quad [g'(\zeta)]^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu\, \zeta^\nu; \quad \{g(\zeta), \zeta\} = \sum_{\nu=0}^{\infty} e_\nu\, \zeta^\nu$$

$$d_0 = c_1^2 \neq 0; \quad d_1 = 4\,c_1 c_2; \quad d_2 = 4\,c_2^2 + 6\,c_1 c_3; \ldots$$

Setzt man diese Reihen in (6) ein, dann ergibt sich für $k = 2$ durch Koeffizientenvergleich:

$$a_2 = d_0 \frac{b_2}{c_1^2} = b_2 ,$$

womit (5a) bewiesen ist.

Für $k = 4$ gilt:

$$\frac{a_4}{\zeta^4} + \frac{a_3}{\zeta^3} + \cdots$$

$$= [d_0 + d_1 \zeta + \cdots] \cdot \left[\frac{b_4}{(c_1 \zeta + c_2 \zeta^2 + \ldots)^4} + \frac{b_3}{(c_1 \zeta + c_2 \zeta^2 + \ldots)^3} + \cdots\right] + \sum_{\nu=0}^{\infty} e_\nu \zeta^\nu .$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man:

$$a_4 = d_0 \frac{b_4}{c_1^4}, \quad \text{d. h. } c_1^2 a_4 = b_4$$

$$4 c_1^3 c_2 a_4 + c_1^4 a_3 = b_1 b_4 + d_0 c_1 b_3$$

$$4 c_1 c_2 b_4 + c_1^4 a_3 = 4 c_1 c_2 b_4 + c_1^3 b_3$$

$$c_1 a_3 = b_3, \quad \text{d. h. } c_1^2 a_3^2 = b_3^2,$$

$$\text{also } \frac{a_3^2}{a_4} = \frac{b_3^2}{b_4},$$

womit (5b) bewiesen ist.

Für $k = 6$ führt ein analoger Koeffizientenvergleich zu dem Ergebnis:

$$b_6 = c_1^4 a_6 ,$$

$$b_5 = 2 c_1^2 c_2 a_6 + c_1^3 a_5 ,$$

$$b_4 = c_2^2 a_6 + c_1 c_2 a_5 + c_1^2 a_4 ,$$

und daraus folgt

$$\frac{1}{b_6^3} (b_5^2 - 4 b_4 b_6)^2 = \frac{1}{a_6^3} (a_5^2 - 4 a_4 a_6)^2 ,$$

womit auch (5c) bewiesen ist.

§ 3. Zusammenhänge zwischen den Winkeln und den zugehörigen funktionentheoretischen Invarianten

Zwischen den funktionentheoretischen Invarianten der Ecken gerader Ordnung und den Winkeln dieser Ecken bestehen einfache Zusammenhänge. Für die in § 1 definierten Winkel gilt folgendes (wenn wir wieder $w_\nu = \alpha_\nu \pi$ setzen):

Satz 3:

(7a) $$\alpha_\nu = \sqrt{1 - 2 R_{\nu,2}} \qquad \text{für } k_\nu = 2$$

(7b) $$\alpha_\nu = \sqrt{-\frac{R_{\nu,4}}{2}} \qquad \text{für } k_\nu = 4,\ l_\nu = 1$$

(7c) $$\alpha_\nu = \sqrt{-\frac{R_{\nu,6}}{32}} \qquad \text{für } k_\nu = 6,\ l_\nu = 1.$$

Die beiden letzteren Gleichungen gelten unter der Voraussetzung, daß die zu E_ν gehörigen Polygonseiten $s_{\nu-1}$ und s_ν auf Kreisen liegen, die im Sinne der analytischen Geometrie reelle Schnittpunkte besitzen.

Beweis: Die Gl. (7a) ist für $l_\nu = 1$ bekannt. Für $l_\nu = 2$ folgert man (7a) aus der Arbeit U. 2, dortige Gl. (12), und aus der Gl. (1) und aus (5a) der vorliegenden Arbeit.

Den Beweis der Gl. (7b) führen wir zunächst für den Spezialfall, daß die betreffende Ecke 4. Ordnung E_ν einem Zweieck ${}^2\mathfrak{Q}$ angehört ($\nu = 1$) und daß E_2 eine gewöhnliche Ecke ist. Dann besteht eine Folge $\mathfrak{G}_\mu$, wie sie der „Forderung C" zugrunde liegt, aus lauter gewöhnlichen Dreiecken. Die Ecke E_1 wird durch „Zusammenrücken" der beiden Ecken $E_{1,1}^{(\mu)}$ und $E_{1,2}^{(\mu)}$ erzeugt. Der von μ unabhängige Komplexwinkel dieser Ecken ist nach Definition IV

$$W_1 = w_{1,1}^{(\mu)} - w_{1,2}^{(\mu)}.$$

Wir setzen zur Abkürzung und Vereinfachung

$$\pi\,\varphi = \pi\cdot\varphi(\mu) = w_{1,1}^{(\mu)};\quad \pi\,\chi = \pi\cdot\chi(\mu) = w_{1,2}^{(\mu)};\quad \pi\,\beta = w_2$$
$$\varkappa_{1,1}^{(\mu)} = 0;\quad \varkappa_{1,2}^{(\mu)} = \varkappa = \varkappa(\mu) > 0;\quad \varkappa_2 = \infty.$$

Dann gilt für die Abbildungsfunktionen $f_\mu(\zeta)$ der Dreiecke $\mathfrak{G}_\nu$:

$$\{f_\mu(\zeta),\zeta\} = \frac{1-\varphi^2}{2\,\zeta^2} + \frac{{}^{(\mu)}A_1}{\zeta} + \frac{1-\chi^2}{2\,(\zeta-\varkappa)^2} + \frac{{}^{(\mu)}A_2}{\zeta-\varkappa}$$
$$= \frac{{}^{(\mu)}B_4 + {}^{(\mu)}B_3\,\zeta + {}^{(\mu)}B_2\,\zeta^2 + {}^{(\mu)}B_1\,\zeta^3}{\zeta^2(\zeta-\varkappa)^2}$$

$$\lim_{\mu\to\infty}\varphi = \lim_{\mu\to\infty}\chi = \infty;\quad \lim_{\mu\to\infty}\varkappa = 0$$

$${}^{(\mu)}A_1 = -{}^{(\mu)}A_2 = \frac{1}{2\varkappa}\,(1-\varphi^2-\chi^2+\beta^2)^{5)}$$

$${}^{(\mu)}B_4 = \frac{1-\varphi^2}{2}\,\varkappa^2$$

$${}^{(\mu)}B_3 = -(1-\varphi^2)\cdot\varkappa + {}^{(\mu)}A_1\,\varkappa^2 = \frac{\varkappa}{2}\,(-1+\varphi^2-\chi^2+\beta^2)\,.$$

Die Grenzfunktion $f(\zeta)$ der $f_\mu(\zeta)$ ist die Abbildungsfunktion des Zweiecks, und zwar gilt

$$\{f(\zeta),\zeta\} = \frac{a_4}{\zeta^4} + \cdots + \frac{a_1}{\zeta} + \sum_{\nu=0}^{\infty} {}^0a_\nu\,\zeta^\nu;\quad a_4 = \lim_{\mu\to\infty} {}^{(\mu)}B_4;\ \ldots\ ;\ a_1 = \lim_{\mu\to\infty} B^{(\mu)}{}_1\,.$$

Nun gilt, weil $\varphi - \chi$ von μ unabhängig ist:

$$\varphi = \varphi_0 + \xi,\quad \chi = \chi_0 + \xi,\quad \lim_{\mu\to\infty}\xi = \infty,$$

wo φ_0 und χ_0 von μ unabhängig sind. Außerdem ist wegen $l_1 = 1$, $k_1 = 4$: $a_4 < 0$. Also gilt

$$-\frac{a_3^2}{a_4} = -\lim_{\mu\to\infty}\frac{{}^{(\mu)}B_3^2}{{}^{(\mu)}B_4} = \frac{1}{2}\lim_{\xi\to\infty}\frac{[-1+\varphi_0^2-\chi_0^2+2\,\xi\,(\varphi-\chi)+\beta^2]^2}{\varphi_0^2+2\varphi_0\,\xi+\xi^2-1}\,.$$

Folglich:

$$\text{(8)}\qquad -\frac{a_3^2}{a_4} = 2\,(\varphi-\chi)^2 = 2\left(\frac{w_1}{\pi}\right)^2.$$

Damit ist (7b) für unser Zweieck bewiesen.

Zum Beweis des allgemeinen Falles beachte man zunächst, daß unter der Voraussetzung von Satz 3 zu einer Ecke E_ν stets ein Zweieck ${}^2\mathfrak{Q}$ gehört, bei welchem ${}^2E_1$ zu E_ν kongruent und ${}^2E_2$ eine gewöhnliche Ecke ist. Dann folgt (7b) unmittelbar aus (5b) und (8).

---

[5]) Vgl. hierzu C. Carathéodory: Funktionentheorie II, S. 120.

Auch den Beweis der Gl. (7c) führen wir zunächst für den Spezialfall, daß die betreffende Ecke 6. Ordnung E_ν einem Zweieck ${}^2\mathfrak{Q}$ angehört ($\nu = 1$) und daß E_2 eine gewöhnliche Ecke ist[6]). Die Seiten E_1E_2 bzw. E_2E_1 von ${}^2\mathfrak{Q}$ bezeichnen wir mit s_1 bzw. s_2 und die eigentlichen Elemente von E_1 mit e_{11}, e_{12} und e_{13}. Die Punkte e_{12} und e_{13} verbinden wir auf der Riemannschen Fläche ${}^2\mathfrak{Q}$ mit einer Folge von Kreisbogen $s_3^{(\mu)}$, so daß eine Folge von Dreiecken ${}^3\mathfrak{Q}^{(\mu)}$ entsteht, welche die drei Seiten s_1, s_2 und $s_3^{(\mu)}$ besitzen. e_{13} ist für jedes ${}^3\mathfrak{Q}^{(\mu)}$ eine gewöhnliche Ecke $E_3^{(\mu)}$ mit dem Winkel $w_3^{(\mu)}$. Die Seiten $s_3^{(\mu)}$ sollen noch die folgenden beiden Bedingungen erfüllen:

1. $\lim\limits_{\mu\to\infty} w_3^{(\mu)} = \infty$,

2. jede Seite $s_3^{(\mu)}$ soll einem Kreis angehören, der den Kreis von s_1 schneidet.

Jedes Dreieck ${}^3\mathfrak{Q}^{(\mu)}$ besitzt eine Ecke 4. Ordnung $E_1^{(\mu)} = (e_{11}, e_{12})$, für welche die Voraussetzungen von Satz 3 erfüllt sind, so daß wir die Gl. (7b) anwenden können. Mit Hilfe der Folge ${}^3\mathfrak{Q}^{(\mu)}$ kann die Ecke E_1 von ${}^2\mathfrak{Q}$ durch „Zusammenrücken" der beiden Ecken $E_1^{(\mu)}$ und $E_3^{(\mu)}$ erzeugt werden. Zwischen dem Winkel w_1 von E_1 und den Winkeln $w_1^{(\mu)}$ und $w_3^{(\mu)}$ besteht die Beziehung

$$w_1 = w_3^{(\mu)} - w_1^{(\mu)}.$$

Wir setzen zur Abkürzung und Vereinfachung:

$$\pi\,\varphi = \pi\cdot\varphi(\mu) = w_1^{(\mu)};\quad \pi\,\chi = \pi\cdot\chi(\mu) = w_3^{(\mu)};\quad \pi\,\beta = w_2,$$

und für die Bilder von $E_1^{(\mu)}$, $E_3^{(\mu)}$ und E_2 auf der reellen ζ-Achse möge gelten

$$\varkappa_1^{(\mu)} = 0 \quad \varkappa_3^{(\mu)} = \varkappa = \varkappa(\mu) > 0 \quad \varkappa_2 = \infty\,.$$

Dann gilt für die Abbildungsfunktionen $f_\mu(\zeta)$ der Dreiecke $\mathfrak{G}_\mu$:

$$(9)\qquad \begin{cases} F_\mu(\zeta) \equiv \{f_\mu(\zeta), \zeta\} = \dfrac{A_4}{\zeta^4} + \cdots + \dfrac{A_1}{\zeta} + \dfrac{A_2'}{(\zeta-\varkappa)^2} - \dfrac{A_1}{\zeta-\varkappa} \\ \qquad = \dfrac{1}{\zeta^4(\zeta-\varkappa)^2}\,(B_6 + B_5\zeta + B_4\zeta^2 + \cdots + B_1\zeta^5), \end{cases}$$

wobei die Koeffizienten $A_4 \ldots A_1$, A_2', $B_6 \ldots B_1$ Funktionen von μ sind. Nach (7b) und (5b) ist

$$A_4 = -\frac{A_3^2}{2\varphi^2}$$

$$A_2' = \frac{1-\chi^2}{2},$$

wobei wir wieder wie oben setzen

$$\varphi = \varphi_0 + \xi;\quad \chi = \chi_0 + \xi;\quad \lim_{\mu\to\infty} \xi = \infty,$$

wo φ_0 und χ_0 von μ unabhängig sind. Wegen $\varkappa_2 = \infty$ gilt außerdem[7])

$$\lim_{\zeta\to\infty} \zeta^2 F_\mu(\zeta) = \frac{1-\beta^2}{2}.$$

Also

$$A_2 = A_1\varkappa - \frac{1-\chi^2}{2}.$$

---

[6]) ${}^2\mathfrak{Q}$ hat jetzt eine andere Bedeutung als vorher.

[7]) Vgl. C. Carathéodory, a. a. O.

Unter Berücksichtigung der vorstehenden Ausdrücke für A_4, A_2' und A_2 errechnet man für B_6, B_5 ... durch einen Koeffizientenvergleich in (9):

$$B_6 = -\frac{\varkappa^2 A_3^2}{2\varphi^2}$$

$$B_5 = \frac{A_3^2\,\varkappa}{\varphi^2} + A_3\varkappa^2$$

$$B_4 = -\frac{A_3^2}{2\varphi^2} - 2\varkappa A_3 + \varkappa^3 A_1 - \varkappa^2\frac{1-\chi^2}{2}$$

$$B_3 = A_3 - \varkappa^2 A_1 + \varkappa - \varkappa\,\chi^2$$

$$\frac{B_5^2}{B_6^2} - 4\,\frac{B_4 + \varkappa B_3}{B_6} = \frac{4}{A_3^2}\cdot[\varphi^4 + \varphi^2(1-\chi^2)] = \frac{8}{A_3^2}[(\varphi_0 - \chi_0)\,\xi^3 + P_2(\xi)],$$

wo $P_2(\xi)$ ein Polynom 2. Grades von ξ ist. Weiter ist

$$R_6^{(\mu)} \equiv B_6\left[\frac{B_5^2}{B_6^2} - 4\,\frac{B_4+\varkappa B_3}{B_6}\right]^2 = -\frac{32\varkappa^2\xi^4}{A_3^2}\,\frac{(\varphi_0-\chi_0)^2+\cdots}{1+\cdots}, \tag{10}$$

wo im rechten Bruch im Zähler und Nenner nur noch Glieder folgen, die gegen Null konvergieren für $\xi\to\infty$. Nun gilt für die Abbildungsfunktion $f(\zeta)$ von ${}^2\mathfrak{Q}$, d. h. für die Grenzfunktion der Folge $f_\mu(\zeta)$:

$$\{f(\zeta),\zeta\} = \frac{a_6}{\zeta^6} + \frac{a_5}{\zeta^5} + \cdots + \frac{a_1}{\zeta}, \quad a_6 < 0$$

$$a_6 = \lim_{\mu\to\infty} B_6$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$a_1 = \lim_{\mu\to\infty} B_1.$$

Also ist

$$R_6 = \frac{(a_5^2 - 4a_4 a_6)^2}{a_6^3} = \lim_{\mu\to\infty} R_6^{(\mu)}, \tag{11}$$

wenn wir den Index ν in den Sätzen 2 und 3 weglassen. Für diesen Grenzübergang benötigen wir noch die folgende Umformung:

$$\frac{B_5}{B_6} = -\frac{2}{\varkappa} - \frac{2\varphi^2}{A_3}$$

$$\frac{\varkappa\xi^2}{A_3} = -\frac{\xi^2}{\varphi^2}\left(1 + \frac{\varkappa B_5}{2B_6}\right)$$

$$\lim_{\mu\to\infty}\frac{\varkappa\xi^2}{A_3} = -1. \tag{12}$$

Aus (10), (11) und (12) folgt nun

$$R_6 = -32(\varphi_0-\chi_0)^2 = -\frac{32}{\pi^2}(w_1^{(\mu)} - w_3^{(\mu)})^2 = -32\,\frac{w_1^2}{\pi^2},$$

womit auch (7c) für das Zweieck ${}^2\mathfrak{Q}$ bewiesen ist. Hieraus und aus (5c) ergibt sich der allgemeine Fall wie oben.

Die für die Gl. (7b) und (7c) geführten Beweise gelten auch noch für gewisse Ecken E_ν, für welche $s_{\nu-1}$ und s_ν auf getrennten Kreisen liegen. Für die betreffenden Ecken gibt es nämlich solche Zweiecke, für welche die eine Ecke zu E_ν kongruent und die andere Ecke von der 2. Ordnung und 2. Art ist. Jedoch gibt es auch Fälle, in welchen ein solches Zweieck nicht existiert. Vermutlich gilt Satz 3 auch in diesen Fällen.

(Eingegangen am 13. Dezember 1954)

LAUGWITZ, D.
Math. Annalen, Bd. 130, S. 337—350 (1955)

Über unendliche kontinuierliche Gruppen

I. Grundlagen der Theorie; Untergruppen

Von

DETLEF LAUGWITZ in Göttingen

In der vorliegenden Arbeit sollen die Grundlagen für eine Theorie einer gewissen Klasse von unendlichen kontinuierlichen Gruppen gelegt werden. Es handelt sich dabei um solche topologischen Gruppenkeime, in welche Koordinaten aus einem Banach-Raum so eingeführt werden können, daß der Koordinatenvektor des Produktes differenzierbar im Sinne von FRÉCHET von den Koordinaten der Faktoren abhängt. Als Haupthilfsmittel werden die FRÉCHETsche Differentialrechnung und die in [8] entwickelte Tensorrechnung für unendlichdimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeiten verwendet. Die wichtigsten Hilfssätze sind in zwei Anhängen zusammengestellt.

Alle Betrachtungen beziehen sich auf lokale Fragen, d. h. auf Gruppenkeime.

Mehrere verschiedene Fragestellungen führen auf diese Gruppen. Einmal kann man die Aufgabe stellen, *möglichst umfangreiche Klassen von topologischen Gruppen einer analytischen Behandlung zugänglich zu machen* und die Strukturuntersuchung dieser Gruppen auf rein algebraische Probleme (für eine LIE-Algebra) zurückzuführen; dies letztere wird in Analogie zur klassischen LIEschen Theorie in einer späteren Arbeit ausgeführt werden. Eine weitere Frage, die den hier entwickelten Methoden zugänglich ist, ist die nach der Struktur der Untergruppen von bekannten und wichtigen unendlichen Gruppen, z. B. den Gruppen von linearen Transformationen in Hilbert- und Banach-Räumen. Wir werden hier zeigen, daß lokalkompakte Untergruppen der von uns betrachteten Gruppen endliche LIE-Gruppen im klassischen Sinne sind, ein Ergebnis, das speziell das von YOSIDA [19] auf anderem Wege (nämlich durch Verallgemeinerung einer Methode von J. v. NEUMANN [15]) gewonnene Resultat enthält, daß jede lokalkompakte Gruppe in einer Banach-Algebra und also speziell jede lokalkompakte Gruppe von linearen beschränkten Transformationen eines Banach-Raumes eine endliche LIEsche Gruppe ist. Die allgemeinere Frage, ob alle (nicht notwendig lokalkompakten) abgeschlossenen lokalzusammenhängenden Untergruppen der hier betrachteten Gruppen wieder lokal-BANACHsche differenzierbare Gruppen sind, konnte hier nur in speziellen Fällen (so für das Zentrum sowie für solche Untergruppen, die von infinitesimalen Transformationen erzeugt werden) bejahend beantwortet werden. Ihre allgemeine Beantwortung wird aber vermutlich mit den hier entwickelten Methoden möglich sein.

Einen weiteren Zugang zu den lokal-Banachschen differenzierbaren Gruppen bilden die klassischen Arbeiten von Lie, Cartan u. a. über unendliche *Transformations*gruppen [2, 10, 11]. Allerdings ist diese klassische Auffassung der unendlichen Lieschen Gruppen, wie schon G. Birkhoff [1] und A. D. Michal [12] bemerkt haben, insofern unbefriedigend, als nicht festgelegt wird, welche Topologie die Gruppe trägt; die Voraussetzung, daß die Gruppen durch Differentialgleichungen bzw. Pfaffsche Formen definiert werden, scheint von unserem Standpunkt überflüssig zu sein. In einer späteren Arbeit soll gezeigt werden, daß sich viele unendliche Transformationsgruppen unserer Theorie unterordnen.

Andererseits gibt es unendliche Transformationsgruppen, die sich so mit einer natürlichen Topologie ausstatten lassen, daß sie lokal homöomorph nicht zu Banach-Räumen, sondern zu allgemeineren lokalkonvexen topologischen Vektorräumen sind. Die Untersuchung dieser allgemeineren Klasse von unendlichen kontinuierlichen Gruppen erscheint u. a. auch deshalb wünschenswert, weil jede topologische Gruppe eine treue stetige Darstellung durch beschränkte lineare Transformationen mit der stetigen Operator-Topologie besitzt, also mit einer Topologie, welche im allgemeinen zwar lokalkonvex, aber nicht normierbar ist. Dem Aufbau einer Theorie in diesem größeren Rahmen steht jedoch z. Z. das Fehlen einer Differentialrechnung für lokalkonvexe Vektorräume entgegen.

Zum Vergleich mit den Arbeiten von Birkhoff [1] und Michal [12, 13] ist zu bemerken: G. Birkhoff hat bereits kanonische Koordinaten eingeführt. Bei uns werden diese in § 4 auf einem anderen Wege erhalten. Birkhoffs Haupthilfsmittel ist die Kurventheorie in allgemein-metrischen Räumen; die Differentialrechnung wird von ihm kaum ausgenutzt. Unsere Hauptergebnisse über Untergruppen (§ 5) fehlen daher bei ihm[1]). Die Arbeiten von Michal beschäftigen sich mit Spezialfällen. Die Arbeit [12] enthält die wichtigsten Definitionen und einige grundlegende einfache Sätze (über invariante Vektorfelder; ohne Beweise) für den Fall, daß die Gruppe zugleich Teilraum eines Banach-Raumes ist. Wichtig ist die Bemerkung von Michal, daß in dem von ihm betrachteten Spezialfall die Einführung von Koordinatentransformationen überflüssig ist; allerdings müßte man zur Gewinnung von tieferliegenden Resultaten sicher auch wieder kanonische Koordinaten einführen. — Schließlich sei noch auf die Arbeit [17] von Ritt hingewiesen, in der mit formalen Potenzreihen gearbeitet wird und die daher von unseren Betrachtungen über topologische Gruppen grundsätzlich verschieden ist.

In den §§ 1, 3, 4 lehnen wir uns möglichst eng an die Darstellung des endlichen Falls bei Pontrjagin [16] an, und wir verweisen für solche Beweise, die sich ohne weiteres aus dem Endlichen übernehmen lassen, auf dieses Lehrbuch.

---

[1]) E. B. Dynkin hat die Resultate von Birkhoff [1] nach einer anderen Richtung verallgemeinert; er läßt allgemeinere normierte Grundkörper zu. [Amer. math. Soc. Translat. Nr. 97 (1953) = Uspechi mat. Nauk 5, Nr. 1, 135—186 (1950)].

§ 1. Differenzierbare und analytische Koordinatensysteme für topologische Gruppen und Gruppenkeime

Vorgelegt sei ein *Gruppenkeim*[1a]) K mit den Elementen $\{x, y, z, \ldots\}$, dem neutralen Element e und der Multiplikation $x \cdot y = xy$. Ein solcher Gruppenkeim heißt *B-lokale Gruppe*, wenn eine Umgebung U von $e \in K$ homöomorph einer Umgebung des Nullpunktes O des Banach-Raumes B ist, so daß e und O einander zugeordnet werden. Diese Abbildung von K in B heiße ein *Koordinatensystem*. Die Elemente von B sollen kleine lateinische obere Indizes tragen, und der Kernbuchstabe des Koordinatenvektors von $x \in K$ soll ebenfalls x sein, so daß also z. B. $z \in K$ den Koordinatenvektor $z^i \in B$ hat.

Im übrigen benutzen wir für B durchweg die in [8] eingeführte Tensorrechnung, die im Anhang I kurz erläutert wird, ebenso wie die verwendeten Hilfssätze über die Fréchetsche Differentialrechnung.

W sei eine solche Umgebung von $e \in K$, daß für $x \in W$, $y \in W$ das Produkt xy erklärt ist und $xy \in U$. (Die Existenz einer solchen Umgebung folgt aus den Eigenschaften des Gruppenkeims.) Dann ist f mit

$$xy = z = f(x; y)$$

eine stetige Funktion in $W \times W$, deren Werte in U liegen; also ist

$$z^i = f^i(x^k; y^k)$$

stetig, und es gilt

$$f^i(x; 0) = x^i = f^i(0; x). \tag{1}$$

K heißt *B-lokale differenzierbare Gruppe*, wenn f^i nach beiden Argumenten ϱ-mal stetig differenzierbar ist ($\varrho \geqq 2$), und *B-lokale analytische Gruppe*, wenn f^i analytisch ist.

Aus (1) folgt für

$$L_k^{*i}(x) = \frac{\delta f^i(x; 0)}{\delta y^k}\;; \quad L_k^i(y) = \frac{\delta f^i(0; y)}{\delta x^k}\;;$$

$$L_k^i(0) = L_k^{*i}(0) = \delta_k^i\,. \tag{2}$$

Dabei ist $\delta_k^i \in B_1^1$ definiert durch $\delta_j^i x^j = x^i$ für alle $x^i \in B$. Nach dem Umkehrungssatz von Hildebrandt-Graves-Nevanlinna [5, 14] existieren in einer Umgebung des Nullpunktes stetige Funktionen Λ_k^{*i}, $\Lambda_k^i \in B_1^1$ mit

$$\Lambda_j^i(x)\, L_k^j(x) = L_j^i(x)\, \Lambda_k^j(x) = \Lambda_j^{*i}(x)\, L_k^{*j}(x) = L_j^{*i}(x) \Lambda_k^{*j}(x) = \delta_k^i\,.$$

Wir nehmen von nun an an, daß W bereits so klein gewählt sei, daß alle diese Funktionen existieren.

U ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit (ein B-lokal-linearer Raum im Sinne von [8]). $\mathfrak{T}^1(0) = \mathfrak{T}^1$ bezeichne den Tangentialraum dieser differenzierbaren Mannigfaltigkeit im Nullpunkt. Dieser Tangentialraum ist linear homöomorph zu B [8].

Eine topologische Gruppe heißt *differenzierbare (analytische) B-Gruppe*, wenn sie zugleich differenzierbare (analytische) B-lokale Gruppe ist.

[1a]) Für die Definition verweisen wir auf [16].

1.1. *Wenn G_i eine differenzierbare (analytische) B_i-Gruppe ist ($i = 1, 2$), dann ist das direkte Produkt $G_1 \times G_2$ eine differenzierbare (analytische) ($B_1 \times B_2$)-Gruppe.*

Beweis. $B_1 = \{x^i; \|x\|_1\}$; $B_2 = \{\xi^\alpha; \|\xi\|_2\} \cdot B_1 \times B_2 = \{(x^i, \xi^\alpha); (\|x\|_1^2 + \|\xi\|_2^2)^{1/2}\}$. Die Multiplikation in G_i werde im Koordinatensystem gegeben durch die Funktion $f_{(i)}$. Dann ist die Multiplikation in $G_1 \times G_2$ definiert durch

$$(f^i_{(1)}(x;y),\ f^\alpha_{(2)}(\zeta;\eta)),$$

und diese Funktion ist nach bekannten Sätzen ([8], Hilfssatz 4.1) differenzierbar (analytisch).

$x^i_{(j)}(t)$ ($j = 1, 2$) seien zwei differenzierbare Kurven in K mit $x^i_{(j)}(0) = 0$ und den Tangentenvektoren $\frac{\delta x^i_{(j)}(0)}{dt} = \xi^i_{(j)}$. Dann ist $y^i(t) = f^i(x^k_{(1)}(t); x^k_{(2)}(t))$ wiederum eine differenzierbare Kurve mit $y^i(0) = 0$, und es gilt

$$\frac{\delta y^i(0)}{dt} = \delta^i_k\, \xi^k_{(1)} + \delta^i_k\, \xi^k_{(2)} = \xi^i_{(1)} + \xi^i_{(2)}$$

[nach der Kettenregel und Gl. (2)]. Der Multiplikation von Kurven entspricht also die Addition von Tangentenvektoren in $\mathfrak{T}^1$.

§ 2. Die beiden integrablen linearen Übertragungen

Bekanntlich lassen sich in jeder Gruppe (ohne Rücksicht auf eine etwa vorhandene Topologie) zwei Parallelismen erklären, die dann und nur dann zusammenfallen, wenn die Gruppe abelsch ist. Ein endlicher Vektor ist ein geordnetes Paar von Gruppenelementen (x, y); zwei endliche Vektoren (x, y) und (x', y') heißen rechtsäquipollent, wenn es ein z gibt, so daß $xz = x'$, $yz = y'$, und linksäquipollent, wenn es ein u gibt mit $ux = x'$, $uy = y'$[2]).

In B-lokalen differenzierbaren Gruppen können diesen Parallelismen für die endlichen Vektoren lineare Übertragungsgesetze für die kontravarianten Tangentialvektoren zugeordnet werden; diese Übertragungen, die dann ihrer Herkunft nach integrabel sind, sollen jetzt explizit konstruiert werden.

Zwei differenzierbare Kurven $x_1(t)$, $x_{(2)}(t)$ werden rechtsäquipollent genannt, wenn es ein z gibt, so daß $x_{(1)}(t) \cdot z = x_{(2)}(t)$ für alle t. Ist speziell $x_{(1)}(0) = 0$, so lautet diese Bedingung in Koordinatenform

$$x^i_{(2)}(t) = f^i(x^k_{(1)}(t);\ x^k_{(2)}(0)).$$

Differentiation nach t ergibt für $t = 0$:

$$\xi^i_{(2)} = L^i_k(z)\, \xi^k_{(1)};\ \xi^k_{(j)} = \frac{\delta x^k_{(j)}(0)}{dt}\ (j = 1, 2). \tag{1}$$

Diese Beziehung ist nun unabhängig von der speziellen Wahl der Kurven mit den vorgeschriebenen Anfangsbedingungen für $t = 0$: Zwei Vektoren $\xi^i_{(1)}$, $\xi^i_{(2)}$ in e, z heißen rechtsäquipollent, wenn (1) gilt; zwei kontravariante Vektoren in beliebigen Punkten des Gruppenraumes heißen rechtsäquipollent, wenn sie zu demselben Vektor im Punkte e rechtsäquipollent sind. Ein Feld von

[2]) Für die wichtigsten Eigenschaften verweisen wir auf [18].

rechtsäquipollenten Vektoren ist also definiert durch

$$\xi^i(x) = L^i_k(x)\,\xi^k(0), \tag{2}$$

und auf diese Weise erhält man auch alle möglichen rechtsäquipollenten Vektorfelder. — Ähnlich ergibt sich für linksäquipollente Felder:

$$\eta^i(x) = L^{*i}_k(x)\,\eta^k(0). \tag{3}$$

Als infinitesimale Beziehung erhält man durch Differentiation von (2):

$$d\,\xi^i = -\overset{(r)}{\Gamma}{}^i_{kj}\,\xi^k\,d\,x^j, \quad \overset{(r)}{\Gamma}{}^i_{kj} = -\frac{\delta L^i_r(x)}{d\,x^j}\,\Lambda^r_k(x); \tag{4}$$

und ebenso aus (3)

$$d\,\eta^i = -\overset{(e)}{\Gamma}{}^i_{kj}\,\eta^k\,d\,x^j, \quad \overset{(e)}{\Gamma}{}^i_{kj} = -\frac{\delta L^{*i}_r(x)}{\delta\,x^j}\,\Lambda^{*r}_k(x). \tag{5}$$

Die Größen $\overset{(r)}{\Gamma}$ und $\overset{(e)}{\Gamma}$ sind die Übertragungsoperatoren der Rechts- bzw. Linksäquipollenz von kontravarianten Vektoren. (Alle Betrachtungen beziehen sich auf die in § 1 definierte Umgebung W, so daß alle auftretenden Größen einen Sinn haben.)

§ 3. Eingliedrige Untergruppen

Eine in $t = 0$ differenzierbare Kurve $g(t) \in K$ ($|t| \leqq r$, $r > 0$) mit $g(t_1 + t_2) = g(t_1)\,g(t_2)$ heißt eingliedrige Untergruppe, und

$$\xi^j = \frac{\delta g^j(0)}{d\,t}$$

heißt ihr Richtungsvektor. Offenbar ist $g(0) = e$. Zwei eingliedrige Untergruppen $g(t)$, $h(t)$ heißen gleich, wenn $g(t) = h(t)$ in einem 0 im Inneren enthaltenden t-Intervall.

3.1. *Es gibt genau eine eingliedrige Untergruppe $g(t)$ von K mit dem Richtungsvektor ξ^i; diese genügt den Differentialgleichungen*

$$\frac{\delta g^j(t)}{d\,t} = L^{*i}_k(g(t))\,\xi^k = L^i_k(g(t))\,\xi^k; \quad g(0) = 0 \tag{1}$$

und ist geodätische Linie jedes der beiden linearen integrablen Zusammenhänge aus § 2.

Beweis. Die eingliedrige Untergruppe $g(t)$ habe den Richtungsvektor ξ^i. Wir zeigen zunächst, daß sie geodätische Linie der beiden Zusammenhänge $\overset{(r)}{\Gamma}$ und $\overset{(e)}{\Gamma}$ ist. Dies folgt daraus, daß die Kurven $g(t)$ und $g_s(t) = g(s + t) = g(s)\,g(t) = g(t)\,g(s)$ für beliebiges festes s ($|s + t| \leqq r$) sowohl rechts- als auch linksäquipollent sind. Aus § 2, (2), (3) folgen die beiden Differentialgleichungen (1) und aus dem Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen, daß es höchstens eine eingliedrige Untergruppe mit dem Richtungsvektor ξ^i geben kann.

Es bleibt also noch die Existenz einer eingliedrigen Untergruppe zu vorgegebenem Richtungsvektor ξ^i zu zeigen. Der Beweis dafür kann mit Hilfe

des Existenzsatzes für gewöhnliche Differentialgleichungen analog zum entsprechenden Beweis für endliche Gruppen geführt werden, wie er z. B. in [16] durchgeführt ist.

Korollar 1. *Jede differenzierbare eingliedrige Untergruppe ist mindestens ebenso oft differenzierbar wie das Koordinatensystem und analytisch, wenn das Koordinatensystem analytisch ist.* Dies folgt aus (1).

Korollar 2. *Diejenigen geodätischen Linien, die durch den Nullpunkt gehen, sind für die beiden integrablen Zusammenhänge dieselben, und zwar sind sie eingliedrige Untergruppen. Die affinen Parameter der Geodätischen sind zugleich „kanonische" Parameter der Untergruppen* (d. h. es gilt $g(s+t) = g(s)g(t)$).

§ 4. Kanonische Koordinaten

Ein Koordinatensystem für eine B-lokale differenzierbare Gruppe, in dem die eingliedrigen Untergruppen durch lineare Beziehungen $g^i(t) = t \cdot \xi^i$ (ξ^i Richtungsvektor) gegeben sind, heißt *kanonisch*. Nach 3.1 entspricht umgekehrt in kanonischen Koordinaten jeder Kurve $t \cdot \xi^i$ ($\xi \neq 0$) eine eingliedrige Untergruppe.

Die B-lokale differenzierbare Gruppe sei in einem Koordinatensystem (x^i) vorgelegt. Die eingliedrige Untergruppe mit dem Richtungsvektor ξ^i und dem kanonischen Parameter t sei $g^i(\xi; t)$; diese Funktion von t ist für festes ξ^i Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{\delta g^i(\xi;t)}{dt} = L^i_k(g^i(\xi;t))\,\xi^k, \tag{1}$$

und es gibt also nach einem Ergebnis von KERNER [7] positive Zahlen a, b, so daß für $\|\xi\| < a$ die Lösung für $|t| < b$ definiert und ebenso oft differenzierbar ist wie das Koordinatensystem bzw. mit diesem analytisch ist. Wegen der aus 3.1 folgenden Gleichung

$$g^i(\xi; st) = g^i(s\,\xi; t) \tag{2}$$

ist also für $\|\xi\| < ab$ die folgende Funktion definiert:

$$h^i(\xi) = g^i(\xi; 1), \tag{3}$$

für welche wegen (2) offenbar gilt $h(0) = 0$. Daß $h^i(\xi)$ in einer Umgebung von $\xi = 0$ stetig differenzierbar ist, folgt aus den Ergebnissen von KERNER [7]; denn die Lösung $g(\xi; t)$ der Differentialgleichung (1) ist nach dem Parameter ξ differenzierbar, weil die Differentialgleichung selbst es ist. Den Wert der Ableitung im Punkte 0 finden wir mit Hilfe der GÂTEAUX-Berechnungsweise:

$$\frac{\delta h^i(0)}{\delta \xi^k}\,\xi^k = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{h^i(\varepsilon\,\xi)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{g^i(\xi;\varepsilon)}{\varepsilon} = L^i_k(0)\,\xi^k = \xi^i, \text{ also } \frac{\delta h^i(0)}{\delta \xi^k} = \delta^i_k.$$

Daher ist nach dem Umkehrungssatz (Anhang I) die Gleichung

$$x^i = h^i(\bar{x}^k)$$

stetig umkehrbar, mit $h(0) = 0$, und die Umkehrung ist in einer Umgebung von 0 eindeutig erklärt. In den Koordinaten $\bar{x}$, von denen man durch ebenso

oft wie das Koordinatensystem x differenzierbare Koordinatentransformation zum System x kommt, stellt jede Kurve $t \cdot \xi^i$ eine eingliedrige Untergruppe dar. Wir haben also den Satz:

4.1. *Es gibt eine Koordinatentransformation $\bar{x}(x)$, so daß $\bar{x}$ ein kanonisches Koordinatensystem ist, und so daß $x(\bar{x})$ in einer Umgebung von 0 ebenso oft differenzierbar ist wie das Koordinatensystem (x) bzw. mit diesem analytisch ist; ferner gilt*

$$\frac{\delta x^i}{\delta \bar{x}^k} = \delta^i_k.$$

Als eine Folge dieses Satzes kann man leicht beweisen: *In einem differenzierbaren Koordinatensystem ist jede eingliedrige Untergruppe differenzierbar.*

Der Beweis kann durch Übergang zu einem kanonischen Koordinatensystem genau so geführt wie im endlichdimensionalen Fall bei Pontrjagin [16] (Theorem 48, p. 190—192) und daher hier übergangen werden. (Im Beweis von Pontrjagin ist zu diesem Zweck natürlich $|x^i|$ durch $\|x^i\|$ zu ersetzen.)

§ 5. Differenzierbarkeitseigenschaften von Untergruppen

Im folgenden bezeichnet, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes angegeben wird, H eine abgeschlossene Untergruppe der B-lokalen differenzierbaren Gruppe K, d. h. genauer einen Untergruppenkeim, zu dem es eine Umgebung V der 0 in K gibt, so daß $H \cap V$ in K abgeschlossen ist.

5.1. *Wenn es eine für $t = 0$ differenzierbare Kurve $x^i(t) \in H \cap V$ gibt, so daß $x^i(0) = 0, \frac{\delta x^i(0)}{dt} = \xi^i$, dann enthält H auch die eingliedrige Untergruppe von K mit dem Tangentialvektor ξ^i.*

Beweis. Das Koordinatensystem in K sei als ein kanonisches gewählt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann V als durch die Koordinatenmenge $\{x^i; \|x^i\| < 1\}$ beschrieben angenommen werden, was nötigenfalls durch eine Koordinatentransformation $r \cdot \delta^i_k$ und Einschränkung von V auf eine Untermenge erreichbar ist. Mit $x^i(t)$ sind auch die $n \cdot x^i(t)$ für $n \leq \frac{1}{\|x(t)\|}$ Koordinaten von Elementen aus $H \cap V$. Da $x^i(t)$ für $t = 0$ differenzierbar ist, $\frac{\delta x^i(0)}{dt} = \xi^i$, treten alle $s \cdot \xi^i$ mit $0 \leq s \leq \frac{1}{\|\xi\|}$ als Häufungspunkte der Menge $\left\{n \cdot x^i(t);\ 0 < t < \varepsilon,\ n \leq \frac{1}{\|x(t)\|}\right\}$ auf, liegen also ebenfalls in $H \cap V$, w.z.b.w.

Korollar. *Wenn es in $H \cap V$ eine Folge $x_{(n)}$ gibt mit $x_{(n)} \to e$, und (in kanonischen Koordinaten von K) $\frac{x^i_{(n)}}{\|x_{(n)}\|} \to \xi^i$, dann enthält $H \cap V$ die eingliedrige Untergruppe mit dem Tangentialvektor ξ^i.* (Der Beweis dafür verläuft wie der zu 5.1.)

5.2. *Die Gesamtheit der Tangentialvektoren im Punkte e von in e differenzierbaren Kurven aus $H \cap V$ bilden einen linearen Raum $L(H)$, wenn H eine beliebige (nicht notwendig abgeschlossene) Untergruppe von K ist; $L(H)$ ist zu einem Unterraum von B linear homöomorph. — Wenn H abgeschlossen ist, dann ist auch $L(H)$ abgeschlossen, und in kanonischen Koordinaten von K gilt:*

Notwendig und hinreichend dafür, daß die eingliedrige Untergruppe von K mit dem Richtungsvektor ξ^i zu H gehört, ist $\xi^i \in L(H)$.

Beweis. Wenn $x(t)$ den Tangentialvektor ξ^i in $t = 0$ hat $(x(0) = e)$, und $y(t)$ $(y(0) = e)$ in $t = 0$ den Tangentialvektor η^i, so hat $x(t) \cdot y(t)$ den Tangentialvektor $\xi^i + \eta^i$ in 0 und $x(a \cdot t)$ den Tangentialvektor $a \cdot \xi^i$. Daraus folgt wegen der Gruppeneigenschaft von H die Linearität von $L(H)$. Da die Tangentialvektoren einen linearen Unterraum von $\mathfrak{T}^1$ bilden und $\mathfrak{T}^1$ linear homöomorph zu B ist, folgt die lineare Homöomorphie von $L(H)$ mit einem linearen Unterraum von B. Die notwendige und hinreichende Bedingung im Falle der Abgeschlossenheit von H ergibt sich mit Hilfe von 5.1. Es gehören also (da wir kanonische Koordinaten von K haben) alle $t\,\xi^i$ für $\xi^i \in L$ und genügend kleine t wirklich zu $^*K$, woraus wegen der Abgeschlossenheit von H diejenige von $L(H)$ folgt.

5.3. *Wenn H abgeschlossen ist, dann ist $L(H)$ invariant unter den inneren Automorphismen von H.*

Beweis. Wenn $g^i \in L(H)$, dann gibt es nach 5.2. in H eine eingliedrige Untergruppe $g^i(t)$ mit $g(1) = g$, und für kleine t gilt $g(t) \in L(H)$. Da $ag(t)a^{-1}$ ebenfalls eine eingliedrige Untergruppe von H ist, wenn $a \in H$, folgt $aga^{-1} \in L(H)$ für alle $a \in H$, $g \in L$, was behauptet wurde[3]).

5.4. *Es sei H eine abgeschlossene, zusammenhängende Untergruppe von K. Dann ist notwendig und hinreichend dafür, daß H eine B'-lokale differenzierbare, differenzierbar eingebettete Untergruppe von K ist, daß für $x \in H \cap \overline{V}$ gilt $x^i \in L(H)$. H ist in diesem Falle ebenso oft differenzierbar wie K bzw. mit K analytisch.*

Beweis. Wenn H eine differenzierbare, differenzierbar eingebettete Untergruppe von K (in kanon. Koordinaten) ist, dann ist die Bedingung jedenfalls erfüllt.

Es bleibt zu beweisen, daß die Bedingung hinreichend ist. Wir wissen: In den kanonischen Koordinaten von K gilt, daß die Koordinaten x^i von Elementen aus H mit $\|x^i\| \leqq 1$ genau den Durchschnitt des linearen abgeschlossenen Unterraums $L(H)$ von $\mathfrak{T}^1$ mit der Einheitskugel $\overline{V}$ bilden. B' sei der zu $L(H)$ linear homöomorphe abstrakte Banach-Raum, Elemente $u^\alpha \cdot k^i_\alpha$ sei die definierende Abbildung von B' auf $L(H)$ (isometrisch, linear), K^α_i ihre Umkehrung. Dann ist nach den einfachsten Sätzen über die Fréchetsche Ableitung die Produktfunktion der Untergruppe H:

$$f^\beta(u^\alpha, v^\alpha) = K^\beta_i\, f^i(k^j_\alpha\, u^\alpha;\, k^j_\alpha\, v^\alpha)$$

ebenso oft differenzierbar wie $f^i(x; y)$ bzw. mit dieser Funktion analytisch[4]).

5.5. *Es sei H eine lokalkompakte Untergruppe von K. Dann ist die mit der Identität e zusammenhängende Komponente von H eine B'-lokale differenzierbare Gruppe bzw. mit K eine analytische B'-lokale Gruppe. Die Einbettung ist differenzierbar bzw. analytisch.*

[3]) In einer nachfolgenden Arbeit wird gezeigt werden, daß $L(H)$ Koordinaten eines Normalteilers von H sind. Daraus folgt sofort: Jede einfache abgeschlossene Untergruppe, welche eine in 0 differenzierbare Kurve enthält, ist eine differenzierbare Gruppe.

[4]) In der Terminologie von Lie besagt dieser Satz: Eine Untergruppe ist genau dann differenzierbar, wenn sie von infinitesimalen Transformationen erzeugt wird.

Beweis[5]). Es sei $L(H)$ wie bisher definiert, wobei K wieder in kanonischen Koordinaten angenommen sei. Wegen 5.4 genügt es zu zeigen, daß $L(H)$ eine volle Koordinatenumgebung der 0 in H enthält. Wir werden zeigen: Wenn $L(H)$ nicht eine volle Koordinatenumgebung der 0 in H enthielte, dann gäbe es eine Folge $x_{(n)} \in H$ mit

$$\text{(A)} \qquad e \neq x_{(n)} \to e; \ \frac{x^i_{(n)}}{\|x_{(n)}\|} \to x^i \ \text{für ein } x \in K, \ x^i_{(n)} \in L',$$

L' ein abgeschlossener linearer Unterraum von B mit $L' \cap L(H) = 0$, $L(H) \oplus L' = B$.

Wenn wir **(A)** als bewiesen annehmen, dann gilt wegen der Abgeschlossenheit von H $x \in H$ und wegen der Limesbedingung und dem **Korollar** zu 5.1: $t \cdot x^i \in H$ für $t \leq 1$. Also ist ein Widerspruch zur Annahme erhalten, daß $L(H)$ alle eingliedrigen Untergruppen von H enthielte, denn $\|x^i\| = 1$, $t \cdot x^i \in L'$. Damit wäre der Beweis von 5.5 beendet.

Es bleibt also die Existenz einer Folge $x_{(n)}$ mit **(A)** zu beweisen, unter der Annahme, daß $L(H)$ nicht eine volle Umgebung der 0 in H enthielte. Dann gibt es eine Nullfolge $y_{(n)} \notin H$, $y_{(n)} \in L(H)$. $L(H)$ ist wegen der Lokalkompaktheit jedenfalls endlichdimensional (Anhang II, 2), die Dimensionszahl sei n. Dann gibt es nach Anhang II, 1 Vektoren $b^i_{(k)} \in L(H)$ $(k = 1, \ldots, n)$ von der Norm 1 und n in B definierte stetige lineare Funktionale $c^{(k)}_i$, ebenfalls von der Norm 1, mit

$$c^{(k)}_i b^i_{(j)} = \delta_{(k,j)} \quad \text{für } j \geq k.$$

Der Raum

$$L' = \{x^i \in B;\ c^{(k)}_i x^i = 0,\ k = 1, \ldots, n\}$$

hat mit $L(H)$ nur den Nullvektor gemeinsam, und $L(H)$, L' spannen zusammen den ganzen Raum B auf; die Abgeschlossenheit von L' folgt aus der Stetigkeit der Funktionale c. Das Gleichungssystem

$$\text{(B)} \qquad c^{(k)}_i f^i(y^{-1}; b) = 0 \ \text{ mit } \ b^k = t_{(1)} b^k_{(1)} + \cdots + t_{(n)} b^k_{(n)}$$

hat für $y = e$ die eindeutig bestimmte Lösung $t_{(1)} = \cdots = t_{(n)} = 0$. Für $y = e$, $t_{(k)} = 0$ für alle k ist die Funktionalmatrix der linken Seite von **(B)** gleich $a_{(k,j)} = c^{(k)}_i b^i_{(j)}$, die Funktionaldeterminante also gleich 1. Nach dem Hauptsatz über implizite Funktionen [5] existiert also in einer Umgebung von $y^i = 0$ sicher eine stetige Funktion $b^i(y)$ mit $b^i(0) = 0$, welche **(B)** löst; wegen **(B)** ist daher für solche y $y^{-1} b(y) \in H$, und der Koordinatenvektor $f^i(y^{-1}; b(y))$ von $y^{-1} b(y)$ liegt in L'. Von einem gewissen Index N ab liegen die $y_{(n)}$ in der Umgebung, in der $b(y)$ definiert ist; wir setzen

$$x^i_{(n)} = f^i(y^{-1}_{(n)}; b(y_{(n)})).$$

Es gilt $x_{(n)} \in H$, $x^i_{(n)} \in L'$, $\lim x_{(n)} = e$, außerdem $x_{(n)} \neq e$; wäre nämlich $x_{(n)} = e$, so hätte man $e = y^{-1}_{(n)} b(y_{(n)})$, also $y_{(n)} \in L$ entgegen der Annahme. Wegen der

[5]) Die Spezialisierung des Beweises auf endliche Keime K dürfte etwas kürzer ausfallen als der Beweis in [16]; dabei kann das SCHMIDTsche Orthogonalisierungsverfahren angewandt werden.

Lokalkompaktheit gibt es eine Teilfolge, deren zugehörige Einheitsvektoren konvergieren, und diese Teilfolge erfüllt die Bedingung (A). Damit ist der Beweis von 5.5 beendet.

Die Frage, ob auch alle nicht lokalkompakten abgeschlossenen (zusammenhängenden) Untergruppen wieder B'-lokale differenzierbare Gruppen sind, kann hier in dieser Allgemeinheit nicht beantwortet werden [vgl. aber Fußnote [3])]. — Es gilt aber

5.6. *Das Zentrum Z einer B-lokalen differenzierbaren (analytischen) Gruppe K ist eine B'-lokale differenzierbare (analytische) Gruppe*; die Einbettung *ist differenzierbar (analytisch). (B' ist linearer Unterraum von B.)*

Beweis. Wenn $g \in Z$, dann enthält Z auch die ganze eingliedrige Untergruppe $g(t)$ mit $g(1) = g$; denn für jedes $a \in K$ ist $a^{-1} g(t)\, a = h(t)$ wiederum eine eingliedrige Untergruppe, für die wegen $g(1) \in Z$ gilt $h(1) = g(1)$. Nach dem Eindeutigkeitssatz 3.1 folgt dann $h(t) = g(t)$, also $g(t) \in Z$. Aus 5.4 folgt dann die Behauptung, da Z abgeschlossen ist, wie man leicht verifiziert.

§ 6. Anwendungen auf Banach-Algebren und Gruppen linearer Transformationen in Banach-Räumen

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß sich die bisherigen Betrachtungen auf die Gruppe einer Banach-Algebra mit Einselement anwenden lassen. Diese Gruppe ist definiert als die Menge derjenigen Elemente einer Banach-Algebra, welche ein Inverses bei der Multiplikation besitzen; zu dieser Gruppe gehört stets eine volle Umgebung des Einselementes I der Banach-Algebra (vgl. dazu etwa [6]; wir betrachten hier reelle Banach-Algebren, für die die entsprechenden Sätze gelten).

6.1. *Die Gruppe einer reellen Banach-Algebra mit Einselement ist eine analytische B-Gruppe (B ist der Banach-Raum der Algebra).*

Beweis. Als Koordinatenvektor x^i des Elementes x der Gruppe wählen wir $x^i = I - x$ (I bezeichnet das Einselement). Die Produktfunktion $f^i(x; y) = (xy)^i = I - xy = x^i + y^i - x^i y^i$ ist eine analytische Funktion der Koordinatenvektoren x^i, y^i, das Einselement hat den Koordinatenvektor 0, und da eine Umgebung von I in B zur Gruppe gehört, ist die Gruppe eine B-lokale analytische Gruppe.

Aus den Ergebnissen von § 5 und 6.1 folgt nun sofort:

6.2. *Die Untergruppe H der Gruppe einer Banach-Algebra ist eine B'-lokale analytische Gruppe jedenfalls dann, wenn*

a) *H lokalkompakt ist (dann ist H eine endliche Lie-Gruppe), oder*

b) *H das Zentrum der Gruppe der Banach-Algebra ist, oder wenn*

c) *es eine Umgebung U von e gibt, so daß mit $u \in H \cap U$ auch eine eingliedrige Untergruppe $u(t)$ mit $u(1) = u$ zu H gehört.*

Korollar: 6.2 *gilt für die Gruppe der linearen Transformationen eines Banach-Raumes.*

6.2. a) ist (für komplexe Banach-Algebren) von K. Yosida [19] auf einem ganz anderen Wege, nämlich durch Übertragung der Methode von J. v. Neumann [15], bewiesen worden.

Anhang I. Hilfsmittel aus der Differentialrechnung in Banachschen Räumen und der Tensorrechnung

Es sei B ein Banachscher Raum. Seine Elemente bezeichnen wir im allgemeinen durch kleine lateinische obere Indizes, welche nicht zur Unterscheidung der Elemente (als „Nummern") aufzufassen sind; x^i bezeichnet nur die Zugehörigkeit von x zum Raume B (Abkürzung für $x \in B$). Wenn in einem Beweisgang mehrere verschiedene Räume auftreten, werden zur Indizierung verschiedene Alphabete benützt.

Die Elemente des *adjungierten Raumes* B_1 tragen untere Indizes aus dem gleichen Alphabet: u_i bezeichnet also ein stetiges lineares Funktional über B, $u_i x^i$ die Anwendung dieses Funktionals auf x^i (bezeichnet also eine Zahl), $u_i x^k = x^k u_i$ dagegen eine lineare Abbildung von B auf sich. Als *höhere adjungierte Räume* B_n^m $(m \geqq 0,\ n \geqq 0$, ganz) bezeichnen wir die Banach-Räume aus den stetigen Multilinearformen in n Argumenten aus B und m Argumenten aus B_1, welche noch der zusätzlichen Bedingung genügen, daß jeder Ausdruck mit nur einem freien oberen Index ein Element von B ist. (So ist $c_{kj}^i x^k y^j \in B$.)[6]) Wir schreiben für B_n^0 auch $B_n (n \geqq 1)$, für B_0^m auch $B^m (m \geqq 1)$; B_0^0 ist der zugrunde liegende Körper, in unserem Falle also der der reellen Zahlen. — Allgemeiner steht für eine lineare stetige Abbildung eines Banach-Raumes B (Elemente x^i) in einen anderen C (Elemente y^α) das Symbol t_i^α, usw. Zahlen tragen keine freien Indizes; Nummern werden eingeklammert. Die Konvention geht im endlichdimensionalen Spezialfall in die Einsteinsche Summationskonvention über.

Eine Abbildung $y^\alpha = t^\alpha(x^k)$ von B in C heißt *differenzierbar* (im Sinne von Fréchet [3]) in x^k, wenn

$$F^\alpha(x^k + d x^k) - F^\alpha(x^k) = L_i^\alpha(x^k)\, d x^i + o^\alpha(d x^k)$$

für alle $x^k + d x^k$ aus einer Umgebung von x^k; $o^\alpha(d x^k)$ bezeichnet eine Funktion mit

$$\lim_{0 \neq \|dx\| \to 0} \frac{\|o^\alpha(d x^k)\|}{\|dx\|} = 0\,.$$

Der dann eindeutig bestimmte Operator $L_i^\alpha(x)$ wird als Fréchetsche Ableitung von F^α an der Stelle x^k bezeichnet; wir schreiben

$$L_i^\alpha(x^k) = \frac{\delta F^\alpha(x)}{\delta x^i}\,.$$

Für zusammengesetzte Funktionen $\psi^a(x) = \Phi^a(F^\alpha(x^k))$ gilt die *Kettenregel von* Fréchet [3]:

$$\frac{\delta \psi^a(x)}{\delta x^k} = \frac{\delta \Phi^a(F(x))}{\delta F^\alpha}\,\frac{\delta F^\alpha(x)}{\delta x^k}\,.$$

Der Taylorsche Satz gilt in der folgenden Form [9]. (Ein ähnlicher Satz, hergeleitet mit Hilfe des Integralbegriffs, findet sich in [4]:)

---

[6]) Für die genauere Ausführung muß auf [8] verwiesen werden.

Die Funktion $F^\alpha(x^i)$ besitze in einer Umgebung U von x^i stetige Ableitungen bis zur $(n+1)$ ten Ordnung. Dann gilt

$$F^\alpha(x^i + dx^i) = F^\alpha(x^i) + \frac{\delta F^\alpha(x^i)}{\delta x^j}\, dx^j +$$

$$+ \frac{1}{2!}\frac{\delta^2 F^\alpha(x^i)}{\delta x^{j_1}\,\delta x^{j_2}}\, dx^{j_1} dx^{j_2} + \dots \frac{1}{n!}\frac{\delta^n F^\alpha(x^i)}{\delta x^{j_1}\dots\delta x^{j_n}}\, dx^{j_1}\dots dx^{j_n} + o^\alpha(dx)\,\|dx\|^{n-1}$$

für alle dx mit $(x + t\cdot dx) \in U$ $(0 \leqq t \leqq 1)$.

Es sind mehrere Definitionen für die Analyzität einer Funktion möglich, welche sämtlich so beschaffen sind, daß Polynome und endlichdimensionale analytische Funktionen analytisch sind. Wir verwenden hier die folgende Definition:

Wenn $F^\alpha(x^i)$ in der offenen Menge U unendlich oft differenzierbar ist, so heißt F^α analytisch in U, wenn die TAYLORsche *Reihe für jedes x, dx mit $x \in U$, $x + dx \in U$ in der Normtopologie gegen $F^\alpha(x + dx)$ konvergiert.*

Für *gewöhnliche Differentialgleichungen*

$$\frac{\delta x^i}{dt} = f^i(x^k; t)$$

gilt der Existenz- und Eindeutigkeitssatz von KERNER [7] (dazu auch HILLE [6], S. 95): *Wenn f nach beiden Argumenten stetig differenzierbar ist (*LIPSCHITZ-*Bedingungen würden ausreichen), dann gibt es eine und in einer Umgebung der Anfangsbedingungen genau eine Lösung $x^i(t)$ mit $x^i(0) = x^i_0$.*

Wegen weiterer hier benötigter Eigenschaften des FRÉCHETschen Differentials sei auf [8] verwiesen[6a]).

Anhang II. Ein Orthogonalisierungsverfahren für Banach-Räume

Das folgende Verfahren, welches auch unabhängig von der vorliegenden Arbeit verwendbar ist, gibt die Begründung für eine im Beweis zu Satz 5.5 benötigte Hilfsbetrachtung:

II. 1. *Es sei $x^i_{(n)}$ $(n = 1, 2, \dots)$ eine höchstens abzählbare Folge von linear unabhängigen Einheitsvektoren aus einem Banach-Raum B; dann gibt es eine Folge $y^i_{(n)} \in B$ von gleicher Mächtigkeit und eine Folge $y^{(n)}_i \in B_1$ mit folgenden Eigenschaften:*

a) $\|y^i_{(n)}\| = \|y^{(n)}_i\| = 1$,

b) *$y^i_{(n)}$ ist linear abhängig von den $x^i_{(k)}$ $(k \leqq n)$, aber nicht von den $x^i_{(k)}$ $(k < n)$,*

c) *$y^{(n)}_i y^i_{(m)} = 1$ für $n = m$; $y^{(n)}_i y^i_{(m)} = 0$ für $m > n$,*

d) *Es ist $\|y^i_{(m)} - L_{(m)}\| \geqq 1$, wobei $L_{(m)}$ die Abschließung des von den $y^i_{(n)}$ $(n > m)$ aufgespannten linearen Unterraumes von B ist; also gilt speziell $\|y^i_{(m)} - y^i_{(n)}\| \geqq 1$ für $m \neq n$.*

Beweis. Wenn die Folge $x_{(n)}$ leer ist, dann ist nichts zu beweisen. Es sei also $x_{(1)}$ vorhanden; dann setze man $y^i_{(1)} = x^i_{(1)}$ und wähle $y^{(1)}_i$ als ein nach dem Satze von HAHN-BANACH[7]) zu $y^i_{(1)}$ bestimmtes Funktional. — Wir schließen nun weiter durch vollständige Induktion. Für $m \leqq n$ sei bewiesen:

$$y^{(k)}_i y^i_{(m)} = 0 \text{ für } k < m \leqq n \text{ mit } \|y^{(k)}_i\| = 1\ (k < n),\ \|y^i_{(m)}\| = 1\ (m \leqq n).$$

[6a]) Die Grundtatsachen der Differentialrechnung in normierten Räumen sind jetzt in Lehrbuchform zugänglich: L. A. LJUSTERNIK u. W. I. SOBOLEW: Elemente der Funktionalanalysis, Berlin 1955, Kap. VI.

[7]) Dieser Satz besagt: Zu x^i mit $\|x^i\| = 1$ existiert x_i mit $\|x_i\| = 1$, so daß $x_i x^i = 1$.

$y_i^{(k)} y_{(k)}^i = 1$ $(k < n)$. Dies ist die Induktionsvoraussetzung. Dann wählen wir zu $y_{(n)}^i$ ein nach dem Satze von HAHN-BANACH bestimmtes Funktional $y_i^{(n)}$. Zur Bestimmung von $y_{(n+1)}^i$ suchen wir zunächst einen Vektor x^i mit

$$x^i = a_{(1)} y_{(1)}^i + \cdots + a_{(n)} y_{(n)}^i + a_{(n+1)} x_{(n+1)}^i$$

und

$$\begin{aligned}
0 &= y_i^{(1)} x^i = a_{(1)} && + a_{(n+1)} y_i^{(1)} x_{(n+1)}^i \\
0 &= y_i^{(2)} x^i = a_{(1)} y_i^{(2)} x^i + a_{(2)} && + a_{(n+1)} y_i^{(2)} x_{(n+1)}^i \\
&\cdots\cdots \\
0 &= y_i^{(n)} x^i = a_{(1)} y_i^{(n)} x^i + \cdots + a_{(n)} && + a_{(n+1)} y_i^{(n)} x_{(n+1)}^i .
\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem besitzt eine nicht-triviale Lösung $(a_{(k)})$, da die Determinante der Koeffizienten von $(a_{(1)}, \ldots, a_{(n)})$ gleich 1 ist. Offenbar kann für eine nichttriviale Lösung nicht gelten $a_{(n+1)} = 0$, weil daraus folgen würde $0 = a_{(1)} = \cdots = a_{(n)}$. Ein nichtverschwindender Lösungsvektor x^i ist also von $y_{(1)}^i, \ldots, y_{(n)}^i$ linear unabhängig, aber linear abhängig von $y_{(1)}^i, \ldots, y_{(n)}^i, x_{(n+1)}^i$. Das gleiche gilt dann auch für

$$y_{(n+1)}^i = \frac{x^i}{\|x^i\|} .$$

Damit sind a), b), c) bewiesen.

Es bleibt d) zu zeigen; dies folgt aber aus

$$\|y_{(m)}^i - y^i\| \geqq |y_i^{(m)} (y_{(m)}^i - y^i)| = 1$$

für $y^i \in L_{(m)}$[8]).

Als einfache Anwendung folgt der Satz von F. RIESZ, den wir in der vorliegenden Arbeit mehrfach verwendet haben:

II. 2. *Ein normierter Raum ist dann und nur dann lokalkompakt*[9]), *wenn der Raum endlichdimensional ist.*

Beweis. Wäre B nämlich unendlichdimensional, so gäbe es eine unendliche linear unabhängige Teilfolge, deren zugehörige orthogonalisierte Folge $y_{(m)}^i$ wegen $\|y_{(m)}^i - y_{(n)}^i\| \geqq 1$ $(m \neq n)$ keine konvergente Teilfolge enthält.

Literatur

[1] G. BIRKHOFF: Analytical groups. Trans. Amer. Math. Soc. **43**, 61—101 (1938). — [2] E. CARTAN: Sur la structure des groupes infinis des transformations. Ann. Sci. Ecol. norm. sup. **21**, 153—206 (1904); **22**, 219—308 (1905). — [3] M. FRÉCHET: La notion de différentielle dans l'analyse générale. Ann. Sci. Ecol. norm. sup. **42**, 293—323 (1925). — [4] L. M. GRAVES: Riemann integration and Taylor's theorem in general analysis. Trans. Amer. Math. Soc. **29**, 163—177 (1927). — [5] T. H. HILDEBRANDT u. L. M. GRAVES: Implicit functions in general analysis. Trans. Amer. Math. Soc. **29**, 127—153 (1927). — [6] E. HILLE: Functional analysis and semi-groups. New York 1948. — [7] M. KERNER:

[8]) Das Orthogonalisierungsverfahren ist übrigens nicht auf normierte Räume beschränkt, sondern läßt sich sinngemäß auch in jedem reellen Vektorraum durchführen, da es zu jedem von Null verschiedenen Vektor ein lineares Funktional gibt, welches für diesen Vektor den Wert 1 annimmt. Die Aussagen, in denen Normen auftreten, sind in II, 1 dafür zu streichen. (Der Beweis dieser Erweiterung ergibt sich aus dem zu II, 1, da dort von der Extremaleigenschaft der HAHN-BANACHschen Funktionale für die hier zu beweisenden Eigenschaften kein Gebrauch gemacht wurde.)

[9]) Das heißt: Die Menge $\|x\| \leqq 1$ ist kompakt.

Gewöhnliche Differentialgleichungen der allgemeinen Analysis. Prace mat.-fiz. **40**, 47—67 (1932). — [8] D. LAUGWITZ: Differentialgeometrie ohne Dimensionsaxiom. I. Tensoren auf lokal-linearen Räumen. Math. Z. **61**, 100—118 (1954). — [9] D. LAUGWITZ: Grundlagen für die Geometrie der unendlichdimensionalen Finslerräume. Ann. Mat. pura appl., **41** (1955) — [10] S. LIE: Theorie der unendlichen Gruppen. Ber. Verh. sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-nat. Kl. **43**, 316—393 (1891). — [11] S. LIE: Über Differentialinvarianten. Math. Ann. **24**, 537—578 (1884). — [12] A. D. MICHAL: Differentiable infinite continuous groups in abstract spaces. Revista Ci. Lima **50**, 131—140 (1948). — [13] A. D. MICHAL u. V. ELCONIN: Differential properties of abstract transformation groups with abstract parameters. Amer. J. Math. **29**, 129—143 (1937). — [14] R. NEVANLINNA: Bemerkung zur Funktionalanalysis. Math. Scand. **1**, 104—112 (1953). — [15] J. v. NEUMANN: Über die analytischen Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen. Math. Z. **30**, 1—42 (1929). — [16] L. PONTRJAGIN: Topological groups. Princeton 1946. — [17] J. F. RITT: Differentiable groups and formal LIE theory for an infinite number of parameters. Ann. of Math. (2) **52**, 708—726 (1950). — [18] J. A. SCHOUTEN: Ricci calculus, 2nd ed. Berlin etc. 1954. — [19] K. YOSIDA: On the group embedded in the metrical complete ring. Japanese J. Math. **13**, 7—26 u. 459—472 (1936).

(Eingegangen am 13. Juni 1955)

Koecher, M.
Math. Annalen, Bd. 130, S. 351—385 (1956)

Zur Operatorentheorie der Modulformen n-ten Grades

Von

Max Koecher in Münster (Westf.)

Inhaltsverzeichnis

Einleitung[1])

1. In der klassischen Theorie der Modulformen einer komplexen Variablen nehmen die Untersuchungen über die Hecke-Operatoren $T(g)$ einen wichtigen Platz ein. Ihre systematische Untersuchung wurde von Hecke [2, 3][2]) begonnen und von Petersson [11] zu einem gewissen Abschluß gebracht. Das starke Interesse, das diese Operatoren gefunden haben, beruht in der Hauptsache wohl auf der Tatsache, daß man mit Hilfe dieser Operatorentheorie eine Übersicht über die multiplikativen Relationen zwischen den Fourierkoeffizienten von ganzen Modulformen erhält. Da die Fourierkoeffizienten von Modulformen in vielen Fällen eine direkte arithmetische Bedeutung haben — man denke an die Thetareihen definiter quadratischer Formen, bei denen sich die Fourierkoeffizienten im einfachsten Fall als Darstellungsanzahlen einer natürlichen Zahl durch die betreffende quadratische Form ergeben —, liefern jene multiplikativen Relationen zahlentheoretische Ergebnisse [4], die rein arithmetisch — allerdings nicht in voller Allgemeinheit — erst wesentlich später durch Eichler [1] bewiesen werden konnten.

2. Nach Hecke definiert man für jede Form $f(\tau)$ aus der linearen Schar $\{\Gamma, k\}$ der *ganzen Modulformen der Dimension* k ($-k$ = natürliche Zahl), d. h. für jede in $\tau = x + i\,y$, $y > 0$, holomorphe Funktion $f(\tau)$ mit den Eigenschaften

[1]) Die vorliegende Arbeit wurde zusammen mit der Note *Einheiten schiefsymmetrischer Matrizen* von der Math.-Naturw. Fakultät der Universität Münster als Habilitationsschrift angenommen.

[2]) Eckige Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf S. 385.

a) $(\gamma\tau+\delta)^k f\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right)=f(\tau)$, $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in\Gamma$, Γ Modulgruppe,

b) $f(\tau)$ gleichmäßig beschränkt in x für $y\to\infty$,

und jede natürliche Zahl g einen Operator $T(g)$ durch

$$f/T(g)=g^{-k-1}\sum_{\mathfrak{A}}(c\tau+d)^k f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right). \tag{1}$$

Die zweireihige Matrix $\mathfrak{A}$ hat dabei alle *Transformationen g-ter Ordnung*, d. h. alle Matrizen

$$\mathfrak{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\ a, b, c, d \text{ ganz rational, } ad-bc=g,$$

zu durchlaufen, die sich nicht nur um einen linksseitigen Faktor aus Γ unterscheiden. Alle $T(g)$ bilden $\{\Gamma, k\}$ in sich ab und erzeugen daher einen Operatorenring auf dieser Schar.

Außer einer Aussage über den Zusammenhang der Fourierkoeffizienten von f und $f/T(g)$ kann man alle wesentlichen Sätze der Theorie als Strukturaussagen über den Operatorenring auffassen. Die dafür grundlegende Formel ist wohl die folgende Verknüpfungsrelation:

$$T(g)\,T(h)=\sum_{d/(g,h)}d^{-k-1}\,T\left(\frac{g\cdot h}{d^2}\right), \tag{2}$$

die, wesentlich über die Vertauschbarkeit hinausgehend, die Struktur des Operatorenringes im Bereich der ganzen Modulformen konstituiert. Die oben erwähnten multiplikativen Relationen sind direkte Folgerungen aus (2) unter Verwendung der Beziehung zwischen den Fourierkoeffizienten. Aber auch die Entwicklung der den Eigenfunktionen der Operatoren $T(g)$ zugeordneten DIRICHLET-Reihen in EULER-Produkte hat nach PETERSSON ihr Äquivalent im Operatorenring. Setzt man nämlich für komplexes s

$$T_s=\sum_{g=1}^{\infty}g^{-s}\,T(g),$$

dann folgert man aus (2) leicht

$$T_s=\prod_p\left(1-p^{-s}\,T(p)+p^{-k-1-2s}\right)^{-1}, \tag{3}$$

wobei das Produkt rechts über alle Primzahlen p zu erstrecken ist. Die Darstellung (3) entspricht dem EULER-Produkt der Eigenfunktionen.

3. Schon bald nach Erscheinen der ersten Arbeiten von HECKE zu diesem Fragenkreis tauchte die Frage auf, ob eine Möglichkeit der Verallgemeinerung dieser Operatoren auf die von SIEGEL [14] eingeführten *Modulformen n-ten Grades* möglich ist. Es ist wohlbekannt [16], daß gewisse Thetareihen definiter quadratischer Formen, deren Fourierkoeffizienten sich als Anzahl der Darstellungen einer quadratischen Form von n Variablen durch eine quadratische Form von mehr als n Variablen ergeben, auf Modulformen n-ten Grades führen. Man darf also hoffen, nach geeigneter Verallgemeinerung der Theorie ebenso wie im klassischen Fall ($n=1$) arithmetische Sätze über diese Darstellungsanzahlen zu erhalten.

Einen ersten Ansatz zur Verallgemeinerung der HECKE-Operatoren von SUGAWARA [17, 18] griff MAASS [10] in letzter Zeit auf und gelangte zu verschiedenen schönen Ergebnissen[3]).

4. In der vorliegenden Arbeit werden nun über den MAASSschen Ansatz hinausgehende Operatoren mit weiterreichenden Eigenschaften definiert und der durch sie erzeugte Operatorenring untersucht. Da es einerseits nicht möglich ist, diese Ergebnisse hier in kurzen Worten darzustellen und andererseits die Beweise dazu teilweise sehr umfangreich sind, wurde die vorliegende Arbeit in zwei Kapitel eingeteilt, von denen Kapitel I mit den §§ 1—4 nur Definitionen und Ergebnisse enthält, während man im Kapitel II mit den §§ 6—10 die zugehörigen Beweise findet. Das erste Kapitel ist so ausführlich gehalten, daß die genauen Ergebnisse dort leicht nachgeschlagen werden können. In der Einleitung sollen daher nur einige allgemeine Richtlinien skizziert werden.

Bei einer Verallgemeinerung der HECKE-Operatoren hat man ein Faktum zu beachten, wenn man im Falle $n > 1$ nicht bei formalen Ansätzen stecken bleiben will: Setzt man für $n = 1$ in (1) nämlich $k = 0$, legt also eine Modulfunktion zugrunde, dann stimmt $f/T(g)$ bis auf einen Faktor mit der Spur der Modulargleichung der komplexen Multiplikation der elliptischen Modulfunktionen überein. Darüber hinaus nehmen die zur Definition von $T(g)$ verwendeten Transformationen g-ter Ordnung in der komplexen Multiplikation eine so zentrale Stelle ein, daß man guttut, ihre sinnvolle und möglichst weitreichende Verallgemeinerung in den Mittelpunkt der Überlegungen für $n > 1$ zu stellen.

Dieser Sachverhalt erfordert, daß man sich von der komplexen Multiplikation der *abelschen Funktionen in n Variablen* (als naturgemäße Verallgemeinerung der elliptischen Funktionen) leiten läßt, da sich in diesem Falle in zwingender Weise eine Verallgemeinerung der Transformationen g-ter Ordnung aufdrängt (§ 1). Dort ist es aber so, daß es unendlich viele gleichberechtigte Gruppen gibt, die sich als *Invarianzgruppen* abelscher Funktionen darbieten, von denen jede innerhalb der Theorie der abelschen Funktionen den gleichen Platz einnimmt, den die gewöhnliche Modulgruppe innerhalb der Theorie der elliptischen Funktionen innehat (§ 2)[4]). Diese Invarianzgruppen, von denen je zwei stets kommensurabel sind, können als *Einheitengruppen* von schiefsymmetrischen Matrizen aufgefaßt werden und sind bereits vom Verfasser [8] genauer untersucht worden. Man hat also zuerst zu jeder Invarianzgruppe eine lineare Schar von Relativinvarianten in Analogie zur Schar der Modulformen n-ten Grades zu definieren und für diese dann eine Verallgemeinerung der HECKE-Operatoren anzugeben. Jetzt ist aber kein Grund dafür ersichtlich, daß diese Operatoren eine gegebene Schar in sich abzubilden

[3]) Man kann sich leicht überlegen, daß der dort definierte Operator nicht allgemeiner gebildet werden kann, wenn man fordert, daß er die Schar der Modulformen n-ten Grades in sich abbildet.

[4]) Die Auszeichnung der Modulgruppe n-ten Grades unter ihnen ist in diesem Zusammenhang nur dadurch bedingt, daß sie einmal in der symplektischen Gruppe enthalten und andererseits arithmetisch am einfachsten zugänglich ist.

haben; sie können daher in wesentlich allgemeinerer Form als bei MAASS definiert werden[5]). Stellt man sich einmal auf den hier gewählten Standpunkt der Analogie zur komplexen Multiplikation der abelschen Funktionen, dann wird — wie in § 1 ausgeführt wird — die Definition des verallgemeinerten Operators in natürlicher Weise nahegelegt. Dieser Operator kann für jede ganze umkehrbare Matrix $\mathfrak{G}$ von n Zeilen und Spalten durch ein Vertretersystem der verallgemeinerten Transformationen g-ter Ordnung definiert werden und bildet die lineare Formenschar zu einer der oben erwähnten Invarianzgruppen in eine andere solche Schar ab (§ 3). Durch ihn kann also gleichzeitig der Übergang von einer Schar zu einer anderen vollzogen werden. Vom prinzipiellen Standpunkt aus ist diese Eigenschaft allein — unabhängig von der Hoffnung auf zahlentheoretische Anwendungen — eine hinreichende Begründung für eine genauere Untersuchung des Mechanismus der Operatoren.

Zu der Durchführung des geschilderten Leitgedankens und vollständigen Ausschöpfung des Ansatzes ist zu bemerken, daß *erstens* im wesentlichen vier Arten von Operatoren zu erklären sind, von denen zwei den HECKE-Operatoren (§ 3) und die restlichen zwei bei $n = 1$ dem Einheitsoperator entsprechen (§ 2), und *zweitens* jeder Operator zur vollständigen Charakterisierung zweier Argumente bedarf, durch die Definitionsbereich und Wertevorrat festgelegt sind. Man wird erstreben, möglichst vollständige Verknüpfungsrelationen für alle diese Operatoren zu erhalten — ein Ziel, das noch nicht ganz erreicht ist — und dann versuchen, durch rein algebraische Schlußweisen die Struktur des Operatorenringes aufzuhellen. Der allgemeine Mechanismus der Operatoren scheint äußerst kompliziert zu sein; in voller Allgemeinheit kann aber z. B. das Analogon der aus (2) folgenden Formel

$$T(g)\,T(h) = T(gh), \quad (g,h) = 1,$$

bewiesen werden. Dagegen gelingt für eine gewisse Klasse von einfach gebauten Matrizen $\mathfrak{G}$ der Beweis einer Verallgemeinerung der Gl. (2) und (3). Die genau Formulierung dieser Behauptungen findet man in den §§ 3—4.

In der vorliegenden Arbeit wird bewußt nur der Teil der Operatorentheorie in Angriff genommen, der Strukturaussagen über den Operatorenring zuläßt, während die Wirkung der Operatoren auf die Fourierentwicklung und die sich daraus ergebenden Relationen zwischen den Fourierkoeffizienten einer späteren Arbeit vorbehalten sind.

5. Die im folgenden verwendeten Bezeichnungen, Abkürzungen und Definitionen allgemeiner Art sind — sofern sie nicht in der vorliegenden Arbeit neu auftreten — ausführlich in [6], [7] und [8] dargelegt. Diese drei Arbeiten werden mit MF I, MF II und ES zitiert. Im § 5 wird aber außerdem eine Zusammenstellung der häufig benutzten Abkürzungen für Gruppen, Vertretersysteme, spezielle Matrizen usw. gegeben, die die Lektüre erleichtern wird.

[5]) In ähnlicher Weise zeigte sich vor kurzem [5], daß bei der HILBERTschen Modulgruppe Definitionsbereich und Wertevorrat der Verallgemeinerung des HECKE-Operators nicht übereinstimmen.

Für stete Anteilnahme, wertvolle Anregungen und viele Ratschläge spreche ich hiermit Herrn Prof. Dr. HANS PETERSSON meinen herzlichen Dank aus.

I. Ergebnisse

§ 1. Exkurs über abelsche Funktionen

Die HECKE-Operatoren $T(g)$ als Summe von Transformationen g-ter Ordnung haben ihren Ursprung in der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen. Für eine Verallgemeinerung der Operatorentheorie wird man sich im Ansatz durch die komplexe Multiplikation der abelschen Funktionen leiten lassen, denn rein formale Verallgemeinerungen bieten sich in mehrfacher Weise an. Es soll daher zuerst eine *heuristische Überlegung* durchgeführt werden, durch die eine bestimmte Definition der Operatoren für $n > 1$ nahegelegt wird.

1. Eine Funktion $f(\mathfrak{u}) = f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ der komplexen Variablen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ heißt eine *abelsche Funktion*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) $f(\mathfrak{u})$ ist meromorph für alle komplexen u_k,

b) es gibt $2n$ reell linear unabhängige komplexe Vektoren $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2, \ldots, \mathfrak{w}_{2n}$ von n Komponenten mit

$$f(\mathfrak{u} + \mathfrak{w}_\nu) = f(\mathfrak{u}), \qquad \nu = 1, 2, \ldots 2n.$$

Die Vektoren $\mathfrak{w}_\nu$ kann man zu einer Matrix

$$\mathfrak{W}^{(n, 2n)} = (\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2, \ldots, \mathfrak{w}_{2n})$$

zusammenfassen, die als *Periodenmatrix* von $f(\mathfrak{u})$ bezeichnet wird. Aus der Definition ersieht man sofort, daß die abelschen Funktionen zur Periodenmatrix $\mathfrak{W}$ einen Körper $A(\mathfrak{W})$ bilden. $A(\mathfrak{W})$ ist isomorph einer einfachen algebraischen Erweiterung des Körpers von n Unbestimmten über dem Körper der komplexen Zahlen. Einen Beweis dieses Satzes findet man in [15].

Es ist wohlbekannt, daß es genau dann eine abelsche Funktion zur Periodenmatrix $\mathfrak{W}$ gibt, wenn eine ganze Matrix $\mathfrak{F}^{(2n)}$ mit

$$\alpha)\ \mathfrak{F}' = -\mathfrak{F},\ |\mathfrak{F}| \neq 0,$$
$$\beta)\ \mathfrak{W}\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{W}' = 0,$$
$$\gamma)\ i\,\overline{\mathfrak{W}}\mathfrak{F}^{-1}\,\mathfrak{W}' > 0$$

existiert.

Eine abelsche Funktion zur Periodenmatrix $\mathfrak{W}$ hängt nur von dem durch die Spaltenvektoren $\mathfrak{w}_\nu$ aufgespannten Gitter ab, d. h. man kann $\mathfrak{W}$ mit einem rechtsseitigen unimodularen Faktor multiplizieren, wodurch lediglich der Übergang zu einer neuen Basis des Gitters vollzogen wird. Bezeichnet man eine abelsche Funktion zur Periodenmatrix $\mathfrak{W}$ durch $f(\mathfrak{u}; \mathfrak{W}, \mathfrak{F})$, so drückt sich dieser Sachverhalt durch die Gleichung

$$f(\mathfrak{u}; \mathfrak{W}\mathfrak{U}, \mathfrak{U}'\mathfrak{F}\mathfrak{U}) = f(\mathfrak{u}; \mathfrak{W}, \mathfrak{F}), \quad \mathfrak{U}^{(2n)} \text{ unimodular},$$

aus. Unter der *Invarianzgruppe* von $f(\mathfrak{u}; \mathfrak{W}, \mathfrak{F})$ soll nun die Gruppe derjenigen Basistransformationen verstanden werden, die die Matrix $\mathfrak{F}$ festlassen.

Die Invarianzgruppe von $f(\mathfrak{u};\mathfrak{W},\mathfrak{F})$ ist daher die Gruppe der unimodularen Matrizen $\mathfrak{U}$ mit

$$\mathfrak{U}'\,\mathfrak{F}\,\mathfrak{U} = \mathfrak{F}. \tag{1.1}$$

Im bekannten Falle $n = 1$ kann für jede Periodenmatrix $\mathfrak{w} = (\omega_1, \omega_2)$ ohne Einschränkung

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

angenommen werden, so daß die Invarianzgruppen stets zur vollen Modulgruppe werden. Bei $n > 1$ sind die Invarianzgruppen zu verschiedenen abelschen Funktionen im allgemeinen verschieden.

2. Ersetzt man in der Funktion $f(\mathfrak{u};\mathfrak{W})$ aus $A(\mathfrak{W})$ den Vektor $\mathfrak{u}$ durch $\mathfrak{R}\,\mathfrak{u}$, $\mathfrak{R}^{(n)}$ komplex, $|\mathfrak{R}| \neq 0$, so erhält man den Körper $A(\mathfrak{R}\,\mathfrak{W})$. $\mathfrak{R}$ heißt nun ein *Multiplikator* von $\mathfrak{W}$, wenn

$$A(\mathfrak{R}\mathfrak{W}) \subseteq A(\mathfrak{W})$$

erfüllt ist. Man überlegt sich leicht, daß die Multiplikatoren von $\mathfrak{W}$ einen Ring bilden. Außerdem zeigt man, daß $\mathfrak{R}$ genau dann ein Multiplikator ist, wenn es ein ganzes $\mathfrak{A}^{(2n)}$ mit

$$\mathfrak{R}\,\mathfrak{W} = \mathfrak{W}\,\mathfrak{A} \tag{1.2}$$

gibt. Die der Matrix $\mathfrak{F}$ bei der Periodenmatrix $\mathfrak{W}\,\mathfrak{A}$ entsprechende Matrix $\tilde{\mathfrak{F}}$ hat die Form

$$\tilde{\mathfrak{F}} = \mathfrak{A}'\mathfrak{F}\,\mathfrak{A}\,. \tag{1.3}$$

Der durch die Matrizen $\mathfrak{A}$ gebildete Ring ist dem Multiplikatorenring isomorph. Bei der Zerlegung $\mathfrak{W} = (\mathfrak{W}_1^{(n)}, \mathfrak{W}_2^{(n)})$ ist $\mathfrak{W}_2$ umkehrbar, d. h.. bei

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{W}_2(\mathfrak{Z}', \mathfrak{E}),\quad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1' & \mathfrak{A}_3' \\ \mathfrak{A}_2' & \mathfrak{A}_4' \end{pmatrix},\quad \mathfrak{A}_j = \mathfrak{A}_j^{(n)}, \qquad 1 \leq j \leq 4$$

folgt aus (1.2) leicht

$$\mathfrak{Z} = (\mathfrak{A}_1\mathfrak{Z} + \mathfrak{A}_2)\,(\mathfrak{A}_3\mathfrak{Z} - \mathfrak{A}_4)^{-1},$$

so daß nicht-triviale Multiplikatoren nur für spezielle Periodenmatrizen existieren.

3. In diesem Zusammenhange können bei $n = 1$ die Transformationen g-ter Ordnung, d. h. die zweireihigen ganzen Matrizen der Determinante g, gedeutet werden als die in (1.3) auftretenden ganzen Matrizen $\mathfrak{A}^{(2)}$ mit

$$\mathfrak{A}'\,\mathfrak{J}\,\mathfrak{A} = g \cdot \mathfrak{J} = \begin{pmatrix} 0 & g \\ -g & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Analog hat man im Falle $n > 1$ zu verfahren. Als Verallgemeinerung der Transformationen g-ter Ordnung werden die Matrizen $\mathfrak{A}$ in (1.3) genommen. Die Menge aller dieser Matrizen ist nun in möglichst viele Teilsysteme zu unterteilen. Man wird zu diesem Zwecke hier aber nicht die Matrizen mit fester Determinante zu einem System zusammenfassen, sondern sich durch (1.3) leiten lassen und alle ganze $\mathfrak{A}$ mit

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{F}\,\mathfrak{A} = \tilde{\mathfrak{F}} \tag{1.5}$$

bei festen schiefsymmetrischen Matrizen $\mathfrak{F}$ und $\tilde{\mathfrak{F}}$ als Analoga der Transformationen g-ter Ordnung definieren. Der dem $T(g)$ entsprechende Operator ist dann sinngemäß als Summe über ein volles Vertretersystem von Matrizen $\mathfrak{A}$ mit der Eigenschaft (1.5) bezüglich der Gruppe der Einheiten von $\mathfrak{F}$ zu definieren.

Diese Definition unterscheidet sich wesentlich von dem MAASSschen Ansatz [10], bei dem in Verallgemeinerung von (1.4) nur die speziellen Matrizen

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{J},\ \tilde{\mathfrak{F}} = g\,\mathfrak{J},\ \mathfrak{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{E}^{(n)} \\ -\mathfrak{E}^{(n)} & 0 \end{pmatrix}$$

betrachtet werden. Bei Kenntnis dieser MAASSschen Arbeit ist es einleuchtend, daß man allein für die Arithmetik der ganzen Lösungen $\mathfrak{A}$ von (1.5) einen zwar elementaren aber umfangreichen Apparat benötigt, der notwendig ist, da die meisten Aussagen über die Operatoren auf entsprechende Aussagen über die Matrizen $\mathfrak{A}$ zurückgeführt werden.

§ 2. Über spezielle Untergruppen der symplektischen Gruppe

Im ersten Paragraphen hatte man gesehen, daß die Invarianzgruppen abelscher Funktionen bei der Definition der verallgemeinerten HECKE-Operatoren die Rolle übernehmen, die die gewöhnliche Modulgruppe in der bekannten T_n-Theorie einnimmt. Der vorliegende Paragraph bringt daher eine Zusammenstellung der Ergebnisse über diese Gruppen, die zugehörigen automorphen Formen und gewisse einfache Operatoren. Da man die Invarianzgruppen von abelschen Funktionen stets als Einheitengruppen schiefsymmetrischer Matrizen auffassen konnte, handelt es sich bei den gruppentheoretischen Aussagen um eine Wiederholung eines Teils der Ergebnisse von ES.

1. Unter der *Einheitengruppe* einer schiefsymmetrischen (oder symmetrischen) Matrix $\mathfrak{F}$ wird dabei allgemein die Gruppe der unimodularen Matrizen $\mathfrak{V}$ mit

$$\mathfrak{F}[\mathfrak{V}] = \mathfrak{V}'\mathfrak{F}\mathfrak{V} = \mathfrak{F}$$

verstanden. Ist $\mathfrak{F}$ speziell $2n$-reihig, schiefsymmetrisch, rational und umkehrbar, dann kann man nach einem bekannten Satz von JACOBI ein unimodulares $\mathfrak{U}$ so finden, daß

$$\mathfrak{F}[\mathfrak{U}] = \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{H} \\ -\mathfrak{H}' & 0 \end{pmatrix},\quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}^{(n)},$$

gilt, und weiter noch $\mathfrak{H}$ als *Elementarteilermatrix* annehmen. Eine reelle Matrix $\mathfrak{H}$ heißt dabei Elementarteilermatrix (abgekürzt ET-Matrix), wenn gilt

$$\mathfrak{H} = [h_1, h_2, \ldots, h_n],\quad h_k > 0,$$
$$h_k^{-1} h_{k+1} \text{ ganz rational für } k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{2.1}$$

Für jede umkehrbare Matrix $\mathfrak{H}$, für die es eine Zahl a so gibt, daß $a \cdot \mathfrak{H}$ ganz ist, wird die ihr nach dem Elementarteilersatz eindeutig zugeordnete ET-Matrix mit $\mathfrak{H}^E$ bezeichnet. Zur Abkürzung definiert man nun für jede quadratische Matrix $\mathfrak{H}$ eine quadratische Matrix der doppelten Zeilen- und Spaltenzahl durch

$$\mathfrak{H}^A = \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{H} \\ -\mathfrak{H}' & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Zum Studium der Einheitengruppen der schiefsymmetrischen Matrizen $\mathfrak{F}$ kann man sich also auf die speziellen schiefsymmetrischen Matrizen der Form $\mathfrak{H}^A$ beschränken und dabei $\mathfrak{H}$ in ET-Form annehmen. Die hochgestellten Buchstaben A und E werden zweckmäßig als Operatoren aufgefaßt. Zum Beispiel wird für $(\mathfrak{H}^A)^{-1}$ kurz $\mathfrak{H}^{A-1}$ geschrieben.

Von jetzt ab sind *ohne Ausnahme* die Buchstaben $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}$ (evtl. mit Indizes) für ganze ET-Matrizen vorbehalten, ohne daß dies an jeder Stelle besonders vermerkt wird.

2. Die Einheitengruppe von $\mathfrak{H}^A$, d. h. die Gruppe der ganzen Matrizen $\mathfrak{M}$, die der Bedingung

$$\mathfrak{H}^A[\mathfrak{M}] = \mathfrak{H}^A$$

genügen, wird mit $M_0(\mathfrak{H})$ bezeichnet. Diese Gruppen sind in ES genauer untersucht worden. Wie schon früher erwähnt, ist es für die folgenden Untersuchungen sinnvoll, zu solchen konjugierten Gruppen überzugehen, die Untergruppen der symplektischen Gruppe sind. Man betrachte dazu die Matrizen

$$\mathfrak{H}^B = \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & 0 \\ 0 & \mathfrak{H} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{H}^S = \begin{pmatrix} \mathfrak{H} & 0 \\ 0 & \mathfrak{H}^{-1} \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

und definiere

$$M(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}^B \cdot M_0(\mathfrak{H}) \cdot \mathfrak{H}^{B-1}. \tag{2.4}$$

Eine einfache Umschreibung von ES (1.8) und Satz 5 liefert:

Satz 2.1. *Für alle ET-Matrizen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}$ gilt*

$$M(\mathfrak{H};\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}^S \cdot M(\mathfrak{H}\,\mathfrak{G}) \cdot \mathfrak{G}^{S-1} \subseteq M(\mathfrak{H}) \subseteq \Sigma_n$$

und alle Gruppen $M(\mathfrak{H})$ sind Kongruenzgruppen im Sinne von MF I. Der Index von $M(\mathfrak{H};\mathfrak{G})$ in $M(\mathfrak{H})$ ist endlich.

Satz 2.2. *Für teilerfremde ET-Matrizen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ ist*

$$M(\mathfrak{H};\mathfrak{G}_1) \cdot M(\mathfrak{H};\mathfrak{G}_2) = M(\mathfrak{H}),\ M(\mathfrak{H};\mathfrak{G}_1) \cap M(\mathfrak{H};\mathfrak{G}_2) = M(\mathfrak{H};\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2).$$

Dabei heißen zwei Matrizen *teilerfremd*, wenn sie ganz sind und ihre Determinanten im gewöhnlichen Sinne teilerfremd sind.

3. Da $M(\mathfrak{H})$ Kongruenzgruppe in Σ_n ist, gelten alle Ergebnisse von MF I und MF II über die lineare Schar $\{M(\mathfrak{H}), k\} = \{M(\mathfrak{H}), k, 1\}$ der Formen zur Gruppe $M(\mathfrak{H})$ und der Dimension k. Ist insbesondere $\varrho(\mathfrak{H}, k)$ der Rang der Schar $\{M(\mathfrak{H}), k\}$, dann folgt aus MF I (Satz 4 und Hilfssatz 1) sofort

$$\varrho(\mathfrak{H}, k) \leqq c(\mathfrak{H}) \cdot (-k)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

für $-k > 0$, wobei die Konstante $c(\mathfrak{H})$ nur von $\mathfrak{H}$ abhängt. Es darf ohne Einschränkung $-k > 0$ angenommen werden, da nur in diesem Falle nichttriviale Formen zur Gruppe $M(\mathfrak{H})$ existieren.

Für jede Form $f(\mathfrak{Z})$ aus $\{M(\mathfrak{H}), k\}$ kann man jetzt einen Operator $V(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{G}^2)$ durch

$$f(\mathfrak{Z})/V(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{G}^2) = f(\mathfrak{Z}) \underset{(k)}{/} \mathfrak{G}^S \tag{2.5}$$

definieren. Wegen Satz 2.1 sieht man sofort, daß

$$\{M(\mathfrak{H}),k\}/V(\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{S}^2) \subseteq \{M(\mathfrak{H}\mathfrak{S}^2),k\}$$

erfüllt ist[6]). Entsprechend wird für jede Form $g(\mathfrak{Z})$ aus $\{M(\mathfrak{H}\mathfrak{S}^2),k\}$ ein Operator $V^*(\mathfrak{H}\mathfrak{S}^2,\mathfrak{H})$ durch

$$g(\mathfrak{Z})/V^*(\mathfrak{H}\mathfrak{S}^2,\mathfrak{H}) = \frac{1}{[M(\mathfrak{H}):M(\mathfrak{H};\mathfrak{S})]} \sum_{M(\mathfrak{H})\,l\,M(\mathfrak{H};\mathfrak{S})} g\,\underset{(k)}{/}\,\mathfrak{S}^{S-1}\mathfrak{M} \tag{2.6}$$

definiert[6]). Dabei ist für zwei multiplikative Gruppen $\Gamma' \subseteq \Gamma$ unter

$$\Gamma\, l\, \Gamma' \quad \text{bzw.} \quad \Gamma\, r\, \Gamma'$$

stets ein Vertretersystem von Γ bezüglich

Linksassoziation bzw. Rechtassoziation

nach Γ' verstanden. Man sieht leicht, daß in (2.6) die Definition des Operators von der Auswahl des Vertretersystems unabhängig ist und

$$\{M(\mathfrak{H}\mathfrak{S}^2),k\}/V^*(\mathfrak{H}\mathfrak{S}^2,\mathfrak{H}) \subseteq \{M(\mathfrak{H}),k\}$$

gilt. Rein algebraisch erhält man ohne Schwierigkeiten

$$\begin{aligned} V(\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2)\,V(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2,\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2\mathfrak{S}_2^2) &= V(\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2\mathfrak{S}_2^2) \\ V^*(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2\mathfrak{S}_2^2,\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2)\,V^*(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2,\mathfrak{H}) &= V^*(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2\mathfrak{S}_2^2,\mathfrak{H}) \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$V(\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{S}^2)\,V^*(\mathfrak{H}\mathfrak{S}^2,\mathfrak{H}) = 1. \tag{2.8}$$

Während also $V\cdot V^*$ bei gleichen Argumenten nach (2.8) stets die Identität darstellt, ist der Operator $V^*(\mathfrak{H}\mathfrak{S}^2,\mathfrak{H})\,V(\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{S}^2)$, der ja auch eine Schar in sich abbildet, keineswegs von so einfacher Wirkung.

4. Zur Untersuchung von $V^*\cdot V$ werde

$$\delta(\mathfrak{A}) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \mathfrak{A} \text{ ganze ET-Matrix} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.9}$$

und

$$W(\mathfrak{H};\mathfrak{S}) = \delta(\mathfrak{H}\,\mathfrak{S}^{-2})\,V^*(\mathfrak{H},\mathfrak{H}\,\mathfrak{S}^{-2})\,V(\mathfrak{H}\,\mathfrak{S}^{-2},\mathfrak{H}) \tag{2.10}$$

definiert. Man hat

$$\{M(\mathfrak{H}),k\}/W(\mathfrak{H};\mathfrak{S}) \subseteq \{M(\mathfrak{H}),k\},$$

aber $W(\mathfrak{H};\mathfrak{S})$ ist bei festem $\mathfrak{H}$ nur für endlich viele $\mathfrak{S}$ nicht identisch Null.

In Anlehnung an die natürlichen Zahlen nennt man jetzt ein System G von ganzen ET-Matrizen *kanonisch*, wenn es Matrizen $\mathfrak{S}_\nu, \nu = 1, 2, \ldots,$ in G derart gibt, daß

1. für alle $\nu \neq \mu$ ist $(|\mathfrak{S}_\nu|, |\mathfrak{S}_\mu|) = 1$,
2. jedes $\mathfrak{S}$ aus G läßt sich in der Form

$$\mathfrak{S} = \prod_\nu \mathfrak{S}_\nu^{\alpha_\nu}, \quad \alpha_\nu \geq 0 \text{ ganz},$$

schreiben,

erfüllt ist. Nennt man außerdem eine Matrix $\mathfrak{S}$ *einfach*, wenn sie die Form

$$\mathfrak{S} = [1, 1, \ldots, 1, g], \quad g \text{ natürliche Zahl},$$

[6]) Das erste (bzw. zweite) Argument im Operator soll andeuten, welche Schar als Definitionsbereich zu nehmen ist (bzw. in welche Schar der Operator abbildet).

hat, dann ist klar, daß z. B. die einfachen Matrizen ein kanonisches System bilden, aber dieses ist für $n > 1$ nicht das einzige.

Satz 2.3. a) $W(\mathfrak{H};\mathfrak{S}^{\nu})\,W(\mathfrak{H};\mathfrak{S}^{\mu}) = W(\mathfrak{H};\mathfrak{S}^{\varrho})$, $\varrho = \mathrm{Max}(\nu,\mu)$.

b) *Für teilerfremdes $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ ist*

$$W(\mathfrak{H};\mathfrak{S}_1)\,W(\mathfrak{H};\mathfrak{S}_2) = W(\mathfrak{H};\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2).$$

c) *Ist G ein kanonisches System, dann sind alle $W(\mathfrak{H};\mathfrak{S})$ mit $\mathfrak{S}$ aus G vertauschbar.*

Ist (f,g) das nach MF II definierte Skalarprodukt, dann gilt:

Satz 2.4. *Für f, h aus $\{M(\mathfrak{H}),k\}$, g aus $\{M(\mathfrak{H}\mathfrak{S}^2),k\}$, f Spitzenform, ist*

$$(f/V(\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{S}^2),g) = (f,g/V^*(\mathfrak{H}\mathfrak{S}^2,\mathfrak{H})),$$
$$(f/W(\mathfrak{H};\mathfrak{S}),h) = (f,h/W(\mathfrak{H};\mathfrak{S})).$$

Durch simultane Transformation folgt jetzt unter Verwendung von Satz 2.3 c) leicht

Satz 2.5. *Ist G ein kanonisches System, dann gibt es eine Orthogonalbasis f_j der Teilschar der Spitzenformen von $\{M(\mathfrak{H}),k\}$ mit*

$$f_j/W(\mathfrak{H};\mathfrak{S}) = \chi_j(\mathfrak{H};\mathfrak{S})\cdot f_j$$

für alle $\mathfrak{S}$ aus G. χ_j nimmt nur die Werte 0 und 1 an.

Die letzte Aussage des Satzes erhält man sofort aus der Relation

$$W^2(\mathfrak{H};\mathfrak{S}) = W(\mathfrak{H};\mathfrak{S}),$$

die wiederum leicht aus (2.7) und (2.8) folgt.

§ 3. Die Operatoren $T(\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{K})$ und $T^*(\mathfrak{H}\mathfrak{K},\mathfrak{H})$

1. Die Festsetzung, daß die Buchstaben $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{S}$ stets ganze ET-Matrizen bezeichnen, bleibt bestehen; darüber hinaus wird der Buchstabe $\mathfrak{K}$ für ganze positive Diagonalmatrizen mit von Null verschiedener Determinante reserviert.

Nach den Überlegungen des § 1 sind die ganzen Matrizen $\mathfrak{A}^{(2n)}$, die der Bedingung

$$\mathfrak{H}^{A}[\mathfrak{A}] = \mathfrak{S}^{A} \tag{3.1}$$

genügen, als die Analoga der Transformationen g-ter Ordnung aufzufassen.

Satz 3.1. *Ist* (3.1) *in ganzen Matrizen $\mathfrak{A}$ lösbar, dann läßt sich $\mathfrak{S}$ in der Form $\mathfrak{S} = \mathfrak{H}\,\mathfrak{K}$ mit ganzer Diagonalmatrix $\mathfrak{K}$ schreiben.*

Im Falle $\mathfrak{S} = \mathfrak{H}\,\mathfrak{K}$ faßt man alle Lösungen von (3.1) zu einem System $A_0(\mathfrak{H},\mathfrak{H}\,\mathfrak{K})$ zusammen, wobei in Zukunft immer vorausgesetzt wird, daß beide Argumente in ET-Form gegeben sind.

2. Man geht nun wieder zu einem transformierten System über, welches in Σ_n enthalten ist, und definiert dazu

$$A(\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{K}) = \mathfrak{H}^{B}\cdot A_0(\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{K})\cdot(\mathfrak{H}\mathfrak{K})^{B^{-1}}. \tag{3.2}$$

Die Formulierung der verallgemeinerten HECKE-Operatoren benutzt ausschließlich die Systeme $A(\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{K})$, während die Beweise stets in der arithmetisch leichter zugänglichen Form der Systeme $A_0(\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{K})$ geführt werden.

Man erkennt sofort, daß $A(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$ stets volle Klassen bezüglich Linksassoziation nach $M(\mathfrak{H})$ bzw. Rechtsassoziation nach $M(\mathfrak{H}\mathfrak{K})$ enthält. Ein volles Vertretersystem von Matrizen $\mathfrak{A}$ aus $A(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$ bezüglich Linksassoziation nach $M(\mathfrak{H})$ (bzw. Rechtsassoziation nach $M(\mathfrak{H}\mathfrak{K})$) wird stets mit

$$L(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}) \quad (\text{bzw. } R(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}))$$

bezeichnet.

Satz 3.2. *Die Anzahlen* $\alpha_l(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$ *bzw.* $\alpha_r(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$ *der Elemente von* $L(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$ *bzw.* $R(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$ *ist unabhängig von* $\mathfrak{H}$ *durch* $|\mathfrak{K}|^{4n^2}$ *beschränkt.*

Die Berechnung der Zahlen $\alpha_l(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$ und $\alpha_r(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$, die ja für $n = 1$ leicht durchführbar ist, bereitet für $n > 1$ erhebliche Schwierigkeiten und ist nur in Spezialfällen möglich. Man wird aber später sehen, daß eine Reduktion auf diejenigen Anzahlen möglich ist, bei denen $|\mathfrak{K}|$ Potenz einer Primzahl ist.

3. Für jedes $f(\mathfrak{Z})$ aus $\{M(\mathfrak{H}), k\}$ wird nun ein Operator $T(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$ durch

$$f(\mathfrak{Z})/T(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}) = |\mathfrak{K}|^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mathfrak{A} \in L(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})} f(\mathfrak{Z}) \underset{(k)}{/} \mathfrak{A} \tag{3.3}$$

definiert[6]). Die nach Satz 3.2 endliche Summe ist also über ein volles Vertretersystem $L(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$ zu erstrecken; sie hängt von der Auswahl der Vertreter nicht ab. Da jeder Summand auf der rechten Seite von (3.3) in H_n holomorph ist, gilt das auch für die linke Seite. Da andererseits mit $\mathfrak{A}$ auch $\mathfrak{A}\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}$ aus $M(\mathfrak{H}\mathfrak{K})$, ein volles Vertretersystem $L(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$ durchläuft, hat man sofort

$$\{M(\mathfrak{H}), k\}/T(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}) \subseteq \{M(\mathfrak{H}\mathfrak{K}), k\}.$$

Im Gegensatz zu $n = 1$ werden also bei $n > 1$ die Scharen $\{M(\mathfrak{H}), k\}$ im allgemeinen nicht in sich abgebildet.

An manchen Stellen ist es zweckmäßig, einen *normierten* Operator $T[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}]$ zu verwenden, der durch

$$T[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}] = \frac{|\mathfrak{K}|^{\frac{1}{2}}}{\alpha_l(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})} T(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}) \tag{3.4}$$

definiert werden soll. Die Ergebnisse werden wahlweise mit $T(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$ oder $T[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}]$ formuliert werden.

Entsprechend der Definitionen der Operatoren in § 2 wird auch hier ein weiterer Operator $T^*(\mathfrak{H}\mathfrak{K}, \mathfrak{H})$ für jedes $g(\mathfrak{Z})$ aus $\{M(\mathfrak{H}\mathfrak{K}), k\}$ durch

$$g(\mathfrak{Z})/T^*(\mathfrak{H}\mathfrak{K}, \mathfrak{H}) = |\mathfrak{K}|^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mathfrak{A} \in R(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})} g(\mathfrak{Z}) \underset{(k)}{/} \mathfrak{A}^{-1} \tag{3.5}$$

erklärt[6]). Man hat sofort

$$\{M(\mathfrak{H}\mathfrak{K}), k\}/T^*(\mathfrak{H}\mathfrak{K}, \mathfrak{H}) \subseteq \{M(\mathfrak{H}), k\}$$

und führt außerdem den zugeordneten normierten Operator durch

$$T^*[\mathfrak{H}\mathfrak{K}, \mathfrak{H}] = \frac{|\mathfrak{K}|^{\frac{1}{2}}}{\alpha_r(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})} T^*(\mathfrak{H}\mathfrak{K}, \mathfrak{H}) \tag{3.6}$$

ein.

4. Es folgen nun verschiedene wichtige Ergebnisse über die Verknüpfung der Operatoren T bzw. T^* für verschiedene Argumente. Der allgemeinste

Fall läßt sich allerdings bisher noch nicht befriedigend erledigen, es handelt sich hier vorläufig nur um die Kompositionsformel, der im Falle $n = 1$ die Gleichung

$$T(g) \cdot T(h) = T(g \cdot h), \quad (g, h) = 1$$

entspricht.

Satz 3.3. *Für teilerfremde Matrizen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ ist*

a) $T(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1)\, T(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_1, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2) = T(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2)$,

b) $T^*(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1)\, T^*(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_1, \mathfrak{H}) = T^*(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2, \mathfrak{H})$,

c) $T^*(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_1, \mathfrak{H})\, T(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_2) = T(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_1, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2)\, T^*(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_2)$.

Dieser Satz besagt mit anderen Worten, daß das quadratische Schema

$$\begin{tikzcd}
 & \{M(\mathfrak{H}), k\} \arrow[dl, shift right, "T"'] \arrow[dr, shift left, "T"] & \\
\{M(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_1), k\} \arrow[ur, shift right, "T^*"'] \arrow[dr, shift right, "T"'] & & \{M(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_2), k\} \arrow[ul, shift left, "T^*"] \arrow[dl, shift left, "T"] \\
 & \{M(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2), k\} \arrow[ul, shift right, "T^*"'] \arrow[ur, shift left, "T^*"] &
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist, d. h. daß der Übergang von einer Schar des Schemas zu der diagonal gegenüberliegenden Schar nicht vom Wege abhängt. Im Schema sind die Operatoren T und T^* natürlich mit den richtigen Argumenten zu nehmen.

Ein ähnlicher Sachverhalt liegt vor, wenn man die Operatoren mit den in § 2 definierten Operatoren verknüpft.

Satz 3.4. *Für teilerfremde Matrizen $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ ist*

a) $T(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{S}_2)\, V(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_2, \mathfrak{H}\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_1^2) = V(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2)\, T(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2, \mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2\mathfrak{S}_2)$,

b) $T^*(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_2, \mathfrak{H})\, V(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2) = V(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_2, \mathfrak{H}\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_1^2)\, T^*(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_1^2, \mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2)$,

sofern entweder

1. *$\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{S}_2$ teilerfremd sind*

oder

2. *$\mathfrak{S}_2$ einfach ist.*

Satz 3.5. *Für einfaches $\mathfrak{S}$ ist*

$$V(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{S}^2)\, T^*(\mathfrak{H}\mathfrak{S}^2, \mathfrak{H}) = [M(\mathfrak{H}) : M(\mathfrak{H}; \mathfrak{S})]\, T(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{S}^2)\, V^*(\mathfrak{H}\mathfrak{S}^2, \mathfrak{H}).$$

5. Über die allgemeinen Sätze 3.3 bis 3.5 hinaus kann man in speziellen Fällen wesentlich mehr aussagen, nämlich dann, wenn in $T(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$ die Matrix $\mathfrak{K}$ einfach und ihre Determinante Potenz einer Primzahl ist. Man nennt dazu eine Matrix $\mathfrak{P}$ eine *Primmatrix*, wenn sie die Form

$$\mathfrak{P} = [1, 1, \ldots, 1, p], \quad p \text{ Primzahl}$$

hat.

Satz 3.6. *Ist $\mathfrak{P}$ Primmatrix, dann gilt:*

a) $T(\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{P}^{\nu})\,T(\mathfrak{H}\mathfrak{P}^{\nu},\mathfrak{H}\mathfrak{P}^{\nu+1}) = T(\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{P}^{\nu+1}) + T(\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{P}^{\nu-1})\,V(\mathfrak{H}\mathfrak{P}^{\nu-1},\mathfrak{H}\mathfrak{P}^{\nu+1})$
für alle natürlichen Zahlen ν,

b) $T(\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{P})\,V(\mathfrak{H}\mathfrak{P},\mathfrak{H}\mathfrak{P}^3) = V(\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{P}^2)\,T(\mathfrak{H}\mathfrak{P}^2,\mathfrak{H}\mathfrak{P}^3)$,

c) $V(\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{P}^2)\,T^*[\mathfrak{H}\mathfrak{P}^2,\mathfrak{H}\mathfrak{P}] = T[\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{P}]$,

d) $T[\mathfrak{H}\mathfrak{P},\mathfrak{H}\mathfrak{P}^2]\,V^*(\mathfrak{H}\mathfrak{P}^2,\mathfrak{H}) = T^*[\mathfrak{H}\mathfrak{P},\mathfrak{H}]$.

Nach Teil a) dieses Satzes kann man also die Operatoren $T(\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{P}^{\nu})$ als Summen von Produkten in den Operatoren der Form $T(\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{P})$ und $V(\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{P}^2)$ schreiben, worauf im nächsten Paragraphen näher eingegangen werden soll. Daß sich die Multiplikationsformel formal von der Heckeschen Formel in [2] unterscheidet, liegt nur an der anderen Normierung der Operatoren.

Da aus den Beweisen der letzten Sätze gleichzeitig Multiplikationsformeln für die Anzahlen $\alpha_l(\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{R})$ und $\alpha_r(\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{R})$ entnommen werden können, gelten ähnliche Verknüpfungsrelationen auch für die normierten Operatoren $T[\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{R}]$, jedoch sind diese nicht mehr so einfach.

6. Nach MF II konnte auf der Teilschar der Spitzenformen aus $\{M(\mathfrak{H}),k\}$ ein Skalarprodukt (f,g) definiert werden, welches diese Teilschar zu einem metrischen Raum mit positiv definiter hermitescher Metrik macht. Petersson hat u. a. in [11] dargelegt, wie nützlich sich die Metrisierung der Modulformen im Falle $n = 1$ in der Operatorentheorie erweist. Als Hauptsatz der klassischen Theorie ist für Spitzenformen f oder g die Beziehung

$$(f|T(m),g) = (f,g|T(m))$$

anzusehen. Ein entsprechender Satz gilt bei $n > 1$:

Satz 3.7. *Für alle*

$$f \in \{M(\mathfrak{H}),k\},\quad g \in \{M(\mathfrak{H}\mathfrak{R}),k\},\quad h \in \{M(\mathfrak{H}\mathfrak{S}^2),k\},$$

ist

a) $(f|T[\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{R}],g) = (f,g|T^*[\mathfrak{H}\mathfrak{R},\mathfrak{H}])$,

b) $(f|V(\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{S}^2),h) = (f,h|V^*(\mathfrak{H}\mathfrak{S}^2,\mathfrak{H}))$,

sofern in jedem Skalarprodukt wenigstens ein Argument eine Spitzenform ist.

Aus der Definition einer Spitzenform ersieht man sofort, daß mit f auch $f|T$ und $f|V$ Spitzenformen sind. Nach Satz 2.5 hängen die Skalarprodukte im Teil a) nur von den Argumenten $f|T$ und g bzw. $g|T^*$ und f ab; sie können also z. B. auf der linken Seite zur Gruppe $M(\mathfrak{H}\mathfrak{R})$ und auf der rechten Seite zur Gruppe $M(\mathfrak{H})$ gebildet werden.

Ein weiterer Satz, der bei $n = 1$ nicht explizit formuliert wird, ist die folgende Aussage:

Satz 3.8. *Die Operatoren $T[\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{R}]$ und $V(\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{S}^2)$ sind gleichmäßig beschränkt, d. h. bei $\|f\|^2 = (f,f)$ gilt*

a) $\|f|T[\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{R}]\| \leqq \|f\|$,

b) $\|f|V(\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{S}^2)\| \leqq \|f\|$,

wenn f eine Spitzenform aus $\{M(\mathfrak{H}),k\}$ darstellt.

Dieser Satz ist jedoch nur im Rahmen einer allgemeinen Operatorentheorie von Interesse. Er überträgt sich wegen Satz 3.7 sofort auf die Operatoren T^* und V^*.

Während die Bestimmung von $T[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}]\,\Phi$ im allgemeinen Falle ziemlich schwer zu sein scheint, hat man

Satz 3.9. *Für einfaches* $\mathfrak{S}$ *ist* $T[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{S}]\,\Phi = \Phi$. Dabei bezeichnet Φ den in MF II definierten „Schrumpfungsoperator".

7. Wie schon erwähnt, ist die Bestimmung der Anzahlen α_l bzw. α_r im allgemeinen Falle nicht leicht. Es existieren zwischen ihnen jedoch einige Relationen, die hier zusammengestellt werden sollen.

Satz 3.10. a) *Setzt man* $K = M(\mathfrak{H}) \cap M(\mathfrak{H}\mathfrak{K})$, *dann gilt*

$$\alpha_r(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})\,[M(\mathfrak{H}\mathfrak{K}) : K] = \alpha_l(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})\,[M(\mathfrak{H}) : K].$$

b) $\alpha_l(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2) = \alpha_l(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1)\,\alpha_l(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_1, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2)$,

$\alpha_r(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2) = \alpha_r(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1)\,\alpha_r(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_1, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2)$,

$\alpha_r(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1)\,\alpha_l(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_2) = \alpha_l(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_1, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2)\,\alpha_r(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_2, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2)$,

wenn $\mathfrak{K}_1$ *und* $\mathfrak{K}_2$ *teilerfremd sind.*

c) *Ist* $\mathfrak{S}$ *einfach, dann hat man*

$$\alpha_l(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{S}) = \sum_{d \mid |\mathfrak{S}|} d$$

und

$$\alpha_r(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{S}^2) = \alpha_l(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{S}^2)\,[M(\mathfrak{H}) : M(\mathfrak{H}; \mathfrak{S})].$$

§ 4. Der Hilbert-Raum der Formenvektoren

Während bisher die Operatorentheorie für einzelne Scharen $\{M(\mathfrak{H}), k\}$ untersucht wurde, sollen diese Scharen und ihre Operatoren jetzt gleichzeitig betrachtet werden. Es zeigt sich dabei, daß es der Übergang zum direkten Produkt der Scharen erlaubt, die wesentlichen Resultate des § 3 in einfacher Form zu schreiben. Wie bisher sind die Buchstaben $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{S}$ für ganze ET-Matrizen vorbehalten.

1. Alle ganzen ET-Matrizen $\mathfrak{H}$ bezeichne man in irgendeiner Reihenfolge mit

$$\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{E}, \mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_3, \ldots$$

Ist jetzt eine für alle $\mathfrak{H}$ erklärte Funktion $c(\mathfrak{H})$ gegeben, so werde unter $\{c\}$ der unendlichdimensionale Vektor

$$\{c\} = \{c(\mathfrak{E}), c(\mathfrak{H}_2), c(\mathfrak{H}_3), \ldots\}$$

verstanden. Häufig wird dafür auch

$$\{c\} = \{c(\mathfrak{H})\}$$

abgekürzt, wobei $\{c(\mathfrak{H})\}$ also bedeuten soll, daß an der „Stelle $\mathfrak{H}$" das Element $c(\mathfrak{H})$ steht. In einfacher Weise werden Addition zweier Vektoren und Multiplikation mit komplexen Zahlen α durch

$$\{c_1\} + \{c_2\} = \{c_1(\mathfrak{H}) + c_2(\mathfrak{H})\}, \quad \alpha \cdot \{c\} = \{\alpha\, c(\mathfrak{H})\},$$

definiert und $\{0\} = 0$ abgekürzt.

2. Wählt man jetzt aus der Schar $\{M(\mathfrak{H}), k\}$ eine *beliebige* Form $f(\mathfrak{Z}; \mathfrak{H})$ aus, die selbstverständlich auch identisch Null sein darf, dann kann man nach 1 einen *Formenvektor*

$$\{f\} = \{f(\mathfrak{Z}; \mathfrak{H})\} = \{f(\mathfrak{Z}; \mathfrak{H}_1), f(\mathfrak{Z}; \mathfrak{H}_2), \ldots\}$$

bilden. Die Menge dieser Formenvektoren wird mit $F_n(k)$ bezeichnet. Ersichtlich bildet $F_n(k)$ einen Vektorraum unendlicher Dimension über dem Körper der komplexen Zahlen.

Wie im Falle der Operatorentheorie der HILBERTschen Modulgruppe [5], bei der allerdings nur endliche Formenvektoren auftreten, gestattet diese Schreibweise eine einfache Formulierung der Multiplikationsformeln der Operatoren. Man setzt dazu für jedes $\{f\}$ aus $F_n(k)$

$$(4.1)\quad \begin{aligned} \{f\}/T(\mathfrak{S}) &= \{\delta(\mathfrak{H}\mathfrak{S}^{-1})\, f(\mathfrak{Z};\mathfrak{H}\mathfrak{S}^{-1})/T(\mathfrak{H}\mathfrak{S}^{-1},\mathfrak{H})\},\\ \{f\}/T^*(\mathfrak{S}) &= \{f(\mathfrak{Z};\mathfrak{H}\mathfrak{S})/T^*(\mathfrak{H}\mathfrak{S},\mathfrak{H})\}\end{aligned}$$

und

$$(4.2)\quad \begin{aligned} \{f\}/V(\mathfrak{S}) &= \{\delta(\mathfrak{H}\mathfrak{S}^{-2})\, f(\mathfrak{Z};\mathfrak{H}\mathfrak{S}^{-2})/V(\mathfrak{H}\mathfrak{S}^{-2},\mathfrak{H})\},\\ \{f\}/V^*(\mathfrak{S}) &= \{f(\mathfrak{Z};\mathfrak{H}\mathfrak{S}^{2})/V^*(\mathfrak{H}\mathfrak{S}^{2},\mathfrak{H})\},\\ \{f\}/W(\mathfrak{S}) &= \{f(\mathfrak{Z};\mathfrak{H})/W(\mathfrak{H};\mathfrak{S})\}.\end{aligned}$$

Dabei ist $\delta(\mathfrak{H})$ nach (2.9) definiert. Dieser Faktor in der Definition von T und V ist deswegen nötig, weil $f(\mathfrak{Z};\mathfrak{H}\mathfrak{S}^{-\nu})$, $\nu = 1, 2$, nicht notwendig an einer Stelle eines $\{f\}$ stehen muß. Außerdem erklärt man zwei weitere Operatoren $T[\mathfrak{S}]$ und $T^*[\mathfrak{S}]$ analog (4.1) unter Verwendung der Operatoren $T[\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{S}]$ und $T^*[\mathfrak{H}\mathfrak{S},\mathfrak{H}]$ von § 3. Da für einfache Matrizen $\mathfrak{S}$ der Faktor $\alpha_f(\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{S})$ nach Satz 3.10c nicht von $\mathfrak{H}$ abhängt, hat man

$$(4.3)\quad T(\mathfrak{S}) = \alpha(\mathfrak{S})\, T[\mathfrak{S}],\quad \alpha(\mathfrak{S}) = |\mathfrak{S}|^{-\frac{1}{2}} \sum_{d \mid |\mathfrak{S}|} d,\quad \mathfrak{S} \text{ einfach}.$$

Nach den Überlegungen des § 2.3 und § 3.3 bilden alle diese Operatoren den Vektorraum $F_n(k)$ in sich ab.

Aus den Beziehungen (2.6) bis (2.8) und (2.10) erschließt man sofort die „trivialen" Relationen

$$(4.4)\quad V(\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2) = V(\mathfrak{S}_1)\, V(\mathfrak{S}_2),\quad V^*(\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2) = V^*(\mathfrak{S}_1)\, V^*(\mathfrak{S}_2),$$

$$(4.5)\quad V(\mathfrak{S})\, V^*(\mathfrak{S}) = 1,\quad V^*(\mathfrak{S})\, V(\mathfrak{S}) = W(\mathfrak{S}),$$

wenn mit 1 stets der Einheitsoperator abgekürzt wird. Etwas tiefer liegt

Satz 4.1. *Für teilfremde Matrizen $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ gilt*

$$T(\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2) = T(\mathfrak{S}_1)\, T(\mathfrak{S}_2),\quad T^*(\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2) = T^*(\mathfrak{S}_1)\, T^*(\mathfrak{S}_2),$$
$$T(\mathfrak{S}_1)\, T^*(\mathfrak{S}_2) = T^*(\mathfrak{S}_2)\, T(\mathfrak{S}_1).$$

Aus diesem Satz erkennt man insbesondere, daß die Operatoren T unter sich, die Operatoren T^* unter sich und die Operatoren T und T^* vertauschbar sind, wenn die entsprechenden Argumente teilerfremd sind. Über die Struktur des durch die Operatoren $T(\mathfrak{S})$ und $V(\mathfrak{S})$ für beliebige ET-Matrizen erzeugten Operatorenringes ergeben also die Aussagen (4.4), (4.5) und Satz 4.1 nur einen kleinen Einblick. Im Gegensatz dazu kann man die Multiplikationsformeln in einem Unterring genau übersehen:

Satz 4.2. *Es sei P_n der durch die Operatoren $T(\mathfrak{S})$ und $V(\mathfrak{S})$ für einfache Matrizen $\mathfrak{S}$ erzeugte Operatorenring. Es gilt dann:*

a) P_n *ist kommutativ,*

b) P_n *wird allein durch* $T(\mathfrak{P})$ *und* $V(\mathfrak{P})$ *für Primmatrizen* $\mathfrak{P}$ *erzeugt.*

c) *für zwei einfache Matrizen* $\mathfrak{S}_1$ *und* $\mathfrak{S}_2$ *ist*

$$T(\mathfrak{S}_1)\,T(\mathfrak{S}_2) = \sum_{\mathfrak{D}} T\left(\frac{\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{D}^2}\right) V(\mathfrak{D}),$$

wobei $\mathfrak{D}$ *alle einfachen Matrizen zu durchlaufen hat, für die* $\mathfrak{D}^{-1}\mathfrak{S}_1$ *und* $\mathfrak{D}^{-1}\mathfrak{S}_2$ *ganz sind,*

d) *für einfaches* $\mathfrak{S}$ *ist*

$$V(\mathfrak{S})\,T^*[\mathfrak{S}^2] = T[\mathfrak{S}^2]\,V^*(\mathfrak{S}),$$

e) $V(\mathfrak{P})\,T^*[\mathfrak{P}] = T[\mathfrak{P}]$, $T[\mathfrak{P}]\,V^*(\mathfrak{P}) = T^*[\mathfrak{P}]$ *für Primmatrizen* $\mathfrak{P}$.

Man sieht, daß für einfache Matrizen eine vollkommene Übereinstimmung mit den Ergebnissen von HECKE besteht. Die wichtige Aussage c) des Satzes kann sofort auf die normierten Operatoren umgeschrieben werden. Ist dazu

$$\beta(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2; \mathfrak{D}) = \frac{\alpha\left(\dfrac{\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{D}^2}\right)}{\alpha(\mathfrak{S}_1)\,\alpha(\mathfrak{S}_2)},$$

dann hat man bei gleichen Summationsbedingungen wie in Satz 4.2c

$$T[\mathfrak{S}_1]\,T[\mathfrak{S}_2] = \sum_{\mathfrak{D}} \beta(\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_2;\mathfrak{D})\,T\left[\frac{\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{D}^2}\right] V(\mathfrak{D}). \tag{4.6}$$

3. Alle Formenvektoren $\{f\}$ aus $F_n(k)$, bei denen die Elemente $f(\mathfrak{Z};\mathfrak{H})$ sämtlich Spitzenformen sind und für die

$$|\{f\}|^2 = \sum_{\mathfrak{H}} |f(\mathfrak{Z};\mathfrak{H})|^2 < \infty \tag{4.7}$$

erfüllt ist, werden zum linearen Teilraum $S_n(k)$ zusammengefaßt. In (4.7) ist dabei die Summe über alle ganzen ET-Matrizen $\mathfrak{H}$ zu erstrecken, $|f(\mathfrak{Z};\mathfrak{H})|$ bedeutet die Norm von $f(\mathfrak{Z};\mathfrak{H})$ innerhalb $\{M(\mathfrak{H}), k\}$ nach MF II.

Für zwei Elemente $\{f\}$ und $\{g\}$ aus $S_n(k)$ wird nun ein Skalarprodukt durch

$$(\{f\},\{g\}) = \sum_{\mathfrak{H}} (f(\mathfrak{Z};\mathfrak{H}), g(\mathfrak{Z};\mathfrak{H})),\quad \{f\} = \{f(\mathfrak{Z};\mathfrak{H})\},\ \{g\} = \{g(\mathfrak{Z};\mathfrak{H})\},$$

erklärt. Jeder einzelne Summand auf der rechten Seite ist dabei das innerhalb $\{M(\mathfrak{H}), k\}$ gebildete Skalarprodukt. Die Summe ist wieder über alle ganzen ET-Matrizen zu erstrecken, sie konvergiert wegen (4.7) absolut. Man prüft leicht, daß $S_n(k)$ durch diese Metrik zu einem linearen HILBERT-Raum wird. Es ist jetzt leicht möglich, nachzuweisen, daß $S_n(k)$ in $F_n(k)$ ein gegenüber allen bisher definierten Operatoren invarianter Unterraum ist.

Satz 4.3. *Die Operatoren* $T(\mathfrak{S})$, $T[\mathfrak{S}]$, $T^*(\mathfrak{S})$, $T^*[\mathfrak{S}]$, $V(\mathfrak{S})$ *und* $V^*(\mathfrak{S})$ *bilden* $S_n(k)$ *in sich ab; ferner gilt*

a) $|\{f\}/T[\mathfrak{S}]| \leq |\{f\}|$, $\quad |\{f\}/V(\mathfrak{S})| \leq |\{f\}|$.

b) $(\{f\}/T[\mathfrak{S}], \{g\}) = (\{f\}, \{g\}/T^*[\mathfrak{S}])$, $(\{f\}/V(\mathfrak{S}), \{g\}) = (\{f\}, \{g\}/V^*(\mathfrak{S}))$.

Natürlich gilt die Aussage b) auch dann noch, wenn man $T[\mathfrak{S}]$ bzw. $V(\mathfrak{S})$ mit $T^*[\mathfrak{S}]$ bzw. $V^*(\mathfrak{S})$ vertauscht.

Es ist klar, daß man auf $S_n(k)$ mit Hilfe von Satz 4.3 alle Verknüpfungsregeln zwischen den Operatoren V und T auf entsprechende Relationen zwischen V^* und T^* übertragen, insbesondere eine Satz 4.2 analoge Aussage machen kann.

Satz 4.4. *Auf $S_n(k)$ sind für einfache Matrizen $\mathfrak{S}$ die Operatoren V^* und T^* vertauschbar und es gilt:*

a) $T^*[\mathfrak{S}_1]\,T^*[\mathfrak{S}_2] = \sum\limits_{\mathfrak{D}} \beta(\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_2;\mathfrak{D})\,V^*(\mathfrak{D})\,T\left[\frac{\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{D}^2}\right]$,

wobei $\mathfrak{D}$ wieder alle gemeinsamen Teiler von $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ zu durchlaufen hat,

b) $T[\mathfrak{S}] = V(\mathfrak{S})\,T^*[\mathfrak{S}]$, $T^*[\mathfrak{S}] = T[\mathfrak{S}]\,V^*(\mathfrak{S})$,

c) $\alpha^2(\mathfrak{S})\,T[\mathfrak{S}]\,T^*[\mathfrak{S}] = \sum\limits_{\mathfrak{D}|\mathfrak{S}} T(\mathfrak{D}^2)\cdot V^*(\mathfrak{D})$.

Hier ist außer b) vor allem c) bemerkenswert, da sowohl die linke Seite als auch alle Summanden der rechten Seite Operatoren darstellen, die die Stellen der Formenvektoren $\{f\}$ aus $S_n(k)$ festlassen.

4. Nicht nur vom operatorentheoretischen Standpunkt von Interesse ist eine weitere Bildung eines Operators. Im Anschluß an Hecke und Petersson definiert man — zunächst allerdings nur formal — für eine komplexe Variable s

$$T_s = \sum_{\mathfrak{S}} |\mathfrak{S}|^{-s}\,T(\mathfrak{S}),$$

wobei $\mathfrak{S}$ alle einfachen Matrizen zu durchlaufen hat.

Satz 4.5. a) *Für $\{f\}$ aus $S_n(k)$ konvergiert $|\{f\}/T_s|$ absolut, sobald $Re\, s > \frac{3}{2}$.*

b) *Im Konvergenzgebiet gilt*

$$T_s = \prod_{\mathfrak{P}} (1 - |\mathfrak{P}|^{-s}\,T(\mathfrak{P}) + |\mathfrak{P}|^{-2s}\,V(\mathfrak{P}))^{-1},$$

wenn rechts das Produkt über alle Primmatrizen erstreckt wird.

Diese Entwicklung von T_s in ein Euler-Produkt ist eine genaue Analogie zum Heckeschen Fall in einer Formulierung von Petersson. Sie zeigt, daß T_s im Konvergenzgebiet umkehrbar ist, was man von einem einzelnen $T(\mathfrak{S})$ keineswegs behaupten kann.

§ 5. Zusammenstellung der Abkürzungen

1. Matrizen

$\mathfrak{A}^{(m,n)} = (a_{kl})$ Matrix mit den Elementen a_{kl} von m Zeilen und n Spalten,

$\mathfrak{A}^{(n)}$ quadratische Matrix von n Zeilen,

$\mathfrak{A}'$ Transponierte von $\mathfrak{A}$,

$\mathfrak{A}^A = \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{A} \\ -\mathfrak{A}' & 0 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{E}^A = \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{E} \\ -\mathfrak{E} & 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{J}$,

$\mathfrak{A}^B = \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & 0 \\ 0 & \mathfrak{A} \end{pmatrix}$,

$\mathfrak{A}^D = \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & 0 \\ 0 & \mathfrak{A} \end{pmatrix}$,

$\mathfrak{A}^S = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}' & 0 \\ 0 & \mathfrak{A}^{-1} \end{pmatrix}$,

$\mathfrak{A}^E$	Elementarteilermatrix (ET-Matrix) von $\mathfrak{A}$,
$\mathfrak{A}^{\langle m \rangle}$	siehe ES, § 2.1,
$\mathfrak{A}[\mathfrak{B}]$	$= \mathfrak{B}'\mathfrak{A}\mathfrak{B}$,
$\lvert\mathfrak{A}\rvert$	Determinante von $\mathfrak{A}$,
$\lVert\mathfrak{A}\rVert$	absoluter Betrag von $\lvert\mathfrak{A}\rvert$,
$[a_1, a_2, \ldots, a_n]$	Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen a_k,
$r(\mathfrak{A})$	Rang der Matrix $\mathfrak{A}$.

2. *Multiplikative Gruppen von Matrizen*

Ω_n	Gruppe der unimodularen Matrizen von n Zeilen,
$\Omega_n[q]$	Gruppe der unimodularen Matrizen mit $\mathfrak{U}^{(n)} \equiv \pm \mathfrak{E} \pmod q$,
$\Omega(\mathfrak{A})$	Gruppe der unimodularen Matrizen, für die $\mathfrak{A}\,\mathfrak{U}\,\mathfrak{A}^{-1}$ ganz ist,
Σ_n	Gruppe der reellen Matrizen $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{J}[\mathfrak{M}] = \mathfrak{J}$ *(Symplektische Gruppe)*,
M_n	Gruppe der ganzen Matrizen aus Σ_n *(Modulgruppe n-ten Grades)*,
$M_n[q]$	Gruppe der $\mathfrak{M}$ aus M_n mit $\mathfrak{M} \equiv \pm \mathfrak{E} \pmod q$,
$M(\mathfrak{H})$	Gruppe der $\mathfrak{M}$ aus Σ_n, für die $\mathfrak{H}^{B-1} \cdot \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{H}^B$ ganz ist,
$M_0(\mathfrak{H})$	Gruppe der ganzen $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{H}^A[\mathfrak{M}] = \mathfrak{H}^A$.

3. *Systeme von Matrizen*

$A(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$	Menge der $\mathfrak{A}$ aus Σ_n, für die $\mathfrak{H}^{B-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{H}\mathfrak{K})^B$ ganz ist,
$A_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$	Menge der ganzen Matrizen $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{H}^A[\mathfrak{A}] = (\mathfrak{H}\mathfrak{K})^A$,
$L(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$	Vertretersystem von $A(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$ bezüglich Linksassoziation nach $M(\mathfrak{H})$,
$L_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$	Vertretersystem von $A_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$ bezüglich Linksassoziation nach $M_0(\mathfrak{H})$,
$R(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$	Vertretersystem von $A(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$ bezüglich Rechtsassoziation nach $M(\mathfrak{H}\mathfrak{K})$,
$R_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$	Vertretersystem von $A_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$ bezüglich Rechtsassoziation nach $M_0(\mathfrak{H}\mathfrak{K})$,
$\Gamma\, l\, \Gamma'$	Vertretersystem von Γ bezüglich Linksassoziation nach der Gruppe $\Gamma', \Gamma' \subseteq \Gamma$,
$\Gamma\, r\, \Gamma'$	Vertretersystem von Γ bezüglich Rechtsassoziation nach der Gruppe $\Gamma', \Gamma' \subseteq \Gamma$.

4. *Verschiedenes*

$\{K, k\}$	Lineare Schar der automorphen Formen der Dimension k zur Gruppe K (vgl. MF I),
$\alpha_l(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$	Anzahl der Elemente von $L(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$,
$\alpha_r(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$	Anzahl der Elemente von $R(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$,
$\delta(\mathfrak{A})$	$= \left\{\begin{matrix} 1, \text{ wenn } \mathfrak{A} \text{ ganze ET-Matrix} \\ 0, \text{ sonst} \end{matrix}\right\}.$

II. Beweise

§ 6. Beweis der Sätze 2.3 bis 2.5

Auch in diesem zweiten Teil ist vorausgesetzt, daß die Buchstaben $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}$ stets ganze ET-Matrizen bedeuten.

1. *Beweis von Satz 2.3:* a) Sei z. B. $\nu \geqq \mu$, dann genügt es, wenn für alle $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}$

$$V^*(\mathfrak{H}\mathfrak{G}^{2\nu}, \mathfrak{H})\, V(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{G}^{2\nu})\, V^*(\mathfrak{H}\mathfrak{G}^{2\nu}, \mathfrak{H}\mathfrak{G}^{2(\nu-\mu)})\, V(\mathfrak{H}\mathfrak{G}^{2(\nu-\mu)}, \mathfrak{H}\mathfrak{G}^{2\nu}) = V^*(\mathfrak{H}\mathfrak{G}^{2\nu}, \mathfrak{H})\, V(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{G}^{2\nu})$$

bewiesen wird. Links kann man nach (2.8) die beiden mittleren Operatoren durch $V(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{G}^{2(\nu-\mu)})$ ersetzen, so daß (2.7) schon die Behauptung liefert.

b) Mit einfachen gruppentheoretischen Schlüssen folgert man aus Satz 2.2 sofort

$$\{M(\mathfrak{H}; \mathfrak{G}_2)\, l\, M(\mathfrak{H}; \mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2)\}\, \{M(\mathfrak{H}; \mathfrak{G}_1)\, l\, M(\mathfrak{H}; \mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2)\} = \{M(\mathfrak{H})\, l\, M(\mathfrak{H}; \mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2)\}$$

und das ist nach Definition mit

$$\mathfrak{G}_2^S\, \{M(\mathfrak{H}\mathfrak{G}_2^2)\, l\, M(\mathfrak{H}\mathfrak{G}_2^2; \mathfrak{G}_1)\}\, \mathfrak{G}_2^{S-1} \cdot \mathfrak{G}_1^S\, \{M(\mathfrak{H}\mathfrak{G}_1^2)\, l\, M(\mathfrak{H}\mathfrak{G}_1^2; \mathfrak{G}_2)\}\, \mathfrak{G}_1^{S-1} = \{M(\mathfrak{H})\, l\, M(\mathfrak{H}; \mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2)\}$$

also auch mit

$$\mathfrak{G}_1^{S-1}\, \{M(\mathfrak{H}\mathfrak{G}_2^2)\, l\, M(\mathfrak{H}\mathfrak{G}_2^2; \mathfrak{G}_1)\}\, \mathfrak{G}_1^S \cdot \mathfrak{G}_2^{S-1}\, \{M(\mathfrak{H}\mathfrak{G}_1^2)\, l\, M(\mathfrak{H}\mathfrak{G}_1^2; \mathfrak{G}_2)\}\, \mathfrak{G}_2^S = (\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2)^{S-1}\, \{M(\mathfrak{H})\, l\, M(\mathfrak{H}; \mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2)\}\, (\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2)^S$$

gleichbedeutend. Die letzte Gleichung hat speziell

$$[M(\mathfrak{H}\mathfrak{G}_2^2) : M(\mathfrak{H}\mathfrak{G}_2^2; \mathfrak{G}_1)] \cdot [M(\mathfrak{H}\mathfrak{G}_1^2) : M(\mathfrak{H}\mathfrak{G}_1^2; \mathfrak{G}_2)] = [M(\mathfrak{H}) : M(\mathfrak{H}; \mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2)]$$

zur Folge, so daß man

$$V^*(\mathfrak{H}\mathfrak{G}_1^2\mathfrak{G}_2^2, \mathfrak{H}\mathfrak{G}_2^2)\, V(\mathfrak{H}\mathfrak{G}_2^2, \mathfrak{H}\mathfrak{G}_1^2\mathfrak{G}_2^2)\, V^*(\mathfrak{H}\mathfrak{G}_1^2\mathfrak{G}_2^2, \mathfrak{H}\mathfrak{G}_1^2)\, V(\mathfrak{H}\mathfrak{G}_1^2, \mathfrak{H}\mathfrak{G}_1^2\mathfrak{G}_2^2) = V^*(\mathfrak{H}\mathfrak{G}_1^2\mathfrak{G}_2^2, \mathfrak{H})\, V(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{G}_1^2\mathfrak{G}_2^2) \tag{6.1}$$

erhält. Da $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ teilerfremd sind, ist

$$\delta(\mathfrak{H}\mathfrak{G}_1^{-2})\, \delta(\mathfrak{H}\mathfrak{G}_2^{-2}) = 1 \text{ mit } \delta(\mathfrak{H}\mathfrak{G}_1^{-2}\mathfrak{G}_2^{-2}) = 1$$

gleichbedeutend, d. h. man hat nur

$$V^*(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{G}_1^{-2})\, V(\mathfrak{H}\mathfrak{G}_1^{-2}, \mathfrak{H})\, V^*(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{G}_2^{-2})\, V(\mathfrak{H}\mathfrak{G}_2^{-2}, \mathfrak{H}) = V^*(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{G}_1^{-2}\mathfrak{G}_2^{-2})\, V(\mathfrak{H}\mathfrak{G}_1^{-2}\mathfrak{G}_2^{-2}, \mathfrak{H}) \tag{6.2}$$

für den Fall $\delta(\mathfrak{H}\mathfrak{G}_1^{-2}\mathfrak{G}_2^{-2}) = 1$, d. h. für $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0\, \mathfrak{G}_1^2\mathfrak{G}_2^2$, $\mathfrak{H}_0$ ET-Matrix, nachzuweisen. Setzt man jetzt aber in (6.1) $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0$, dann folgt schon (6.2).

c) Hat $\mathfrak{G}$ die Form

$$\mathfrak{G} = \prod_\nu \mathfrak{G}_\nu^{\alpha_\nu},$$

dann liefert b) sofort

$$W(\mathfrak{H}; \mathfrak{G}) = \prod_\nu W(\mathfrak{H}; \mathfrak{G}_\nu^{\alpha_\nu})$$

und die Faktoren rechts sind paarweise vertauschbar. Nach Teil a) ist aber

$W(\mathfrak{H};\mathfrak{S}_\nu^\alpha)$ mit $W(\mathfrak{H};\mathfrak{S}_\nu^\beta)$ für festes ν und alle natürlichen Zahlen α, β vertauschbar, so daß auch die letzte Behauptung bewiesen ist.

2. *Beweis von Satz 2.4:* Man hat — wenn man das Skalarprodukt zu einer geeigneten Untergruppe von $M(\mathfrak{H}\mathfrak{S}^2)$ bildet —

$$[M(\mathfrak{H}):M(\mathfrak{H};\mathfrak{S})]\,(f,g/V^*(\mathfrak{H}\mathfrak{S}^2,\mathfrak{H})) = \sum_{\mathfrak{M}\in\{M(\mathfrak{H})/M(\mathfrak{H};\mathfrak{S})\}} (f,g/\mathfrak{S}^{S-1}\mathfrak{M})$$

und da alle $\mathfrak{S}^{S-1}\mathfrak{M}$ rationale, symplektische Matrizen darstellen, folgt nach MF II, Satz 5d, für die rechte Seite

$$\sum_{M(\mathfrak{H})/M(\mathfrak{H};\mathfrak{S})} (f/\mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{S}^S,g) = [M(\mathfrak{H}):M(\mathfrak{H};\mathfrak{S})]\,(f/\mathfrak{S}^S,g).$$

Das ist aber schon die erste Behauptung.

Die zweite Aussage folgt trivial aus der ersten.

3. *Beweis von Satz 2.5:* Sei $\mathfrak{f}$ der Vektor, der aus einer orthonormierten Basis der Teilschar der Spitzenformen aus $\{M(\mathfrak{H}),k\}$ gebildet ist, dann ist für alle $\mathfrak{S}$ aus G

$$\mathfrak{f}/W(\mathfrak{H};\mathfrak{S}) = \mathfrak{W}\,\mathfrak{f},\quad \mathfrak{W} = \mathfrak{W}(\mathfrak{S}),$$

und die Matrizen $\mathfrak{W}$ sind nach Satz 2.3c für alle $\mathfrak{S}$ aus G paarweise vertauschbar, andererseits nach Satz 2.4 hermitesch. Nach bekannten Sätzen kann man dann diese $\mathfrak{M}$ simultan auf Diagonalform transformieren.

§ 7. Die Arithmetik der Systeme $A_0(\mathfrak{H},\mathfrak{S})$; Beweis der Sätze 3.1 und 3.2

Wie in § 3 bedeutet $\mathfrak{K}$ stets eine ganze Diagonalmatrix mit positiven Diagonalelementen. Die arithmetischen Hilfssätze des § 2 von ES werden in diesem Paragraphen mehrfach benutzt.

1. *Beweis von Satz 3.1:* Es genügt, den folgenden allgemeineren Hilfssatz zu beweisen:

Hilfssatz 7.1. Sind $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ ganze umkehrbare schiefsymmetrische Matrizen und gilt die Gleichung $\mathfrak{X}[\mathfrak{A}] = \mathfrak{Y}$ mit ganzem $\mathfrak{A}$, dann gibt es

1) *unimodulare Matrizen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$,*

2) *durch $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ eindeutig bestimmte ET-Matrix $\mathfrak{H}$ und ganze Diagonalmatrix $\mathfrak{K}$*

derart, daß

$$\mathfrak{X}[\mathfrak{U}] = \mathfrak{H}^A,\quad \mathfrak{Y}[\mathfrak{V}] = (\mathfrak{H}\mathfrak{K})^A$$

erfüllt ist.

Beweis: Man hat dazu zuerst nach einem schon mehrfach erwähnten Satz von Jacobi Matrizen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ mit

$$\mathfrak{X}[\mathfrak{U}] = \mathfrak{H}^A,\ \mathfrak{Y}[\mathfrak{V}] = \mathfrak{S}^A,$$

d. h. es gibt ganzes $\mathfrak{B}$ mit

$$\mathfrak{H}^A[\mathfrak{B}] = \mathfrak{S}^A.$$

Zweimalige Anwendung von Hilfssatz 3 in ES zeigt, daß

$$(\mathfrak{H}^A)^{E-1}(\mathfrak{S}^A)^E$$

ganz ist. Dies ist aber damit gleichbedeutend, daß $\mathfrak{H}^{-1}\mathfrak{S} = \mathfrak{K}$ ganz ist.

2. Mit $A_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$ hatte man die Menge aller ganzen Lösungen $\mathfrak{A}$ von

$$\mathfrak{H}^A[\mathfrak{A}] = (\mathfrak{H}\mathfrak{K})^A \tag{7.1}$$

bezeichnet. Bei einer Zerlegung von $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{A}_2 \\ \mathfrak{A}_3 & \mathfrak{A}_4 \end{pmatrix}$$

in quadratische n-reihige Kästchen kontrolliert man anhand von (7.1) sofort, daß ein ganzes $\mathfrak{A}$ genau dann zu $A_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$ gehört, wenn

$$\mathfrak{A}_1' \mathfrak{H} \mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}_3' \mathfrak{H} \mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{A}_2' \mathfrak{H} \mathfrak{A}_4 = \mathfrak{A}_4' \mathfrak{H} \mathfrak{A}_2, \quad \mathfrak{A}_1' \mathfrak{H} \mathfrak{A}_4 - \mathfrak{A}_3' \mathfrak{H} \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{H}\mathfrak{K} \tag{7.2}$$

erfüllt ist.

Analog § 3.2 werden volle Vertretersysteme von $A_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$ bezüglich Linksassoziation nach $M_0(\mathfrak{H})$ bzw. Rechtsassoziation nach $M_0(\mathfrak{H}\mathfrak{K})$ mit $L_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$ bzw. $R_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$ bezeichnet, d. h.

$$L(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}) = \mathfrak{H}^B \cdot L_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}) \cdot (\mathfrak{H}\mathfrak{K})^{B-1} \tag{7.3}$$

$$R(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}) = \mathfrak{H}^B \cdot R_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}) \cdot (\mathfrak{H}\mathfrak{K})^{B-1} \tag{7.4}$$

gesetzt. $\alpha_l(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$ und $\alpha_r(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$ sind dann wieder die Anzahlen dieser Vertretersysteme.

3. *Beweis von Satz 3.2:* Es sei $|\mathfrak{K}| = g$. Für zwei Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aus $A_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$ möge $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \pmod{g}$ gelten. Wegen $|\mathfrak{B}| = g$ ist $g \cdot \mathfrak{B}^{-1}$ ganz und man hat

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} + g\,\mathfrak{C}, \quad \mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} = \mathfrak{E} + g\,\mathfrak{C}\mathfrak{B}^{-1}, \quad \mathfrak{C} \text{ ganz},$$

d. h. $\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} = \mathfrak{M}$ ist ganz, so daß (7.1) sogar zeigt, daß $\mathfrak{M}$ in $M_0(\mathfrak{H})$ liegt. Damit ist $\alpha_l(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$ höchstens gleich der Anzahl der $\pmod{g}$ inkongruenten Matrizen aus $A_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$, also höchstens gleich der Anzahl der ganzen Matrizen $\mathfrak{A}$ der Determinante g, die $\pmod{g}$ inkongruent sind. Eine entsprechende Überlegung kann man für $\alpha_r(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$ anstellen.

4. Es folgen nun einige Hilfssätze über die (Komplex-)Multiplikation der Systeme $A_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$.

Hilfssatz 7.2. Sei d ein fest gewählter Teiler von $|\mathfrak{K}|$, dann gilt

$$A_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}) = \bigcup_{\mathfrak{D}} A_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{D})\, A_0(\mathfrak{H}\mathfrak{D}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}),$$

wobei die Vereinigung über alle ganzen Diagonalmatrizen $\mathfrak{D}^{(n)}$ mit $|\mathfrak{D}| = d$ zu erstrecken ist, für die sowohl $\mathfrak{H}\mathfrak{D}$ ET-Matrix als auch $\mathfrak{D}^{-1}\mathfrak{K}$ ganz ist.

Beweis: Bezeichnet man zur Abkürzung die linke Seite der Behauptung mit L und die rechte Seite mit R, dann ist $R \subseteq L$ trivialerweise richtig. Möge nun $\mathfrak{C}$ aus L vorgegeben sein, dann kann man zuerst ein ganzes $\mathfrak{A}$ mit $|\mathfrak{A}| = d$ und ganzes $\mathfrak{B}$ derart finden, daß $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ gilt. Da man bei $\mathfrak{A}$ noch einen rechtsseitigen unimodularen Faktor beliebig wählen kann, darf man nach Hilfssatz 7.1 zusätzlich

$$\mathfrak{H}^A[\mathfrak{A}] = (\mathfrak{H}\mathfrak{D})^A, \quad \mathfrak{D} \text{ ganz}, \quad \mathfrak{H}\mathfrak{D} \text{ ET-Matrix},$$

annehmen. Jetzt ist aber $|\mathfrak{D}| = d$ und $\mathfrak{B}$ liegt von selbst in $A_0(\mathfrak{H}\mathfrak{D}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$, d. h. es ist nach Satz 3.1 auch $(\mathfrak{H}\mathfrak{D})^{-1}(\mathfrak{H}\mathfrak{K}) = \mathfrak{D}^{-1}\mathfrak{K}$ ganz. Damit ist aber $L \subseteq R$ nachgewiesen.

Ist speziell $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ teilerfremd, $d = |\mathfrak{K}_1|$, dann folgt notwendig $\mathfrak{D} = \mathfrak{K}_1$ und man erhält aus Hilfssatz 7.2

$$A_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2) = A_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1)\, A_0(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_1, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2). \tag{7.5}$$

Zur Formulierung eines analogen Hilfssatzes werde für ein System A von quadratischen umkehrbaren Matrizen gleicher Zeilenzahl das System A^{-1} durch die Menge der Matrizen $\mathfrak{A}^{-1}$ ($\mathfrak{A}$ aus A) definiert.

Hilfssatz 7.3. Sind $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ teilerfremd, dann gilt

$$A_0^{-1}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1)\, A_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_2) = A_0(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_1, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2)\, A_0^{-1}(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_2, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2).$$

Beweis: Man kürzt wieder die linke Seite der Behauptung mit L und die rechte Seite mit R ab.

Sei zuerst $\mathfrak{A}$ aus $A_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1)$ und $\mathfrak{B}$ aus $A_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_2)$ gegeben, dann gibt es ganzes $\mathfrak{D}$ mit $|\mathfrak{D}| = |\mathfrak{K}_1|$, für welches $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B}\,\mathfrak{D}$ ganz ist. Da bei $\mathfrak{C}$ ein rechtsseitiger unimodularer Faktor beliebig gewählt werden darf, kann man unter Verwendung von Hilfssatz 7.1 noch

$$(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_1)^A[\mathfrak{C}] = (\mathfrak{H}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K})^A, \quad \mathfrak{K} \text{ ganz}, \quad |\mathfrak{K}| = |\mathfrak{K}_2|$$

annehmen, denn es ist $|\mathfrak{C}| = |\mathfrak{K}_2|$. Nach Definition von $\mathfrak{C}$ ist andererseits

$$(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K})^A = (\mathfrak{H}\mathfrak{K}_1)^A[\mathfrak{C}] = \mathfrak{H}^A[\mathfrak{B}\mathfrak{D}] = (\mathfrak{H}\mathfrak{K}_2)^A[\mathfrak{D}],$$

so daß Satz 3.1 zeigt, daß $\mathfrak{K}_2^{-1}\mathfrak{K}$ ganz ist, d. h. $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_2\mathfrak{U}$ mit unimodularem $\mathfrak{U}$ gilt. Jetzt kann man aber ohne Einschränkung $\mathfrak{U} = \mathfrak{E}$ annehmen, so daß $\mathfrak{C}$ in A_0 $(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_1, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2)$ und $\mathfrak{D}$ in $A_0(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_2, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2)$ liegt. Wegen $\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B} = \mathfrak{C}\,\mathfrak{D}^{-1}$ ist $L \subseteq R$ nachgewiesen.

Ist umgekehrt $\mathfrak{C}$ aus $A_0(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_1, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2)$ und $\mathfrak{D}$ aus $A_0(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_2, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2)$ gegeben, dann gibt es wieder ganzes $\mathfrak{A}$ mit $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{K}_1|$, für welches $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}^{-1}$ ganz ist. Jetzt hat man aber sofort

$$(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_2)^A[\mathfrak{B}^{-1}] = (\mathfrak{H}\mathfrak{K}_1)^A[\mathfrak{A}^{-1}].$$

Wären hier die rechte und linke Seite rationale Matrizen vom Nenner q, dann folgt aus der linken Seite $q/|\mathfrak{B}|$ und rechts entsprechend $q/|\mathfrak{A}|$. Da $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ teilerfremd sind, muß $q = 1$ gelten, d. h. beide Seiten der Gleichung sind ganz. Da $\mathfrak{A}$ nur bis auf einen linksseitigen Faktor bestimmt ist, kann man nach Hilfssatz 7.1 noch

$$(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_1)^A[\mathfrak{A}^{-1}] = \mathfrak{G}^A, \quad |\mathfrak{G}| = |\mathfrak{H}|,$$

annehmen. Aus

$$\mathfrak{G}^A[\mathfrak{A}] = (\mathfrak{H}\mathfrak{K}_1)^A, \quad \mathfrak{G}^A[\mathfrak{B}] = (\mathfrak{H}\mathfrak{K}_2)^A$$

folgt mit Satz 3.1, daß $\mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{H}\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{H}\mathfrak{K}_2$ ganz sind, d. h. $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}$ gilt. Nun folgt aber, daß $\mathfrak{A}$ in $A_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1)$ und $\mathfrak{B}$ in $A_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_2)$ liegt, d. h. es ist auch $R \subseteq L$.

5. Die nächsten Hilfssätze beschäftigen sich mit speziellen Systemen $A_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\,\mathfrak{K})$, für die man genauere Aussagen machen kann.

Hilfssatz 7.4. Sind $|\mathfrak{H}|$ und das erste Diagonalelement k_1 von $\mathfrak{K}$ teilerfremd, dann gibt es zu jedem $\mathfrak{A}$ aus $A_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$ ein $\mathfrak{M}$ aus $M_0(\mathfrak{H})$ mit

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} a & a' & b & b' \\ 0 & \mathfrak{A}_0 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{B}_0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & \mathfrak{C}_0 & \mathfrak{d} & \mathfrak{D}_0 \end{pmatrix}, \quad ad = k_1, \tag{7.6}$$

Beweis: Sind $\delta_k(\mathfrak{A})$ die nach ES, § 2.2 definierten Zahlen, dann kann man hier ohne Einschränkung $\delta_1(\mathfrak{H}) = 1$ annehmen. Sei jetzt $\mathfrak{x}$ die erste und $\mathfrak{y}$ die $(n+1)$-te Spalte von $\mathfrak{A}$ und a so gewählt, daß $\mathfrak{x} = a\,\mathfrak{z}$ mit primitivem $\mathfrak{z}$ gilt. $\mathfrak{H}^A\mathfrak{z}$ ist dann primitiv, denn aus $\mathfrak{H}^A\mathfrak{z} \equiv 0 \pmod{q}$ folgt $\mathfrak{y}'\mathfrak{H}^A\mathfrak{z} \equiv 0 \pmod{q}$, also q/k_1, und andererseits $q/|\mathfrak{H}|$. Wegen ES, Hilfssatz 8, gibt es $\mathfrak{M}$ aus $M_0(\mathfrak{H})$ mit $\mathfrak{z}'\mathfrak{M}'^{-1} = (1, 0, \ldots, 0)$, also $\mathfrak{x}'\mathfrak{M}'^{-1} = (a, 0, \ldots, 0)$. Die restlichen Behauptungen ergeben sich aus den Gln. (7.2).

Hilfssatz 7.5. Ist das erste Diagonalelement von $\mathfrak{K}$ gleich 1, dann gibt es zu jedem $\mathfrak{A}$ aus $A_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$ ein $\mathfrak{M}$ aus $M_0(\mathfrak{H})$ mit

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{M} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{A}_0 & 0 & \mathfrak{B}_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{C}_0 & 0 & \mathfrak{D}_0 \end{pmatrix}.$$

Beweis: Man kann wieder $\delta_1(\mathfrak{H}) = 1$ annehmen. Anwendung von Hilfssatz 7.4 liefert eine Darstellung (7.6) mit $a = d = 1$. Die Gln. (7.2) zeigen nun, daß

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{C}_0'\,\mathfrak{H}_0\,\mathfrak{b}_1 - \mathfrak{A}_0'\,\mathfrak{H}_0\,\mathfrak{d}, \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{D}_0'\,\mathfrak{H}_0\,\mathfrak{b}_1 - \mathfrak{B}_0'\,\mathfrak{H}_0\,\mathfrak{d}, \quad \mathfrak{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{H}_0 \end{pmatrix}$$

erfüllt ist. Es ist leicht zu kontrollieren, daß

$$\mathfrak{M}_0 = \begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{b}'\mathfrak{H}_0 - b & -\mathfrak{b}_1'\mathfrak{H}_0 \\ 0 & \mathfrak{E} & -\mathfrak{b}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathfrak{d} & \mathfrak{E} \end{pmatrix}$$

in $M_0(\mathfrak{H})$ liegt und $\mathfrak{M}_0\mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{A}$ die im Hilfssatz behauptete Form besitzt.

Hilfssatz 7.6. Für jedes $\mathfrak{A}$ aus $A_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$ ist $\mathfrak{H}^A \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{H}^{A-1}$ ganz, sofern entweder

a) *$\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ teilerfremd sind*

oder

b) *$\mathfrak{K}$ einfach ist.*

Beweis: a) Nach Definition hat man

$$\mathfrak{A}'\,\mathfrak{H}^A\mathfrak{A}\,\mathfrak{H}^{A-1} = (\mathfrak{H}\,\mathfrak{K})^A\,\mathfrak{H}^{A-1} = \mathfrak{K}^{A},$$

so daß unter Beachtung von $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{K}|$ schon ES, Hilfssatz 5a, die Behauptung liefert.

b) Eine $(n-1)$-malige Anwendung von Hilfssatz 7.5 zeigt, daß man $\mathfrak{A}$ in der Form

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{M} \cdot \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & \mathfrak{E} & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{7.7}$$

schreiben kann. Da aber $\mathfrak{H}^A\mathfrak{M}\,\mathfrak{H}^{A-1}$ ganz ist, folgt die Behauptung des Hilfssatzes trivial.

§ 8. Die Vertretersysteme $L_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$ und $R_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$

Die Vertretersysteme seien nach (7.3) und (7.4) definiert. Für zwei Matrizensysteme A und B möge

$$A \equiv q \cdot B$$

bedeuten, daß A und B die gleichen Matrizen enthalten, aber jede Matrix von B in A genau q-mal auftritt.

Hilfssatz 8.1. Für teilerfremde Matrizen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ ist:

a) $L_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1) \cdot L_0(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_1, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2) \equiv L_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2)$,

b) $R_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1) \cdot R_0(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_1, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2) \equiv R_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2)$.

Beweis: Es wird der Beweis nur für a) durchgeführt, da im anderen Falle analog geschlossen werden kann. Wegen (7.5) ist zuerst klar, daß beide Seiten der Behauptung die gleichen Matrizen enthalten. Es muß also nur noch gezeigt werden, daß zwei verschiedene Produkte auf der linken Seite stets nicht linksassoziiert sind. Wäre dies falsch, dann gibt es Matrizen $\mathfrak{A}_\nu$ aus $L_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1)$ und $\mathfrak{B}_\nu$ aus $L_0(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_1, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2)$ mit

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{M}\,\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2, \quad \mathfrak{M} \text{ aus } M_0(\mathfrak{H}).$$

Jetzt ist aber $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2^{-1}$ ganz, so daß ES, Hilfssatz 5a zeigt, daß dann auch $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2^{-1} = \mathfrak{M}_0$ ganz ist. Notwendig liegt dann $\mathfrak{M}_0$ in $M_0(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_1)$, und da $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ nach $M_0(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_1)$ nicht linksassoziiert vorausgesetzt sind, muß $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2$, d. h. $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{M}\,\mathfrak{A}_2$ gelten. Eine Wiederholung der Schlußweise zeigt $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2$.

Hilfssatz 8.2. Für teilerfremde Matrizen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ ist:

$$R_0^{-1}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1) \cdot L_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_2) \equiv L_0(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_1, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2) \cdot R_0^{-1}(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_2, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2).$$

Beweis: Nach Hilfssatz 7.3 enthalten beide Seiten sicher die gleichen Matrizen. Da es auf beiden Seiten nur auf die Klasse bezüglich Linksassoziation nach $M_0(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_1)$ ankommt, ist der Hilfssatz schon bewiesen, wenn gezeigt werden kann, daß links und rechts nur Matrizen stehen, die nach $M_0(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_1)$ nicht linksassoziiert sind.

Man nehme jetzt an, daß auf der linken Seite zwei Elemente nach $M_0(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_1)$ linksassoziiert sind, d. h.

$$\mathfrak{B}_1^{-1}\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{M}\,\mathfrak{B}_2^{-1}\mathfrak{A}_2, \quad \mathfrak{M} \text{ aus } M_0(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_1), \quad \mathfrak{B}_\nu \text{ aus } R_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_1),$$
$$\mathfrak{A}_\nu \text{ aus } L_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}_2).$$

Speziell ist dann $\mathfrak{B}_1\mathfrak{M}\,\mathfrak{B}_2^{-1}\mathfrak{A}_2$ ganz, so daß wegen ES, Hilfssatz 5b, auch $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{B}_1\mathfrak{M}\,\mathfrak{B}_2^{-1}$ ganz ist. Dann liegt aber $\mathfrak{M}_1$ in $M_0(\mathfrak{H})$ und man hat $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{M}_1\mathfrak{A}_2$. Da $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ nicht linksassoziiert gewählt waren, muß notwendig $\mathfrak{M}_1$ die Einheitsmatrix sein. Jetzt ist aber $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_1\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{M}$ aus $M_0(\mathfrak{H}\mathfrak{K}_1)$, was wiederum mit den Voraussetzungen des Hilfssatzes nur im Falle $\mathfrak{M} = \mathfrak{E}$ verträglich ist.

Für die rechte Seite beweist man die noch fehlende Behauptung ganz analog.

Hilfssatz 8.3. Es seien $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ teilerfremd, außerdem sei

$$(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2)^A \cdot \mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2)^{A-1}$$

für jedes $\mathfrak{A}$ aus $A_0(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2, \mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2\mathfrak{S}_2)$ ganz. Es gibt dann stets Vertretersysteme $L_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{S}_2)$ und $R_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{S}_2)$ mit

a) $L_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{S}_2) \cdot \mathfrak{S}_1^D \equiv \mathfrak{S}_1^D \cdot L_0(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2, \mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2\mathfrak{S}_2)$

b) $R_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{S}_2) \cdot \mathfrak{S}_1^D \equiv \mathfrak{S}_1^D \cdot R_0(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2, \mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2\mathfrak{S}_2)$.

Beweis: Er wird wieder nur für a) geführt, da b) analog erschlossen werden kann. Zuerst wird

(8.1) $$\mathfrak{S}_1^D \cdot L_0(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2, \mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2\mathfrak{S}_2)\,\mathfrak{S}_1^{D-1} \subseteq A_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{S}_2)$$

und für ein geeignetes Vertretersystem $L_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{S}_2)$

(8.2) $$\mathfrak{S}_1^{D-1} \cdot L_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{S}_2) \cdot \mathfrak{S}_1^D \subseteq A_0(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2, \mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2\mathfrak{S}_2)$$

bewiesen werden.

Zum Beweis von (8.1) sei $\mathfrak{A}$ aus $L_0(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2, \mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2\mathfrak{S}_2)$, dann ist nach Voraussetzung $(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2)^A \cdot \mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2)^{A-1}$ ganz und wegen ES, Hilfssatz 6, auch $\mathfrak{B} = \mathfrak{S}_1^D \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{S}_1^{D-1}$ ganz, so daß man

$$\mathfrak{H}^A[\mathfrak{B}] = (\mathfrak{H}\mathfrak{S}_2)^A$$

erhält.

Weiter ist nun (8.2) richtig, wenn es für jedes $\mathfrak{B}$ aus $A_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{S}_2)$ ein $\mathfrak{M}$ aus $M_0(\mathfrak{H})$ derart gibt, daß $\mathfrak{S}_1^{D-1} \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{S}_1^D$ ganz ist. Dazu gibt es zuerst sicher ein unimodulares $\mathfrak{U}$, für welches $\mathfrak{C} = \mathfrak{S}_1^{D-1} \cdot \mathfrak{U}\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{S}_1^D$ ganz ist. Man wählt außerdem unimodulares $\mathfrak{V}$ derart, daß unter Verwendung von Hilfssatz 7.1

(8.3) $$(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2\mathfrak{S}_2)^A[\mathfrak{D}^{-1}] = \mathfrak{H}^A[\mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{S}_1^D\mathfrak{V}^{-1}] = (\mathfrak{H}\mathfrak{K})^A, \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{V}\mathfrak{C},$$

mit ganzem $\mathfrak{K}$ der Determinante $|\mathfrak{S}_1^2|$ und ET-Matrix $\mathfrak{H}\mathfrak{K}$ gilt. Da aber nach Satz 3.1 $(\mathfrak{H}\mathfrak{K})^{-1}\,\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2\mathfrak{S}_2$ ganz sein muß, folgt $\mathfrak{K} = \mathfrak{S}_1^2$. Jetzt liegt aber $\mathfrak{D}$ in $A_0(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2, \mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2\mathfrak{S}_2)$, es ist daher nach Voraussetzung $(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2)^A\,\mathfrak{D}\,(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2)^{A-1}$ ganz. Eine schon mehrfach angewendete Schlußweise zeigt nun, daß dann auch $\mathfrak{S}_1^D\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{S}_1^{D-1} = \mathfrak{S}_1^D\mathfrak{V}\,\mathfrak{S}_1^{D-1}\mathfrak{U}\mathfrak{B}$ und daher nach ES, Hilfssatz 5b, auch $\mathfrak{S}_1^D\mathfrak{V}\,\mathfrak{S}_1^{D-1}$ ganz ist. Im Hinblick auf die Definition von $\mathfrak{D}$ darf man sodann ohne Einschränkung $\mathfrak{V} = \mathfrak{E}$ annehmen. Jetzt liegt aber $\mathfrak{U}$ in $M_0(\mathfrak{H})$ und (8.2) ist ebenfalls bewiesen.

Der Hilfssatz ist dann vollständig bewiesen, wenn noch gezeigt wird. daß auf der linken Seite von (8.1) nur Matrizen stehen, die nach $M_0(\mathfrak{H})$ nicht linksassoziiert sind und auf der linken Seite von (8.2) nur Matrizen stehen, die nach $M_0(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2)$ nicht linksassoziiert sind. Würden aber z. B. auf der linken Seite von (8.1) die beiden Matrizen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ aus $L_0(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2, \mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2\mathfrak{S}_2)$ dieselbe Klasse definieren, d. h. wäre

$$\mathfrak{S}_1^D\mathfrak{A}_r\mathfrak{S}_1^{D-1} \text{ ganz}, \quad \mathfrak{S}_1^D\mathfrak{A}_1\mathfrak{S}_1^{D-1} = \mathfrak{M}\,\mathfrak{S}_1^D\mathfrak{A}_2\mathfrak{S}_1^{D-1}$$

mit einem $\mathfrak{M}$ aus $M_0(\mathfrak{H})$ erfüllt, dann wäre $\mathfrak{S}_1^{D-1}\mathfrak{M}\,\mathfrak{S}_1^D\,\mathfrak{A}_2$ ganz, also nach ES, Hilfssatz 5a, auch $\mathfrak{S}_1^{D-1}\mathfrak{M}\,\mathfrak{S}_1^D = \mathfrak{M}_1$ ganz, und $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ wären nach $M_0(\mathfrak{H}\,\mathfrak{S}_1^2)$ linksassoziiert. Entsprechend schließt man im Falle (8.2).

Hilfssatz 8.4. Ist $\mathfrak{P}$ einfach und $|\mathfrak{P}| = p$ eine Primzahl, dann gilt für jedes $\nu \geqq 1$

$$L_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{P}^\nu)\,L_0(\mathfrak{H}\mathfrak{P}^\nu, \mathfrak{H}\mathfrak{P}^{\nu+1}) = L_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{P}^{\nu+1}) \cup p\,\{L_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{P}^{\nu-1})\,\mathfrak{P}^D\}.$$

Beweis: In der hier verwendeten Bezeichnung ist $L_0(1, g)$ genau ein Vertretersystem der Transformationen g-ter Ordnung bezüglich Linksassoziation nach M_1 im Falle $n = 1$. Aus dem HECKEschen Beweis der Multiplikationsformel

$T(p)\,T(p^\nu)$ in [2] entnimmt man sofort die Gültigkeit von

$$L_0(1,p^\nu)\,L_0(1,p) \equiv L_0(1,p^{\nu+1}) \cup p\,\{L_0(1,p^{\nu-1})\,(p\,\mathfrak{E})\}. \tag{8.4}$$

Mehrfache Anwendung von Hilfssatz 7.5 liefert nun, daß man jedes $\mathfrak{A}$ aus $L_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{P}^\nu)$ in der Form

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & \mathfrak{E} & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{8.5}$$

annehmen darf. Man überlegt sich nun sehr leicht, daß zwei Matrizen der Form (8.5) genau dann nach $M_0(\mathfrak{H})$ linksassoziiert sind, wenn die zugehörigen Matrizen $\mathfrak{B}$ nach M_1 linksassoziiert sind. $L_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{P}^\nu)$ ist damit eineindeutig auf $L_0(1,p^\nu)$ abbildbar. Die Behauptung des Hilfssatzes folgt nun unmittelbar aus (8.4), wenn man nur beachtet, daß die Matrix $p\,\mathfrak{E}$ auf der rechten Seite von (8.4) beim Übergang zu den Matrizen (8.5) in $\mathfrak{P}^D$ übergeht.

Hilfssatz 8.5. Ist $\mathfrak{P}$ einfach und $|\mathfrak{P}| = p$ eine Primzahl, dann gibt es ein Vertretersystem $L_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{P})$ mit

$$L_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{P})\,\mathfrak{P}^D \equiv \mathfrak{P}^D\,L_0(\mathfrak{H}\mathfrak{P}^2, \mathfrak{H}\mathfrak{P}^3).$$

Beweis: Man wählt solche Vertretersysteme, deren sämtliche Matrizen die Form (8.5) haben. Jetzt folgt aber die Behauptung trivial, denn es gilt ja

$$L_0(1,p) \equiv L_0(p^2,p^3),$$

und diese Identität bleibt natürlich nach Multiplikation jeder vorkommenden Matrix mit p auch richtig.

Hilfssatz 8.6. Seien $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ ganze Diagonalmatrizen mit $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{G}^2$, ferner

$$\Lambda_1(\mathfrak{D}) = M_0(\mathfrak{H}\mathfrak{G}^2) \cap \Omega(\mathfrak{D}), \quad \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \mathfrak{D}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{D}_2 \end{pmatrix}$$
$$\Lambda_2(\mathfrak{D}) = M_0(\mathfrak{H}) \cap \Omega(\mathfrak{G}^{2D-1}\mathfrak{D})$$
$$\Lambda_3(\mathfrak{D}) = M_0(\mathfrak{H}) \cap \Omega(\mathfrak{G}^{D-1}) \cap \Omega(\mathfrak{G}^{D-1}\mathfrak{D})$$
$$\Lambda_4(\mathfrak{D}) = M_0(\mathfrak{H}) \cap \Omega(\mathfrak{G}^{D-1}\mathfrak{D}),$$

dann folgt

a) $\mathfrak{G}^D \cdot \Lambda_1(\mathfrak{D}) \cdot \mathfrak{G}^{D-1} = \Lambda_3(\mathfrak{D}) \subseteq \Lambda_4(\mathfrak{D})$

b) $\Lambda_2(\mathfrak{D}) \subseteq \Lambda_4(\mathfrak{D})$

c) $[\Lambda_4(\mathfrak{D}) : \Lambda_2(\mathfrak{D})] = [\Lambda_4(\mathfrak{D}) : \Lambda_3(\mathfrak{D})]$.

Beweis: a) Per Definition ist zuerst

$$\mathfrak{G}^D \cdot \Lambda_1(\mathfrak{D}) \cdot \mathfrak{G}^{D-1} = \mathfrak{G}^D \cdot M_0(\mathfrak{H}\mathfrak{G}^2) \cdot \mathfrak{G}^{D-1} \cap \mathfrak{G}^D \cdot \Omega(\mathfrak{D}) \cdot \mathfrak{G}^{D-1}.$$

Mit ES (1.8) hat man sofort

$$\mathfrak{G}^D \cdot M_0(\mathfrak{H}\mathfrak{G}^2) \cdot \mathfrak{G}^{D-1} = M_0(\mathfrak{H}) \cap \Omega(\mathfrak{G}^{D-1}),$$

und

$$\mathfrak{M} \in \mathfrak{G}^D \cdot \Omega(\mathfrak{D}) \cdot \mathfrak{G}^{D-1}$$

ist andererseits mit

$$\mathfrak{G}^{D-1}\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{G}^D \ \text{ganz}, \quad \mathfrak{D}\,\mathfrak{G}^{D-1}\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{G}^D\mathfrak{D}^{-1} \ \text{ganz}$$

gleichbedeutend, so daß

$$M_0(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{S}^D \cdot \Omega(\mathfrak{D}) \cdot \mathfrak{S}^{D-1} = M_0(\mathfrak{H}) \cap \Omega(\mathfrak{D}\,\mathfrak{S}^{D-1})$$

folgt. Der Rest der Behauptung ist trivial.

b) Ist $\mathfrak{M}$ Element von $\Lambda_2(\mathfrak{D})$, dann ist einerseits

$$\mathfrak{S}^{2D-1}\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{D}^{-1}\,\mathfrak{S}^{2D} = \mathfrak{M}_0 \text{ ganz}$$

und andererseits

$$(\mathfrak{H}\mathfrak{S}^2)^A\,[\mathfrak{M}_0] = (\mathfrak{H}\mathfrak{S}^2)^A,$$

also $\mathfrak{M}_0 \in M_0(\mathfrak{H}\mathfrak{S}^2)$. Nach ES (1.8) ist dann

$$\mathfrak{S}^D\;\mathfrak{M}_0\mathfrak{S}^{D-1}$$

ganz, d. h. $\mathfrak{M}$ liegt in $\Omega(\mathfrak{S}^{D-1}\mathfrak{D})$.

c) Es genügt, wenn

$$\mathfrak{C}\cdot\Lambda_4(\mathfrak{D})\cdot\mathfrak{C}^{-1} = \Lambda_4(\mathfrak{D}),\quad \mathfrak{C} = \mathfrak{S}^{D-1}\,\mathfrak{D} = \pm\,\mathfrak{C}^{-1},$$
$$\mathfrak{C}\cdot\Lambda_3(\mathfrak{D})\cdot\mathfrak{C}^{-1} = \Lambda_2(\mathfrak{D})$$

nachgewiesen werden kann. Dazu ist zuerst

$$\mathfrak{C}\cdot\Lambda_4(\mathfrak{D})\,\mathfrak{C}^{-1} = \mathfrak{C}\cdot M_0(\mathfrak{H})\cdot\mathfrak{C}^{-1}\cap\mathfrak{C}\cdot\Omega\,(\mathfrak{C})\cdot\mathfrak{C}^{-1} = M_0(\mathfrak{H})\cap\Omega\,(\mathfrak{C}^{-1}) = \Lambda_4(\mathfrak{D})$$

und weiter

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}\cdot\Lambda_3(\mathfrak{D})\cdot\mathfrak{C}^{-1} &= \mathfrak{C}\cdot\Lambda_4(\mathfrak{D})\cdot\mathfrak{C}^{-1}\cap\mathfrak{C}\cdot\Omega\,(\mathfrak{S}^{D-1})\cdot\mathfrak{C}^{-1} = \Lambda_4(\mathfrak{D})\cap\Omega\,(\mathfrak{S}^{2D-1}\,\mathfrak{D})\\ &= \Lambda_4(\mathfrak{D})\cap\Lambda_2(\mathfrak{D}) = \Lambda_2(\mathfrak{D}).\end{aligned}$$

Hilfssatz 8.7. Setzt man voraus, daß sich jedes $\mathfrak{A}$ aus $A_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{S}^2)$ in der Form

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{M}_1\mathfrak{D}\,\mathfrak{M}_2,\quad \mathfrak{M}_1\in M_0(\mathfrak{H}),\quad \mathfrak{M}_2\in M_0(\mathfrak{H}\mathfrak{S}^2),$$

mit Diagonalmatrix $\mathfrak{D}$ schreiben läßt, dann gibt es Vertretersysteme mit

$$L_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{S}^2)\,\mathfrak{S}^{D-1}\cdot\{M_0(\mathfrak{H})\;l\;M_0(\mathfrak{H})\cap\Omega(\mathfrak{S}^{D-1})\} = \mathfrak{S}^D\cdot R_0^{-1}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{S}^2).$$

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es ein System D von Diagonalmatrizen, für das

$$A_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{S}^2) = \bigcup_{\mathfrak{D}\in D} M_0(\mathfrak{H})\cdot\mathfrak{D}\cdot M_0(\mathfrak{H}\mathfrak{S}^2) \tag{8.6}$$

eine Zerlegung in elementfremde Komplexe darstellt. Da dann auch $\mathfrak{D}$ in $A_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{S}^2)$ liegt, folgt

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix}\mathfrak{D}_1 & 0\\ 0 & \mathfrak{D}_2\end{pmatrix},\quad \mathfrak{D}_1\,\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{S}^2$$

und mit $\mathfrak{D}$ durchläuft auch $\mathfrak{S}^{2D}\,\mathfrak{D}^{-1}$ das System D. Man darf also auch

$$A_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{S}^2) = \bigcup_{\mathfrak{D}\in D} M_0(\mathfrak{H})\cdot\mathfrak{S}^{2D}\,\mathfrak{D}^{-1}\cdot M_0(\mathfrak{H}\mathfrak{S}^2) \tag{8.7}$$

schreiben. In der Bezeichnung von Hilfssatz 8.6 ist jetzt nach (8.6) bzw. (8.7)

$$L_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{S}^2) = \bigcup_{\mathfrak{D}\in D}\mathfrak{D}\,\{M_0(\mathfrak{H}\mathfrak{S}^2)\;l\;\Lambda_1(\mathfrak{D})\} \tag{8.8}$$

$$R_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{S}^2) = \bigcup_{\mathfrak{D}\in D}\{M_0(\mathfrak{H})\;r\;\Lambda_2(\mathfrak{D})\}\cdot\mathfrak{S}^{2D}\,\mathfrak{D}^{-1}. \tag{8.9}$$

Bezeichnet man die linke (bzw. rechte) Seite der Behauptung mit L (bzw. R), dann folgt aus (8.8)

$$L \equiv \bigcup_{\mathfrak{D}} X(\mathfrak{D})$$

mit

$$\begin{aligned} X(\mathfrak{D}) &= \mathfrak{D} \cdot \{M_0(\mathfrak{H}\mathfrak{S}^2)\, l\, \Lambda_1(\mathfrak{D})\} \cdot \mathfrak{S}^{D-1} \cdot \{M_0(\mathfrak{H})\, l\, M_0(\mathfrak{H}) \cap \Omega(\mathfrak{S}^{D-1})\} \\ &= \mathfrak{S}^{D-1}\mathfrak{D} \cdot \{M_0(\mathfrak{H}) \cap \Omega(\mathfrak{S}^{D-1})\, l\, \mathfrak{S}^D \cdot \Lambda_1(\mathfrak{D}) \cdot \mathfrak{S}^{D-1}\} \times \\ &\qquad \times \{M_0(\mathfrak{H})\, l\, M_0(\mathfrak{H}) \cap \Omega(\mathfrak{S}^{D-1})\} \\ &\equiv \mathfrak{S}^{D-1}\mathfrak{D} \cdot \{M_0(\mathfrak{H})\, l \Lambda_3(\mathfrak{D})\} \end{aligned}$$

nach Hilfssatz 8.6a. Da es bei L und daher auch bei jedem $X(\mathfrak{D})$ nur auf die Klasse bezüglich Linksassoziation nach $M_0(\mathfrak{H})$ ankommt, kann man weiter schreiben

$$\begin{aligned} X(\mathfrak{D}) &\equiv \mathfrak{S}^{D-1}\mathfrak{D} \cdot \{\Lambda_4(\mathfrak{D})\, l \Lambda_3(\mathfrak{D})\}\, \{M_0(\mathfrak{H})\, l \Lambda_4(\mathfrak{D})\} \\ &\equiv [\Lambda_4(\mathfrak{D}) : \Lambda_3(\mathfrak{D})] \cdot Z(\mathfrak{D}), \end{aligned}$$

wobei

$$Z(\mathfrak{D}) \equiv \mathfrak{S}^{D-1}\mathfrak{D}\, \{M_0(\mathfrak{H})\, l \Lambda_4(\mathfrak{D})\}$$

gesetzt ist. Andererseits ist nach (8.9)

$$\begin{aligned} R &\equiv \bigcup_{\mathfrak{D}} \mathfrak{S}^{D-1}\mathfrak{D} \cdot \{M_0(\mathfrak{H})\, l \Lambda_2(\mathfrak{D})\} \\ &\equiv \bigcup_{\mathfrak{D}} [\Lambda_4(\mathfrak{D}) : \Lambda_2(\mathfrak{D})] \cdot \mathfrak{S}^{D-1}\mathfrak{D} \cdot \{M_0(\mathfrak{H})\, l \Lambda_4(\mathfrak{D})\} \\ &\equiv \bigcup_{\mathfrak{D}} [\Lambda_4(\mathfrak{D}) : \Lambda_2(\mathfrak{D})] \cdot Z(\mathfrak{D}) \\ &\equiv \bigcup_{\mathfrak{D}} [\Lambda_4(\mathfrak{D}) : \Lambda_3(\mathfrak{D})] \cdot Z(\mathfrak{D}) \end{aligned}$$

nach Hilfssatz 8.6c und daher

$$R \equiv \bigcup_{\mathfrak{D}} X(\mathfrak{D}) \equiv L,$$

womit der Hilfssatz vollständig bewiesen ist.

Hilfssatz 8.8. Ist $\mathfrak{P}$ einfach und $|\mathfrak{P}| = p$ eine Primzahl, dann gibt es Vertretersysteme mit

$$\alpha_l(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{P})\, \mathfrak{P}^D \cdot R_0^{-1}(\mathfrak{H}\mathfrak{P}, \mathfrak{H}\mathfrak{P}^2) \equiv \alpha_r(\mathfrak{H}\mathfrak{P}, \mathfrak{H}\mathfrak{P}^2)\, L_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{P}).$$

Beweis: Mehrfache Anwendung von Hilfssatz 7.5 zeigt, daß man sowohl

$$A_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{P}) = M_0(\mathfrak{H}) \cdot \mathfrak{P}^B \cdot M_0(\mathfrak{H}\mathfrak{P})$$

als auch

$$A_0(\mathfrak{H}\mathfrak{P}, \mathfrak{H}\mathfrak{P}^2) = M_0(\mathfrak{H}\mathfrak{P}) \cdot \mathfrak{P}^D \mathfrak{P}^{B-1} \cdot M_0(\mathfrak{H}\mathfrak{P}^2)$$

schreiben kann. Setzt man jetzt

$$\Lambda_1 = M_0(\mathfrak{H}\mathfrak{P}) \cap \Omega(\mathfrak{P}^B), \quad \Lambda_2 = M_0(\mathfrak{H}\mathfrak{P}) \cap \Omega(\mathfrak{P}^{D-1}\mathfrak{P}^B),$$

dann folgt sofort

$$\begin{aligned} L_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{P}^2) &\equiv \mathfrak{P}^B\, \{M_0(\mathfrak{H}\mathfrak{P})\, l \Lambda_1\}, & \alpha_l(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{P}) &= [M_0(\mathfrak{H}\mathfrak{P}) : \Lambda_1], \\ R_0(\mathfrak{H}\mathfrak{P}, \mathfrak{H}\mathfrak{P}^2) &= \{M_0(\mathfrak{H}\mathfrak{P})\, r \Lambda_2\} \cdot \mathfrak{P}^D \mathfrak{P}^{B-1}, & \alpha_r(\mathfrak{H}\mathfrak{P}, \mathfrak{H}\mathfrak{P}^2) &= [M_0(\mathfrak{H}\mathfrak{P}) : \Lambda_2]. \end{aligned}$$

Man überlegt sich jetzt sofort, daß

$$M_0(\mathfrak{H}\mathfrak{P}) \supseteq \Lambda_1 \supseteq \Lambda_2$$

erfüllt ist. Damit kann man aber schreiben

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}^D \cdot R_0^{-1}(\mathfrak{H}\mathfrak{P}, \mathfrak{H}\mathfrak{P}^2) &= \mathfrak{P}^B \cdot \{M_0(\mathfrak{H}\mathfrak{P})\, l\Lambda_2\} \\ &= \mathfrak{P}^B \cdot \{\Lambda_1 l \Lambda_2\}\, \{M_0(\mathfrak{H}\mathfrak{P})\, l\Lambda_1\} \\ &= [\Lambda_1 : \Lambda_2] \cdot L_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{P}), \end{aligned}$$

denn es gilt trivialerweise

$$\mathfrak{P}^B \cdot \Lambda_1 \cdot \mathfrak{P}^{B-1} \subseteq M_0(\mathfrak{H}).$$

Wegen

$$\alpha_l(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{P})\, [\Lambda_1 : \Lambda_2] = \alpha_r(\mathfrak{H}\mathfrak{P}, \mathfrak{H}\mathfrak{P}^2)$$

ist die Behauptung bewiesen.

§ 9. Beweis der Sätze 3.3 bis 3.10.

Es ist klar, daß die Behauptungen der Sätze des § 3 in Wirklichkeit Aussagen über die Vertretersysteme $L(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{R})$ und $R(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{R})$ sind. Wenn man beachtet, daß nach Definition

$$L_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{R}) = \mathfrak{H}^{B-1} \cdot L(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{R}) \cdot (\mathfrak{H}\mathfrak{R})^B \tag{9.1}$$

und

$$R_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{R}) = \mathfrak{H}^{B-1} \cdot R(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{R}) \cdot (\mathfrak{H}\mathfrak{R})^B \tag{9.2}$$

gilt, so erkennt man leicht, daß die Aussagen der zu beweisenden Sätze aus den Hilfssätzen des § 8 folgen. Dieser Sachverhalt wird jetzt im einzelnen ausgeführt.

1. *Beweis von Satz 3.3.* Nach Definition der Operatoren sind die Behauptungen des Satzes mit der Gültigkeit der Beziehungen

$$L(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{R}_1) \cdot L(\mathfrak{H}\mathfrak{R}_1, \mathfrak{H}\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2) = L(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2) \tag{9.3}$$

$$R(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{R}_1) \cdot R(\mathfrak{H}\mathfrak{R}_1, \mathfrak{H}\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2) = R(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2) \tag{9.4}$$

$$R^{-1}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{R}_1) \cdot L(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{R}_2) = L(\mathfrak{H}\mathfrak{R}_1, \mathfrak{H}\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2) \cdot R^{-1}(\mathfrak{H}\mathfrak{R}_2, \mathfrak{H}\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2) \tag{9.5}$$

gleichbedeutend. Unter Verwendung von (9.1) und (9.2) erkennt man aber sofort, daß (9.3) und (9.4) in Hilfssatz 8.1 und (9.5) in Hilfssatz 8.2 bewiesen ist.

2. *Beweis von Satz 3.4.* Hier sind die Behauptungen des Satzes mit

$$L(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{S}_2) \cdot \mathfrak{S}_1^S = \mathfrak{S}_1^S \cdot L(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2, \mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2\mathfrak{S}_2) \tag{9.6}$$

$$R^{-1}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{S}_2) \cdot \mathfrak{S}_1^S = \mathfrak{S}_1^S \cdot R^{-1}(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2, \mathfrak{H}\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_1^2) \tag{9.7}$$

gleichbedeutend. Schreibt man dies auf die Systeme L_0 und R_0 um, so ist

$$L_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{S}_2) \cdot \mathfrak{S}_1^D = \mathfrak{S}_1^D \cdot L_0(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2, \mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2\mathfrak{S}_2)$$

$$R_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{S}_2) \cdot \mathfrak{S}_1^D = \mathfrak{S}_1^D \cdot R_0(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2, \mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2\mathfrak{S}_2)$$

noch zu beweisen. Da diese beiden Relationen in Hilfssatz 8.3 unter der Voraussetzung bewiesen wurden, daß für jedes $\mathfrak{A}$ aus $A_0(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2, \mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2\mathfrak{S}_2)$ stets

$$(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2)^A \mathfrak{A} (\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2)^{A-1} \text{ ganz} \tag{9.8}$$

ist, hat man sich nur noch zu überlegen, daß unter den Voraussetzungen 1) oder 2) von Satz 3.4 immer (9.8) erfüllt ist. Nach Hilfssatz 7.6 ist aber (9.8) richtig, wenn entweder

$$\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^2 \text{ und } \mathfrak{S}_2 \text{ teilerfremd}$$

oder

$$\mathfrak{S}_2 \text{ einfach}$$

gilt. Das ist aber in Satz 3.4 vorausgesetzt.

3. *Beweis von Satz 3.5.* Die Behauptung des Satzes ist mit

$$\mathfrak{S}^S \cdot R^{-1}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{S}^2) \equiv L(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{S}^2)\, \mathfrak{S}^{S-1} \cdot \{M(\mathfrak{H})\; l\; M(\mathfrak{H}; \mathfrak{S})\} \tag{9.9}$$

gleichbedeutend, unter Verwendung von (9.1), (9.2) und (2.4) auch mit

$$\mathfrak{S}^D \cdot R_0^{-1}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{S}^2) \equiv L_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{S}^2) \cdot \mathfrak{S}^{D-1} \cdot \{M_0(\mathfrak{H})\; l\; \mathfrak{S}^D M_0(\mathfrak{H}\mathfrak{S}^2)\, \mathfrak{S}^{D-1}\}. \tag{9.10}$$

Nach ES (1.8) ist aber

$$\mathfrak{S}^D M_0(\mathfrak{H}\mathfrak{S}^2)\, \mathfrak{S}^{D-1} = M_0(\mathfrak{H}) \cap \Omega(\mathfrak{S}^{D-1})$$

und (9.10) ist in Hilfssatz 8.7 bewiesen. Die Voraussetzungen von Hilfssatz 8.7 erhält man — da $\mathfrak{S}$ einfach vorausgesetzt war — durch eine leichte Induktion nach n aus Hilfssatz 7.5.

4. *Beweis von Satz 3.6.* a) Aus Hilfssatz 8.4 folgt sofort

$$L(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{P}^\nu)\, L(\mathfrak{H}\mathfrak{P}^\nu, \mathfrak{H}\mathfrak{P}^{\nu+1}) \equiv L(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{P}^{\nu+1}) \cup p \cdot L(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{P}^{\nu-1})\, \mathfrak{P}^S$$

und Übergang zu den Operatoren liefert

$$\begin{aligned} |\mathfrak{P}|^{\frac{\nu}{s}}\, T(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{P}^\nu)\, |\mathfrak{P}|^{\frac{1}{s}}\, T(\mathfrak{H}\mathfrak{P}^\nu, \mathfrak{H}\mathfrak{P}^{\nu+1}) = {} & |\mathfrak{P}|^{\frac{\nu+1}{s}}\, T(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{P}^{\nu+1}) \\ & + p\, |\mathfrak{P}|^{\frac{\nu-1}{s}}\, T(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{P}^{\nu-1})\, V(\mathfrak{H}\mathfrak{P}^{\nu-1}, \mathfrak{H}\mathfrak{P}^{\nu+1}). \end{aligned}$$

Da sich die Faktoren wegkürzen, ist Teil a) bewiesen.

b) Folgt mit gleichen Schlußweisen aus Hilfssatz 8.5.

c) Folgt analog aus Hilfssatz 8.8.

d) Man kann ohne Schwierigkeit einen zu Hilfssatz 8.8 analogen Hilfssatz beweisen, der die Behauptung liefert. Einfacher erhält man die Aussagen für Spitzenformen aus Teil c) in Verbindung mit Satz 3.7.

5. *Beweis von Satz 3.7.* Der Beweis benutzt wesentlich einen Hilfssatz, der in spezieller Form bei Maass ([10], Hilfssatz 1) zu finden ist. Die Formulierung des Hilfssatzes ist aber allgemeiner und der Beweis zugleich etwas einfacher.

Hilfssatz 9.1. Es seien $\Gamma \subseteq \Gamma'$ zwei multiplikative Gruppen, A eine solche Teilmenge von Γ', daß mit a auch $\alpha\, a$ und $a\, \alpha$ (α aus Γ) zu A gehört. Ferner gelte für jedes a aus A

$$[\Gamma : \Gamma \cap a \cdot \Gamma \cdot a^{-1}] = [\Gamma : \Gamma \cap a^{-1} \cdot \Gamma \cdot a].$$

Dann gibt es ein gemeinsames Vertretersystem V in A bezüglich Links- und Rechtsassoziation, d. h. es existiert eine direkte Zerlegung

$$A = \sum_{a \in V} a \cdot \Gamma = \sum_{a \in V} \Gamma \cdot a.$$

Beweis: Zunächst gibt es sicher eine elementfremde Zerlegung

$$A = \sum_\nu \Gamma \cdot a_\nu \cdot \Gamma.$$

Die Komplexe $\Gamma \cdot a_\nu \cdot \Gamma$ zerlegt man weiter in Links- bzw. Rechtsklassen nach Γ

$$\Gamma \cdot a_\nu \cdot \Gamma = \sum_{1 \leq j \leq \varrho_\nu} \Gamma \cdot a_\nu \alpha_{\nu j} = \sum_{1 \leq j \leq \sigma_\nu} \beta_{\nu j} a_\nu \cdot \Gamma, \quad \alpha_{\nu j}, \beta_{\nu j} \in \Gamma. \tag{9.11}$$

Da $a_\nu \alpha_{\nu j} = \alpha\, a_\nu \alpha_{\nu i}$, α aus Γ, notwendig

$$\alpha_{\nu j} \alpha_{\nu i}^{-1} = a_\nu^{-1} \alpha\, a_\nu \in a_\nu^{-1} \cdot \Gamma \cdot a_\nu \cap \Gamma$$

zur Folge hat, ist

$$\varrho_\nu = [\Gamma : \Gamma \cap a_\nu^{-1} \cdot \Gamma \cdot a_\nu]$$

und entsprechend

$$\sigma_\nu = [\Gamma : \Gamma \cap a_\nu \cdot \Gamma \cdot a_\nu^{-1}],$$

also nach Voraussetzung des Hilfssatzes $\varrho_\nu = \sigma_\nu$. Für (9.11) kann man sodann auch

$$\Gamma \cdot a_\nu \cdot \Gamma = \sum_j \Gamma \cdot \beta_{\nu j}\, a_\nu\, \alpha_{\nu j} = \sum_j \beta_{\nu j}\, a_\nu\, \alpha_{\nu j} \cdot \Gamma$$

schreiben, denn $\Gamma \cdot a$ und $\Gamma \cdot \alpha a$, α aus Γ, definieren den gleichen Komplex. Die Produkte

$$\beta_{\nu j} a_\nu \alpha_{\nu j}$$

stellen also ein gewünschtes gemeinsames Vertretersystem V dar.

Zum Beweis des Satzes setzt man nun $K = M(\mathfrak{H}) \cap M(\mathfrak{H}\mathfrak{K})$. Für $f(\mathfrak{Z})$ aus $\{M(\mathfrak{H}), k\}$ hat man sofort

$$f/T[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}] = \frac{1}{[M(\mathfrak{H}) : K]\, \alpha_l(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})} \sum_{\substack{\mathfrak{A} \in A(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}) \\ \mathfrak{A}/K}} f/\mathfrak{A}. \tag{9.12}$$

Die Gruppe K ist nun so bestimmt, daß mit $\mathfrak{A}$ auch $\mathfrak{M}\,\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}\,\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}$ aus K, in $A(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})$ liegen. Die zur Anwendung von Hilfssatz 9.1 noch fehlende Gleichung

$$[K : K \cap \mathfrak{A}\, K\, \mathfrak{A}^{-1}] = [K : K \cap \mathfrak{A}^{-1} K\, \mathfrak{A}]$$

erhält man sofort, wenn man beide Seiten nach MF II (1.2) als Quotient zweier Volumina von Fundamentalbereichen in H_n darstellt. Hilfssatz 9.1 ist also anwendbar und liefert einerseits

$$[M(\mathfrak{H}) : K] \cdot \alpha_l(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}) = [M(\mathfrak{H}\mathfrak{K}) : K] \cdot \alpha_r(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}),$$

während man andererseits ein solches Vertretersystem von Matrizen $\mathfrak{A}$ wählen kann, daß

$$f/T[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}] = \frac{1}{[M(\mathfrak{H}\mathfrak{K}) : K]\, \alpha_r(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})} \sum_{\substack{\mathfrak{A} \in A(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}) \\ \mathfrak{A}\,r\,K}} f/\mathfrak{A}$$

gilt. Nach MF II, Satz 5d, ist wieder $(f/\mathfrak{A}, g) = (f, g/\mathfrak{A}^{-1})$, so daß man

$$\begin{aligned}
(f/T[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}], g) &= \frac{1}{[M(\mathfrak{H}\mathfrak{K}) : K]\, \alpha_r(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})} \sum_{\substack{\mathfrak{A} \in A(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}) \\ \mathfrak{A}\,r\,K}} (f, g/\mathfrak{A}^{-1}) \\
&= \frac{1}{\alpha_r(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})} \sum_{R(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K})} (f, g/\mathfrak{A}^{-1}) \\
&= (f, g/T^*[\mathfrak{H}\mathfrak{K}, \mathfrak{H}])
\end{aligned}$$

erhält. Teil b) beweist man analog.

6. *Beweis von Satz 3.8:* Es genügt wohl, wenn nur Teil a) bewiesen wird. Man hat dazu nach der verallgemeinerten Dreiecksgleichung

$$|f/T[\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{S}]| \leq \frac{1}{\alpha_l(\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{S})} \sum_{\mathfrak{A}\in L(\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{S})} |f/\mathfrak{A}|.$$

Wie im Beweis zu Satz 3.7 überlegt man sich sofort, daß $|f/\mathfrak{A}| = |f|$ für jedes $\mathfrak{A}$ aus $L(\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{S})$ gilt, so daß die Behauptung richtig ist.

7. *Beweis von Satz 3.9.* Da man nach Hilfssatz 7.5 jedes $\mathfrak{A}$ aus $L(\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{S})$ in der Form (7.7) mit $c = 0$ wählen kann, erhält man die Behauptung sofort aus der Definition des Operators Φ.

8. *Beweis von Satz 3.10.* Teil a) war bereits in § 9.5 bewiesen.

Teil b) erhält man aus den Hilfssätzen 8.1 und 8.2 durch Übergang zu den Anzahlen der Systeme.

Ist $\mathfrak{S} = [1,1,\ldots,1,g]$, dann zeigt Hilfssatz 7.5, daß $L_0(\mathfrak{H},\mathfrak{H}\mathfrak{S})$ und $L_0(1,g)$ isomorph sind. Da die Anzahl der Elemente von $L_0(1,g)$ mit der Teilersumme von g übereinstimmt, ist auch Teil c) bewiesen, da die zweite Behauptung aus (9.9) folgt.

§ 10. Beweis der Sätze 4.1 bis 4.5

1. *Beweis von Satz 4.1.* Da Satz 4.1 nur die Übertragung von Satz 3.3 auf $F_n(k)$ darstellt, genügt es wohl, wenn die Durchführung nur für die erste Behauptung dargelegt wird. Aus der Definition von $T(\mathfrak{S})$ in (4.1) folgert man nacheinander

$$\begin{aligned}
\{f\}/T(\mathfrak{S}_1)\,T(\mathfrak{S}_2) &= \{f(\mathfrak{Z};\mathfrak{H})\}/T(\mathfrak{S}_1)\,T(\mathfrak{S}_2)\\
&= \{\delta(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^{-1})\,f(\mathfrak{Z};\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^{-1})/T(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^{-1},\mathfrak{H})\}/T(\mathfrak{S}_2)\\
&= \{\delta(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_2^{-1})\,\delta(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^{-1}\mathfrak{S}_2^{-1})\,f(\mathfrak{Z};\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^{-1}\mathfrak{S}_2^{-1})/T(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^{-1}\mathfrak{S}_2^{-1},\mathfrak{H}\mathfrak{S}_2^{-1})\\
&\qquad\qquad T(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_2^{-1},\mathfrak{H})\}\\
&= \{\delta(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^{-1}\mathfrak{S}_2^{-1})\,f(\mathfrak{Z};\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^{-1}\mathfrak{S}_2^{-1})/T(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^{-1}\mathfrak{S}_2^{-1},\mathfrak{H}\mathfrak{S}_2^{-1})\,T(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_2^{-1},\mathfrak{H})\}\\
&= \{\delta(\mathfrak{H}_0)\,f(\mathfrak{Z};\mathfrak{H}_0)/T(\mathfrak{H}_0,\mathfrak{H}_0\mathfrak{S}_1)\,T(\mathfrak{H}_0\mathfrak{S}_1,\mathfrak{H}_0\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2)\},
\end{aligned}$$

wenn man für den Augenblick $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2$ setzt. Da nur an den Stellen von Null verschiedene Elemente stehen, an denen $\mathfrak{H}_0$ ET-Matrix ist, kann man Satz 3.3 sofort anwenden und erhält für die rechte Seite

$$\begin{aligned}
&= \{\delta(\mathfrak{H}_0)\,f(\mathfrak{Z};\mathfrak{H}_0)/T(\mathfrak{H}_0,\mathfrak{H}_0\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2)\}\\
&= \{\delta(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^{-1}\mathfrak{S}_2^{-1})\,f(\mathfrak{Z};\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^{-1}\mathfrak{S}_2^{-1})/T(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_1^{-1}\mathfrak{S}_2^{-1},\mathfrak{H})\}\\
&= \{f(\mathfrak{Z};\mathfrak{H})\}/T(\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2) = \{f\}/T(\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2),
\end{aligned}$$

also die Behauptung des Satzes.

2. *Beweis von Satz 4.2.* Analog der Ausführung in 1 erschließt man aus den Sätzen 3.4 und 3.6 die folgenden Gleichungen:

$$T(\mathfrak{S}_2)\,V(\mathfrak{S}_1) = V(\mathfrak{S}_1)\,T(\mathfrak{S}_2), \quad T^*(\mathfrak{S}_2)\,V(\mathfrak{S}_1) = V(\mathfrak{S}_1)\,T^*(\mathfrak{S}_2), \tag{10.1}$$

für teilerfremde Matrizen $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$, für die außerdem noch $\mathfrak{S}_2$ einfach ist,

ferner

(10.2) $$T(\mathfrak{P}^\nu)\,T(\mathfrak{P}) = T(\mathfrak{P}^{\nu+1}) + T(\mathfrak{P}^{\nu-1})\,V(\mathfrak{P}),$$

(10.3) $$T(\mathfrak{P})\,V(\mathfrak{P}) = V(\mathfrak{P})\,T(\mathfrak{P}),$$

(10.4) $$V(\mathfrak{P})\,T^*[\mathfrak{P}] = T[\mathfrak{P}],$$

(10.5) $$T[\mathfrak{P}]\,V^*(\mathfrak{P}) = T^*[\mathfrak{P}],$$

für Primmatrizen $\mathfrak{P}$.

Trägt man die für einfaches $\mathfrak{G}$ aus Satz 3.10c folgende Formel

$$\alpha_r(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{G}^2) = \alpha_l(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{G}^2)\,[M(\mathfrak{H}) : M(\mathfrak{H}; \mathfrak{G})].$$

in Satz 3.5 ein, so folgt

(10.6) $$V(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{G}^2)\,T^*[\mathfrak{H}\mathfrak{G}^2, \mathfrak{H}] = T[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{G}^2]\,V^*(\mathfrak{H}\mathfrak{G}^2, \mathfrak{H}),$$

und

(10.7) $$V(\mathfrak{G})\,T^*[\mathfrak{G}^2] = T[\mathfrak{G}^2]\,V^*(\mathfrak{G}),\quad \mathfrak{G} \text{ einfach}.$$

Man kommt nun zum Beweis des Satzes. Zuerst sind nach (10.3) $T(\mathfrak{P})$ und $V(\mathfrak{P})$ vertauschbar. (10.2) zeigt weiter, daß sich jedes $T(\mathfrak{P}^\nu)$ als Summe von Potenzprodukten in $T(\mathfrak{P})$ und $V(\mathfrak{P})$ schreiben läßt, also insbesondere auch $T(\mathfrak{P}^\nu)$ und $V(\mathfrak{P})$ vertauschbar sind. Wegen $V(\mathfrak{P}^\mu) = V^\mu(\mathfrak{P})$ sind dann aber auch alle Operatoren der Form $T(\mathfrak{P}^\nu)$ und $V(\mathfrak{P}^\mu)$ bei fester Primmatrix $\mathfrak{P}$ vertauschbar. Nimmt man noch Satz 4.1 und (4.4) hinzu, dann erkennt man, daß P_n ein kommutativer Ring ist. Damit ist Teil a), aber auch gleichzeitig Teil b) des Satzes bewiesen.

Teil c) folgt analog zum Heckeschen Beweis der entsprechenden Formel für $n = 1$ durch eine leichte Induktion aus der Gl. (10.2).

Die noch fehlenden Teile d) und e) waren schon in (10.7) und (10.4, 5) bewiesen.

3. *Beweis von Satz 4.3.* Es genügt wohl, wenn der Beweis dafür, daß die sechs im Satz angeführten Operatoren die Schar $S_n(k)$ in sich abbilden, nur für $T(\mathfrak{G})$ geführt wird, denn die anderen Fälle können analog erledigt werden. Man hat dazu

$$\begin{aligned} |\{f\}/T(\mathfrak{G})|^2 &= \sum_{\mathfrak{H}} \delta(\mathfrak{H}\mathfrak{G}^{-1})\,|f(\mathfrak{Z}; \mathfrak{H}\mathfrak{G}^{-1})/T(\mathfrak{H}\mathfrak{G}^{-1}, \mathfrak{H})|^2 \\ &= \sum_{\mathfrak{H}} |f(\mathfrak{Z}; \mathfrak{H})/T(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{G})|^2, \end{aligned}$$

wenn $\mathfrak{H}$ in beiden Summen alle ET-Matrizen durchläuft. Jetzt ist aber

$$\begin{aligned} |f(\mathfrak{Z}; \mathfrak{H})/T(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{G})| &= \alpha_l(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{G})\,|\mathfrak{G}|^{-\frac{k}{2}}\,|f(\mathfrak{Z}; \mathfrak{H})/T[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{G}]| \\ &\leq |\mathfrak{G}|^{4n^2-\frac{k}{2}}\,|f(\mathfrak{Z}; \mathfrak{H})| \end{aligned}$$

nach Satz 3.2 und Satz 3.8a. $|\{f\}/T(\mathfrak{G})|$ konvergiert also, d. h. $\{f\}/T(\mathfrak{G})$ liegt in $S_n(k)$.

Die Aussagen a) und b) des Satzes erschließt man völlig analog unter Verwendung der Sätze 3.8 und 3.7.

4. *Beweis von Satz 4.4.* Die erste Aussage folgt sofort aus Satz 4.2a bis c und (4.6) in Verbindung mit Satz 4.3b.

b) Es genügt, wenn nur die erste Behauptung bewiesen wird, da die zweite wieder aus Satz 4.3b folgt. Der Beweis geschieht durch Induktion nach $|\mathfrak{G}|$. Für Primmatrizen $\mathfrak{G}$ ist die Behauptung bereits in Satz 4.2e) gezeigt. Sei nun $\mathfrak{G}$ nicht Primmatrix, dann kann man

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{K}\mathfrak{P},\ \mathfrak{P} \text{ Primmatrix, } \mathfrak{K} \text{ ET-Matrix}$$

schreiben und unterscheidet zwei Fälle:

1) $(|\mathfrak{K}|, |\mathfrak{P}|) = 1$, dann hat man unter Verwendung von Satz 4.1

$$\begin{aligned} T[\mathfrak{G}]\,V^*(\mathfrak{G}) &= T[\mathfrak{K}]\,T[\mathfrak{P}]\,V^*(\mathfrak{P})\,V^*(\mathfrak{K}) = T[\mathfrak{K}]\,T^*[\mathfrak{P}]\,V^*(\mathfrak{K}) \\ &= T^*[\mathfrak{P}]\,T[\mathfrak{K}]\,V^*(\mathfrak{K}) = T^*[\mathfrak{P}]\,T^*[\mathfrak{K}] = T^*[\mathfrak{G}]. \end{aligned}$$

2) $(|\mathfrak{K}|, |\mathfrak{P}|) > 1$. Jetzt ist $\mathfrak{K} = \mathfrak{R}\mathfrak{P}$ mit ganzem $\mathfrak{R}$ und nach (4.6) folgt

$$T[\mathfrak{R}\mathfrak{P}]\,T[\mathfrak{P}] = \beta(\mathfrak{R}\mathfrak{P},\mathfrak{P};\mathfrak{E})\,T[\mathfrak{R}\mathfrak{P}^2] + \beta(\mathfrak{R}\mathfrak{P},\mathfrak{P};\mathfrak{P})\,T[\mathfrak{R}]\,V(\mathfrak{P}),$$

also wegen $\mathfrak{R}\mathfrak{P}^2 = \mathfrak{G}$

$$\begin{aligned} &\beta(\mathfrak{R}\mathfrak{P},\mathfrak{P};\mathfrak{E})\,T[\mathfrak{G}]\,V^*(\mathfrak{G}) \\ &\quad= T[\mathfrak{R}\mathfrak{P}]\,T[\mathfrak{P}]\,V^*(\mathfrak{P})\,V^*(\mathfrak{R}\mathfrak{P}) - \beta(\mathfrak{R}\mathfrak{P},\mathfrak{P};\mathfrak{P})\,T[\mathfrak{R}]\,V^*(\mathfrak{R}\mathfrak{P}) \\ &\quad= T[\mathfrak{R}\mathfrak{P}]\,T^*[\mathfrak{P}]\,V^*(\mathfrak{R}\mathfrak{P}) - \beta(\mathfrak{R}\mathfrak{P},\mathfrak{P};\mathfrak{P})\,T^*[\mathfrak{R}]\,V^*(\mathfrak{P}) \\ &\quad= T[\mathfrak{R}\mathfrak{P}]\,V^*(\mathfrak{R}\mathfrak{P})\,T^*[\mathfrak{P}] - \beta(\mathfrak{R}\mathfrak{P},\mathfrak{P};\mathfrak{P})\,V^*(\mathfrak{P})\,T^*[\mathfrak{R}] \\ &\quad= T^*[\mathfrak{R}\mathfrak{P}]\,T^*[\mathfrak{P}] - \beta(\mathfrak{R}\mathfrak{P},\mathfrak{P};\mathfrak{P})\,V^*(\mathfrak{P})\,T^*[\mathfrak{R}] \\ &\quad= \beta(\mathfrak{R}\mathfrak{P},\mathfrak{P};\mathfrak{E})\,T^*[\mathfrak{G}] \end{aligned}$$

nach Teil a) des Satzes.

c) Man hat nach b) und (4.6)

$$\begin{aligned} \alpha^2(\mathfrak{G})\,T[\mathfrak{G}]\,T^*[\mathfrak{G}] &= \alpha^2(\mathfrak{G})\,T[\mathfrak{G}]\,T[\mathfrak{G}]\,V^*(\mathfrak{G}) \\ &= \alpha^2(\mathfrak{G})\sum_{\mathfrak{D}|\mathfrak{G}} \beta(\mathfrak{G},\mathfrak{G};\mathfrak{D})\,T\left[\frac{\mathfrak{G}^2}{\mathfrak{D}^2}\right] V(\mathfrak{D})\,V^*(\mathfrak{G}) \\ &= \alpha^2(\mathfrak{G})\sum_{\mathfrak{D}|\mathfrak{G}} \beta(\mathfrak{G},\mathfrak{G};\mathfrak{G}\,\mathfrak{D}^{-1})\,T[\mathfrak{D}^2]\,V^*(\mathfrak{D}) \\ &= \sum_{\mathfrak{D}|\mathfrak{G}} T(\mathfrak{D}^2)\,V^*(\mathfrak{D}) \end{aligned}$$

mit (4.3).

5. *Beweis von Satz 4.5.* a) Man hat

$$|\{f\}/T(\mathfrak{G})| = \alpha(\mathfrak{G})\,|\{f\}/T[\mathfrak{G}]| \leq \alpha(\mathfrak{G})\,|\{f\}|$$

nach (4.3) und Satz 4.3a). Da

$$\sum_{\mathfrak{G}} \alpha(\mathfrak{G})\,|\mathfrak{G}|^{-s}$$

für $Re\, s > \frac{3}{2}$ absolut konvergiert, ist Teil a) richtig.

b) Zunächst ist im Konvergenzgebiet

$$T_s = \prod_{\mathfrak{P}} T_s(\mathfrak{P}),\quad T_s(\mathfrak{P}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} |\mathfrak{P}^\nu|^{-s}\,T(\mathfrak{P}^\nu),$$

außerdem erschließt man aber aus (10.2) leicht die Gültigkeit von

$$T_s(\mathfrak{P})\cdot(1 - |\mathfrak{P}|^{-s}\,T(\mathfrak{P}) + |\mathfrak{P}|^{-2s}\,V(\mathfrak{P})) = 1,$$

so daß auch Satz 4.5 vollständig bewiesen ist.

Literatur

[1] Eichler, M.: Quadratische Formen und orthogonale Gruppen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1952. — [2] Hecke, E.: Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. Teil I. Math. Ann. **114**, 1—28 (1937). — [3] Hecke, E.: Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. Teil II. Math. Ann. **114**, 316—351 (1937). — [4] Hecke, E.: Analytische Arithmetik der positiven quadratischen Formen. Danske Vidensk. Selsk. Math.-fys. Medd. **17**, 12 (1940). — [5] Hermann, O.: Über Hilbertsche Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. Math. Ann. **127**, 357—400 (1954). — [6] Koecher, M.: Zur Theorie der Modulformen n-ten Grades. Teil I. Math. Z. **59**, 399—416 (1954). — [7] Koecher, M.: Zur Theorie der Modulformen n-ten Grades. Teil II. Math. Z. **61**, 455—466 (1955). — [8] Koecher, M.: Einheitengruppen schiefsymmetrischer Matrizen. Math. Nachr. **13**, 367—382 (1955). — [9] Maass, H.: Über die Darstellung der Modulformen n-ten Grades durch Poincaréscshe Reihen. Math. Ann. **123**, 125—151 (1951). — [10] Maass, H.: Die Primzahlen in der Theorie der Siegelschen Modulfunktionen. Math. Ann. **124**, 87—122 (1951). — [11] Petersson, H.: Konstruktion der sämtlichen Lösungen einer Riemannschen Funktionalgleichung durch Dirichlet-Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. Teil I. Math. Ann. **116**, 401—412 (1939). — [12] Petersson, H.: Über eine Metrisierung der ganzen Modulformen. Jber. dtsch. Math.-Ver. **49**, 49—75 (1939). — [13] Petersson, H.: Über die lineare Zerlegung der den ganzen Modulformen von höherer Stufe entsprechenden Dirichlet-Reihen in vollständige Eulersche Produkte. Acta math. **80**, 191—221 (1948). — [14] Siegel, C. L.: Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades. Math. Ann. **116**, 617—657 (1939). — [15] Siegel, C. L.: Analytic functions of several complex variables. Princeton, Inst. f. Advanced Study, hektographiert (1948/49). — [16] Siegel, C. L.: Über die analytische Theorie der quadratischen Formen. Ann. Math. **36**, 527—606 (1935). — [17] Sugawara, M.: On the transformation theory of Siegel's modular group of the n-th degree. Proc. Imp. Acad. Japan **13**, 335—338 (1937). — [18] Sugawara, M.: An invariant property of Siegel's modular function. Proc. Imp. Acad. Japan **14**, 1—3 (1941).

(Eingegangen am 21. Juni 1955)

OHMANN, D.
Math. Annalen, Bd. 130, S. 386—393 (1956)

Ungleichungen zwischen den Quermaßintegralen beschränkter Punktmengen. III

Von

D. OHMANN in Milano

In diesem dritten Teil bedienen wir uns der Hilfsmittel der Teile I[1]) und II[2]), um notwendige und hinreichende Bedingungen für das Auftreten von Gleichheit in der in Teil I bewiesenen Ungleichung

$$w_p^n \geqq v_n^p \, w_0^{n-p} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{1}$$

zwischen den inneren Quermaßintegralen w_p und w_0 beschränkter Mengen herzuleiten (v_n = Volumen der n-dim. Einheitskugel). Des weiteren untersuchen wir das Vollständigkeitsproblem für das Ungleichungssystem

$$w_p^{n-r} \geqq v_n^{p-r} \, w_r^{n-p} \quad (p, r = 0, 1, \ldots, n-1;\ p > r), \tag{2}$$

dessen Richtigkeit wir allerdings erst in den Fällen $r = 0$ (Teil I) und $p = n - 1$ (nur für abgeschlossene Mengen; Teil II) dargetan haben.

Die Ergebnisse formulieren wir folgendermaßen:

(α) *In* (1) *tritt für eine beschränkte Menge genau dann Gleichheit ein, wenn sie fast ganz in einer maßgleichen Kugel gleichen p-ten Quermaßintegrals enthalten ist.*

(β) *Unter der Voraussetzung der Richtigkeit aller Ungleichungen* (2) *können außer diesen keine weiteren allgemein gültigen und von ihnen unabhängigen Ungleichungen zwischen den Quermaßintegralen abgeschlossener Mengen bestehen.*

In (α) bezieht sich „fast ganz" und „maßgleich" auf das innere Maß; „fast ganz" bedeutet daher „bis auf eine Teilmenge des inneren Maßes null".

§ 1. Vorbereitungen

Wir stellen eine Reihe von Hilfsmitteln und Formeln bereit, die wir vorwiegend den Teilen I und II entnehmen. Für nähere Erklärungen und Beweise wird daher zumeist auf die entsprechenden Stellen in diesen Aufsätzen verwiesen.

1. Bezeichnet $A(\xi)$ den Normalriß der Menge A in der Richtung ξ, v_n das Volumen der n-dim. Einheitskugel Ω_n und $m(A)$ das n-dim. innere Lebesgue-Maß von A, so werden die inneren Quermaßintegrale $w_p(A)$ durch das Formelsystem (Teil I, § 1)

$$\begin{aligned} & w_p(A) = \frac{1}{n v_{n-1}} \int_{\Omega_n} w_{p-1}(A;\xi)\, d\xi \qquad (w_{p-1}(A;\xi) = w_{p-1}[A(\xi)]; \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad p = 1, 2, \ldots, n-1). \\ & w_0(A) = m(A), \quad w_n(A) = v_n \end{aligned} \tag{3}$$

[1]) D. OHMANN: Ungleichungen zwischen den Quermaßintegralen. I. Math. Ann. 124, 265—276 (1952).

[2]) D. OHMANN: Ungleichungen zwischen den Quermaßintegralen. II. Math. Ann. 127, 1—7 (1954).

definiert, in dem die Integrale als untere Lebesgue-Integrale zu verstehen sind, die für abgeschlossene Mengen allerdings in Lebesgue-Integrale schlechthin übergehen (Teil II, § 1). Einheitlicher Bezeichnung halber wird das innere Maß einer Menge A im folgenden vorwiegend durch $w_0(A)$ wiedergegeben.

2. Die durch Verkürzung (Teil I, § 3) in der Richtung ξ um den Betrag $\tau > 0$ aus der abgeschlossenen Menge A hervorgegangene (wiederum abgeschlossene) Menge $A(\xi/\tau)$ umfaßt genau alle Punkte $\mathfrak{x} \in A$, für die der Durchschnitt der von ihnen in der Richtung $-\xi$ ausgehenden Halbgeraden mit A kein geringeres lineares Maß als τ besitzt. Für die Abnahme der Quermaßintegrale bei Verkürzung abgeschlossener Mengen gelten die Formeln

$$(4)\quad \begin{aligned} &\text{(a)}\quad w_0(A;\tau') - w_0(A;\tau'') = \int_{\tau'}^{\tau''} w_0(A;t,\xi)\,dt && (\tau' < \tau'') \\ &\text{(b)}\quad w_p(A;\tau') - w_p(A;\tau'') \geqq \frac{n-p}{n}\int_{\tau'}^{\tau''} w_p(A;t,\xi)\,dt && (p = 1, 2, \ldots, n-1). \end{aligned}$$

Dabei ist $w_p(A;\tau)$ abkürzend für $w_p[A(\xi/\tau)]$ gesetzt, und $w_p(A;t,\xi)$ bezeichnet das Quermaßintegral des Normalrisses der verkürzten Menge in der Verkürzungsrichtung: $w_p(A;t,\xi) = w_p(A';\xi)$ $(A' = A(\xi/t))$. Die Beziehungen (4) sind in Teil I (§ 3) für die dort definierten Quermaß-K-Integrale (K = konvex) hergeleitet worden. Die dortigen Entwicklungen behalten jedoch — wie leicht einzusehen — auch für Lebesgue-Integrale ihre Gültigkeit.

3. Wir skizzieren das in Teil II (§ 3) eingeführte Abänderungsverfahren für Mengen, die aus endlich vielen konvexen Körpern bestehen. Da wir es hier nur in der Ebene anwenden werden, betrachten wir dazu eine ebene Menge A, die sich aus endlich vielen konvexen Bereichen zusammenset t. Durch Aussonderung der Bereiche verschwindenden Inhalts entstehe die Menge A_0, zu deren konvexen Hülle $\bar{A}_0$ wir die Parallelbereiche $\bar{A}_0^{\tau}$ im Abstand $\tau > 0$ nach innen (im G. Bolschen Sinne[3]) bilden. Ihre Durchschnitte mit A_0 stellen dann schon die abgeänderten Mengen A^{τ} dar. Es ist jedoch noch hinzuzufügen, daß an den Stellen $\tau_\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$, für die A^{τ} konvexe Bereiche verschwindenden Inhalts umfaßt, die Parallelbereichbildung erst nach Aussonderung dieser Bereiche auf die konvexe Hülle der dadurch entstandenen Menge A_ν weiter angewendet wird. Dadurch ergibt sich die endgültige abschnittsweise Darstellung $A^{\tau} = A_\nu \cap \bar{A}_\nu^{(\tau-\tau_\nu)}$ $(\tau_\nu < \tau < \tau_{\nu+1})$.

Es seien noch die später benötigten Formeln notiert:

$$(5)\quad \begin{aligned} &\text{(a)}\quad w_0(A^{\tau'}) - w_0(A^{\tau''}) = \int_{\tau'}^{\tau''} l'(A^{\tau})\,dt \\ &\text{(b)}\quad w_1(A^{\tau'}) - w_1(A^{\tau''}) \geqq \pi(\tau'' - \tau') \end{aligned} \qquad (\tau'' > \tau').$$

bei denen $l'(A^t)$ die Gesamtlänge des zu A^t gehörenden Teiles der Berandung der konvexen Hülle $\bar{A}^t$ bezeichnet.

---

[3]) G. Bol: Beweis einer Vermutung von H. Minkowski. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **15**, 37—56 (1943).

4. Ein Approximationssatz für ebene Mengen: Jede ebene, beschränkte und abgeschlossene Menge A läßt sich derart durch Mengen $A^* \supset A$ approximieren, die aus endlich vielen konvexen Bereichen bestehen, daß sich die Quermaßintegrale w_1 von A^* und A beliebig wenig voneinander unterscheiden. Zum Beweis sei $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A$ eine gegen A konvergente Folge von Mengen, die sich jeweils aus endlich vielen konvexen Bereichen zusammensetzen. Sodann konvergieren auch die Normalrisse $A_1(\xi) \subset A_2(\xi) \subset \cdots \subset A(\xi)$ gegen $A(\xi)$, und es folgt $\lim\limits_{\varkappa \to \infty} w_0(A_\varkappa; \xi) = w_0(A; \xi)$. Durch Integration über Ω_2 ergibt sich wegen der Existenz des Lebesgue-Integrals $w_1(A) = \frac{1}{4} \int\limits_{\Omega_2} w_0(A; \xi)\, d\xi$ aber schon $\lim\limits_{\varkappa \to \infty} w_1(A_\varkappa) = w_1(A)$ und mithin die Richtigkeit des Approximationssatzes.

5. Die *Kernhülle* K_A zur beschränkten Menge A führen wir als den konvexen Durchschnitt aller abgeschlossenen Halbräume ein, deren Durchschnitt mit der Menge A zu dieser maßgleich ist. K_A ist damit der kleinste unter allen konvexen Körpern, für die der Durchschnitt mit A gleiches inneres Maß wie A selbst besitzt. Wir notieren $w_0(K_A \cap A) = w_0(A)$.

6. Zur Herleitung einer wichtigen Abschätzung bezeichne C den Rand der konvexen Hülle der ebenen und aus endlich vielen konvexen Bereichen bestehenden Menge A und C' bzw. C'' den zu A bzw. nicht zu A gehörenden Teil von C. Wir merken zunächst die Maßdarstellung $w_0(A; \xi) = \frac{1}{2} \int\limits_C g(\mathfrak{x}; \xi) \times$ $\times |\xi\, \eta_\mathfrak{x}|\, d\mathfrak{x}$ für den Normalriß $A(\xi)$ an, in der $\eta_\mathfrak{x}$ die äußere Normalenrichtung von C im Punkt $\mathfrak{x} \in C$ angibt, und $g(\mathfrak{x}; \xi) = 1$ bzw. $g(\mathfrak{x}; \xi) = 0$ zu setzen ist, je nach dem, ob die durch den Punkt $\mathfrak{x}$ mit der Richtung ξ hindurchgehende Gerade die Menge A trifft oder nicht. Integration über alle Richtungen ξ, anschließende Umkehrung der Integrationsordnung und Einführung des zwischen ξ und $\eta_\mathfrak{x}$ liegenden Winkels γ liefert dann $w_1(A) = \frac{1}{4} \int\limits_C \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} g(\mathfrak{x}; \xi) \times$ $\times \cos\gamma\, d\gamma\, d\mathfrak{x}$. Getrennte Integration über C' und C'' ergibt wegen $g(\mathfrak{x}; \xi) = 1$ für $\mathfrak{x} \in C'$

$$w_1(A) = \tfrac{1}{2} l'(A) + \tfrac{1}{4} \int\limits_{C''} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} g(\mathfrak{x}; \xi) \cos\gamma\, d\gamma\, d\mathfrak{x}\,. \tag{6}$$

wobei $l'(A)$ das lineare Maß von C' angibt. Auf Grund der Definition von $g(\mathfrak{x}; \xi)$ sieht man noch die Richtigkeit der folgenden Ungleichung ein: $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} g(\mathfrak{x}; \xi) \cos\gamma\, d\gamma \geqq 2 \int\limits_{\frac{\pi}{2}-\gamma_0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\gamma\, d\gamma \left(\gamma_0 = \frac{1}{2} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} g(\mathfrak{x}; \xi)\, d\gamma \leqq \frac{\pi}{2} \right)$, aus der wegen $\int\limits_{\frac{\pi}{2}-\gamma_0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\gamma\, d\gamma = 1 - \cos\gamma_0 \geqq \frac{\gamma_0^2}{2}$ sofort $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} g(\mathfrak{x}; \xi) \cos\gamma\, d\gamma \geqq \gamma_0^2$ folgt.

Da für alle durch $\mathfrak{x}$ mit der Richtung ξ hindurchgehenden Geraden, die A treffen, $g(\mathfrak{x};\xi) = 1$ besteht, muß weiterhin $\gamma_0 D(A)^2 \geqq w_0(A)$ ausfallen ($D(A)$ = Durchmesser von A). Aus (6) erschließt man daher, wenn $l''(A)$ noch das lineare Maß von C'' bezeichnet:

$$2w_1(A) - l'(A) \geqq l''(A)\,\frac{w_0(A)^2}{2D(A)^4}. \tag{7}$$

§ 2. Die Gleichheitsbedingungen

Wir ändern die eingangs formulierte Aussage (α) in folgender Weise ab:
(α^*) *Existiert zu einer beschränkten Menge A^* positiven inneren Maßes eine Folge abgeschlossener Mengen $A_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots$), für die die Bedingungen*

(8) (a) $A_\varkappa \subseteq A_{\varkappa+1} \subseteq A^*$, (b) $\lim\limits_{\varkappa\to\infty} w_0(A_\varkappa) = w_0(A^*)$,

(c) $\lim\limits_{\varkappa\to\infty} \varphi_p(A_\varkappa) = 0$ $\qquad (\varphi_p = w_p^n - v_n^p\, w_0^{n-p})$

erfüllt sind, so ist A^* fast ganz in einer maßgleichen Kugel enthalten.

(α) selbst ist hieraus leicht zu gewinnen: Einerseits läßt sich nämlich jeder beschränkten Menge A positiven Maßes, für die in (1) Gleichheit Platz greift, eine Mengenfolge gemäß (α^*) zuordnen, womit aus (α^*) folgt, daß A fast ganz in einer maßgleichen Kugel K liegt. Die in (α) zusätzlich enthaltene Bedingung $w_p(A) = w_p(K)$ ist dann aber zur Sicherstellung der Gleichheit ebenfalls notwendig. Andererseits ist unmittelbar einzusehen, daß die Bedingungen von (α) für das Eintreten von Gleichheit hinreichen. Für Mengen verschwindenden Maßes ist (α) trivialerweise richtig.

1. Der Beweis von (α^*) für $n = 2$. Es sei A^* eine ebene Menge, die den Bedingungen von (α^*) genügt. Sodann können wir die abgeschlossenen Mengen $A_\varkappa$ dem Approximationssatz von § 1.4 entsprechend derart durch Mengen $B_\varkappa \supset A_\varkappa$ approximieren, die sich als Vereinigungsmenge endlich vieler konvexer Bereiche darstellen, daß $\lim\limits_{\varkappa\to\infty} [w_1(B_\varkappa) - w_1(A_\varkappa)] = 0$ besteht. Wegen $\varphi_1 \geqq 0$ folgt daraus unter Beachtung von (8b) und (8c)

(9) (a) $\lim\limits_{\varkappa\to\infty} w_0(B_\varkappa) = w_0(A^*)$, (b) $\lim\limits_{\varkappa\to\infty} \varphi_1(B_\varkappa) = 0.$

Für hinreichend großes $\varkappa$ (etwa $\varkappa \geqq k$) ist daher sicher, daß die durch die in § 1,3 beschriebene Abänderung aus den $B_\varkappa$ hervorgegangenen Mengen $B_\varkappa^{\tau_\varkappa}$ für $\tau_\varkappa^2 = \varphi_1(B_\varkappa)$ nicht leer sind. Nun erschließen wir aus den Formeln (5) für die Abnahme von φ_1 die Abschätzung

$$\varphi_1(B_\varkappa) - \varphi_1(B_\varkappa^{\tau_\varkappa}) \geqq \pi \int_0^{\tau_\varkappa} (2w_1(B_\varkappa^t) - l'(B_\varkappa^t))\,dt\,.$$

Bezeichnet $t_\varkappa$ dann noch einen der Werte von t auf $(0, \tau_\varkappa)$, für den der Integrand seinen Mittelwert nicht überschreitet, so folgt bei Berücksichtigung von $\varphi_1(B_\varkappa^{\tau_\varkappa}) \geqq 0$ die Ungleichung $\varphi_1(B_\varkappa) \geqq \pi\,\tau_\varkappa\,[2\,w_1(B_\varkappa^{t_\varkappa}) - l'(B_\varkappa^{t_\varkappa})]$. Diese läßt sich unter Benutzung der Ungleichung (7) wegen $\varphi_1(B_\varkappa) = \tau_\varkappa^2$ zu

$$\tau_\varkappa \geqq \pi\, l''(B'_\varkappa)\,\frac{w_0(B'_\varkappa)^2}{2D(B'_\varkappa)^4} \tag{10}$$

umformen, wenn zur Abkürzung noch $B_\varkappa^{t_\varkappa} = B'_\varkappa$ gesetzt ist.

Aus (9b) ist $\lim\limits_{\varkappa\to\infty} \tau_\varkappa = 0$ zu folgern, so daß sich gemäß (5a) aus (9a) auch $\lim\limits_{\varkappa\to\infty} w_0(B'_\varkappa) = w_0(A^*)$ sowie vermöge $w_1(B'_\varkappa) < w_1(B_\varkappa)$ aus (9b) anschließend $\lim\limits_{\varkappa\to\infty} \varphi_1(B'_\varkappa) = 0$ ergibt. Wegen (10) ist zudem $\lim\limits_{\varkappa\to\infty} l''(B'_\varkappa) = 0$, woraus der Bedeutung von l'' entsprechend (§ 1.6) für die konvexe Hülle $\overline{B'_\varkappa}$ von $B'_\varkappa$ unmittelbar $\lim\limits_{\varkappa\to\infty} [w_1(\overline{B'_\varkappa}) - w_1(B'_\varkappa)] = 0$ folgt. Dies zieht wegen $\overline{B'_\varkappa} \supseteq B'_\varkappa$ weiterhin $\lim\limits_{\varkappa\to\infty} \varphi_1(\overline{B'_\varkappa}) = 0$ sowie $\lim\limits_{\varkappa\to\infty} w_0(\overline{B'_\varkappa}) = w_0(A^*)$ nach sich. Endlich hat man der Konstruktion der konvexen Bereiche $\overline{B'_\varkappa}$ nur noch $\lim\limits_{\varkappa\to\infty} w_0(\overline{B'_\varkappa} \cap A^*) = w_0(A^*)$ zu entnehmen, um auf deren Konvergenz gegen die Kernhülle K^* von A^* schließen zu können. Für K^* ist dann $w_0(K^*) = w_0(A^* \cap K^*) = w_0(A^*)$. Weiter finden wir $\varphi_1(K^*) = 0$, so daß sich K^* nach bekannten Methoden als Kreis ausweisen läßt. A^* liegt mithin fast ganz im maßgleichen Kreis K^*.

2. Der Beweis von (α^*) für $n > 2$. Wir führen die Induktionsvoraussetzung ein, daß (α^*) für geringere als n-te Dimension richtig sei, und sondern aus der Folge der abgeschlossenen Mengen $A_\varkappa$, die der Menge A^* den Bedingungen von (α^*) gemäß zugeordnet ist, derart eine Teilfolge A'_λ ($\lambda = 1, 2, \ldots$) aus, daß für das Funktional $\psi_p = w_p - v_n^{\frac{p}{n}} w_0^{\frac{n-p}{n}}$ die Ungleichung $\psi_p(A'_\lambda) < \frac{1}{(\lambda+1)!}$ besteht, was wegen (8c) sicher möglich ist. Die Mengen A'_λ werden sodann in der festen Richtung ξ um die Beträge $\tau_\lambda = \frac{1}{\lambda!}$ verkürzt, wobei λ wegen (8b) so groß gewählt werden kann (etwa $\lambda > l$), daß $w_0(A'_\lambda; \tau_\lambda) > \frac{1}{2} w_0(A^*)$ ausfällt.

Nun setzen wir die Formeln (4) zu

$$\psi_p(A'_\lambda) - \psi_p(A'_\lambda; \tau_\lambda) \geqq \frac{n-p}{n} \int\limits_0^{\tau_\lambda} \left[w_p(A'_\lambda; t, \xi) - v_n^{\frac{p}{n}} \frac{w_0(A'_\lambda; t, \xi)}{w_0(A'_\lambda; t)^{\frac{p}{n}}} \right] dt$$

zusammen und teilen das Integral aus später ersichtlichen Gründen folgendermaßen: $\int\limits_0^{\tau_\lambda} \ldots dt = \int\limits_0^{\tau_{\lambda+1}} \ldots dt + \int\limits_{\tau_{\lambda+1}}^{\tau_\lambda} \ldots dt$. Bezeichnet $-M$ alsdann für $\lambda > l$ eine wegen $w_0(A'_\lambda; \tau_\lambda) > \frac{1}{2} w_0(A^*)$ $(\lambda > l)$ sicher existierende, von λ unabhängige untere Schranke für den Integranden auf $(0; \tau_{\lambda+1})$ und genügt $t_\lambda(\tau_{\lambda+1} < t_\lambda < \tau_\lambda)$ der Forderung, daß der Integrand dort seinen Mittelwert auf $(\tau_{\lambda+1}; \tau_\lambda)$ nicht überschreitet, so ergibt sich bei Beachtung von $\psi_p(A'_\lambda) < \frac{1}{(\lambda+1)!}$ und $\tau_\lambda = \frac{1}{\lambda!}$ für $\lambda > l$ die Ungleichung

$$\frac{1}{(\lambda+1)!} + \frac{(n-p)M}{n(\lambda+1)!} >$$
$$> \psi_p(A'_\lambda; t_\lambda) + \frac{n-p}{n} \left(\frac{1}{\lambda!} - \frac{1}{(\lambda+1)!} \right) \cdot \left[w_p(A^*_\lambda; \xi) - v_n^{\frac{p}{n}} \frac{w_0(A^*_\lambda; \xi)}{w_0(A^*_\lambda)^{\frac{p}{n}}} \right],$$

in der zur Abkürzung A^*_λ für $A'_\lambda(\xi/t_\lambda)$ steht. Berücksichtigung der aus (1)

folgenden Ungleichung $\psi_p \geqq 0$ führt zu

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left[w_p(A_\lambda^*;\xi) - v_n^{\frac{p}{n}}\frac{w_0(A_\lambda^*;\xi)}{w_0(A_\lambda^*)^{\frac{p}{n}}}\right] \leqq 0\,,$$

woraus die Beziehung

$$(11)\qquad v_{n-1}^{\frac{p}{n-1}}\, v_n^{\frac{p}{n}} \lim_{\lambda\to\infty}\frac{w_0(A_\lambda^*;\xi)^{\frac{n-p-1}{n-1}}}{w_0(A_\lambda^*)^{\frac{p}{n}}}\left[\left(\frac{w_0(A_\lambda^*;\xi)}{v_{n-1}}\right)^{\frac{p}{n-1}} - \left(\frac{w_0(A_\lambda^*)}{v_n}\right)^{\frac{p}{n}}\right] \geqq$$

$$\geqq \lim_{\lambda\to\infty}\psi_p(A_\lambda^*;\xi) \geqq 0$$

nach einigen Umformungen abzuleiten ist.

Nachdem wir zunächst noch

$$(12)\qquad \lim_{\lambda\to\infty} w_0(A_\lambda^*) = \lim_{\lambda\to\infty} w_0(A_\lambda') = w_0(A^*)$$

festgehalten haben [folgt aus (4a) und $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\tau_\lambda = 0$ sowie (8b)], erschließen wir aus (11)

$$(13)\qquad \lim_{\lambda\to\infty}\left[\left(\frac{w_0(A_\lambda^*;\xi)}{v_{n-1}}\right)^{\frac{p}{n-1}} - \left(\frac{w_0(A_\lambda^*)}{v_n}\right)^{\frac{p}{n}}\right] \geqq 0$$

und daraus wegen (12) unter Beachtung von $w_0(A_\lambda';\xi) \geqq w_0(A_\lambda^*;\xi)$ aber auch

$$(14)\qquad \lim_{\lambda\to\infty}\left[\left(\frac{w_0(A_\lambda';\xi)}{v_{n-1}}\right)^{\frac{p}{n-1}} - \left(\frac{w_0(A_\lambda')}{v_n}\right)^{\frac{p}{n}}\right] \geqq 0\,.$$

Man kann jedoch andererseits aus $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\psi_p(A_\lambda') = 0$ mit Hilfe der Definitionsformel (3) zunächst

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_{\Omega_n}\left[\frac{w_{p-1}(A_\lambda';\xi)}{v_{n-1}} - \left(\frac{w_0(A_\lambda')}{v_n}\right)^{\frac{n-p}{n}}\right] d\,\xi = 0$$

gewinnen, um dann vermöge $\psi_{p-1}(A_\lambda';\xi) \geqq 0$ auf

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_{\Omega_n}\left[\left(\frac{w_0(A_\lambda';\xi)}{v_{n-1}}\right)^{\frac{n-p}{n-1}} - \left(\frac{w_0(A_\lambda')}{v_n}\right)^{\frac{n-p}{n}}\right] d\,\xi \leqq 0$$

zu schließen, was aber mit (14) sicher nur dann verträglich ist, wenn eine auf Ω_n überall dicht liegende Menge Ω' von Richtungen ξ existiert, für die in (14) Gleichheit eintritt. Dann hat aber für $\xi \in \Omega'$ ebenfalls in (13) Gleichheit statt, was wir mit Hilfe von (12) in der Form

$$(15)\qquad \lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{w_0(A_\lambda^*;\xi)}{v_{n-1}}\right)^{\frac{p}{n-1}} = \left(\frac{w_0(A^*)}{v_n}\right)^{\frac{p}{n}} \qquad (\xi \in \Omega')$$

festhalten können. Weiterhin ist aus (11) noch auf

$$(16)\qquad \lim_{\lambda\to\infty}\psi_p(A_\lambda^*;\xi) = 0 \qquad (\xi \in \Omega')$$

zu schließen.

Nun entnehmen wir $A'_{\lambda+1} \supseteqq A'_\lambda$ und $t_\lambda > \tau_{\lambda+1} > t_{\lambda+1}$ unter Beachtung von $A^*_\lambda = A'_\lambda(\xi/t_\lambda)$ die Beziehung $A^*_{\lambda+1} \supset A^*_\lambda$ und für die Normalrisse mithin $A^*_{\lambda+1}(\xi) \supseteqq A^*_\lambda(\xi)$. Damit läßt sich das Maß der Vereinigungsmenge $A^t = \bigcup_{\lambda=l+1}^{\infty} A^*_\lambda(\xi)\ (\xi \in \Omega')$ durch $w_0(A^t) = \lim_{\lambda\to\infty} w_0(A^*_\lambda;\xi)$ wiedergeben. Wegen (16) entspricht A^t daher den Bedingungen von (α^*) und liegt gemäß Induktionsvoraussetzung fast ganz in einer maßgleichen $(n-1)$-dim. Kugel K^ξ, deren Radius sich nach (15) zu $r = \left(\frac{w_0(A^*)}{v_n}\right)^{\frac{1}{n}}$ errechnet. Weiter gestattet die Beziehung (12) in Verbindung mit $A^*_\lambda \subset A^*$ die Folgerung, daß die Kernhülle K^* von A^* ganz in dem von K^ξ in der Richtung ξ zu entwerfenden Projektionszylinder liegen muß. Für $\xi \in \Omega'$ gilt daher die Ungleichung

$$w_0(K^*;\xi) \leqq v_{n-1}\left(\frac{w_0(A^*)}{v_n}\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqq v_{n-1}\left(\frac{w_0(K^*)}{v_n}\right)^{\frac{n-1}{n}},$$

deren zweiter Teil sofort aus der Definition der Kernhülle (§ 1.5) folgt. Da K^* konvex ist, hängt $w_0(K^*;\xi)$ stetig von ξ ab. Die Gültigkeit der Ungleichung dehnt sich daher auf alle $\xi \in \Omega_n$ aus. Aus $\psi_1(K^*) \geqq 0$ ist dann aber mit Hilfe der Formel (3) verschärfend auf

$$w_0(K^*;\xi) = v_{n-1}\left(\frac{w_0(K^*)}{v_n}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

zu schließen. Die Normalrisse $K^*(\xi)$ stimmen mithin in den Richtungen $\xi \in \Omega'$ mit den Kugeln K^ξ überein und stellen aus Stetigkeitsgründen auch in den anderen Richtungen $(n-1)$-dim. Kugeln von gleichem Radius dar. Aus der bekannten Tatsache, daß K^* damit selbst eine Kugel darstellen muß, ergibt sich schließlich schon die Aussage von (α^*).

§ 3. Das Vollständigkeitsproblem

Zum Beweis der Aussage (β) brauchen wir offenbar zu jedem beliebigen n-Tupel positiver Größen $a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1}$ bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ nur je eine abgeschlossene Menge A zu konstruieren, für die

$$(17) \qquad |w_\nu(A) - v_n a_p^{n-p}| < \varepsilon \qquad (p = 0, 1, \ldots, n-1)$$

ausfällt.

Wir bilden dazu für $p = 2, 3, \ldots, n-1$ bei festem orthogonalem Richtungs-n-Tupel $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ und vorgegebener ganzer Zahl l den Durchschnitt A_p der Oberfläche C_p einer Kugel K_p des Radius a_p mit der Vereinigungsmenge E_p aller $(n-p+1)$-dim. Ebenen e, die auf je $p-1$ der Richtungen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ senkrecht stehen und die vom Mittelpunkt von K_p die Entfernungen $\frac{\lambda a_p}{l}$ $(\lambda = 0, 1, \ldots, l)$ besitzen. $A_p = C_p \cap E_p$ besteht damit aus endlich vielen $(n-p)$-dim. Kugeloberflächen, so daß also jedem ν-dim. Normalriß von A_p für $\nu > n-p$ das ν-dim. Maß null zukommt. Aus der Definition der Quermaßintegrale folgt daher $w_\varrho(A_p) = 0$ $(\varrho = 0, 1, 2, \ldots, p-1)$. Andererseits lassen

sich die Ebenen e durch hinreichend große Wahl von l derart dicht anordnen, daß die $(n-p)$-dim. Normalrisse α_p von A_p beliebig genau $(n-p)$-dim. Kugeln des Radius a_p approximieren. Wählen wir l so groß, daß

$$|w_0(\alpha_p) - v_{n-p}\, a_p^{n-p}| < \varepsilon\, \frac{v_{n-p}}{v_n} \qquad (\varepsilon > 0).$$

besteht, so erschließt man mit Hilfe der Definitionsformel (3) $|w_p(A) - v_n a_p^{n-p}| < \varepsilon$.

Damit erfüllt die Vereinigungsmenge einer Kugel K_0 des Radius a_0, einer zu ihr konzentrischen Kugeloberfläche C_1 des Radius a_1 und den zu beiden konzentrisch anzuordnenden Mengen $A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$ gerade die Bedingungen (17).

(Eingegangen am 20. Juli 1955)

Krull, W.
Math. Annalen, Bd. 130, S. 394—398 (1956)

Eine Bemerkung über primäre Integritätsbereiche

Von
Wolfgang Krull in Bonn

$A, B, \ldots$ sind Integritätsbereiche mit dem Quotientenkörper K. Gibt es keinen zwischen A und K liegenden Ring $B\,(A \subset B \subset K)$, so nennen wir A *maximal*. Bekanntlich gilt der Satz: A ist dann und nur dann maximal, wenn A der Bewertungsring einer einrangigen (reellwertigen) Bewertung B von K ist. Je nachdem, ob B diskret ist oder nicht, soll A als diskreter bzw. nichtdiskreter Maximalring bezeichnet werden. Unter einem „Ideal" $\mathfrak{a}$ aus A verstehen wir stets ein ganzes Ideal $\neq A$, $\neq (0)$. In entsprechender Weise bedeutet „Nichteinheit" immer eine von 0 verschiedene Nichteinheit. Mit $a \cdot A$ bezeichnen wir das durch a erzeugte Hauptideal; ein Ideal $\mathfrak{e}$ mit endlicher Basis heißt *endlich*. Bildet in A die Menge aller Nichteinheiten das einzige Primideal $\mathfrak{p}$, so nennen wir A *primär*. — Wir gehen aus von dem wohlbekannten *Maximalringkriterium:*

A ist dann und nur dann ein Maximalring, wenn A primär ist und der folgenden *Teilbarkeitsbedingung* genügt: Sind a und b beliebige Nichteinheiten aus A, so folgt aus $b \notin a \cdot A$ stets $a \in b \cdot A$.

Wir fragen nach Kriterien, die formal als schwächer angesehen werden können als die Teilbarkeitsbedingung, gleichwohl aber inhaltlich sie vollwertig ersetzen[1]). Grundlegend ist der im positiven Teil (a)) von Krull, im negativen (b)) von Nagata und Ribenboim bewiesene *Durchschnittssatz*[2]):

a) Der primäre Integritätsbereich A ist dann und nur dann Durchschnitt von Maximalringen, wenn A *vollständig ganz abgeschlossen* ist, wenn also aus $\alpha \in K$, $a \neq 0$, $a \cdot \alpha^n \in A\,(n = 1, 2, \ldots)$ stets $\alpha \in A$ folgt.

b) Es gibt vollständig ganz abgeschlossene, primäre Integritätsbereiche, die keine Maximalringe sind.

Angesichts des Durchschnittssatzes formulieren wir unsere Frage genauer: Unter welchen möglichst schwachen Bedingungen ist der primäre, vollständig ganz abgeschlossene Integritätsbereich A ein Maximalring?

Satz 1. *Der primäre, vollständig ganz abgeschlossene Integritätsbereich A ist dann (und selbstverständlich nur dann) ein diskreter Maximalring, wenn $\mathfrak{p}^n$ für hinreichend großes n in einem endlichen Ideal $\mathfrak{e}$ enthalten ist.*

---

[1]) Der Gedanke, bei vollständig ganz abgeschlossenem A die Teilbarkeitsbedingung durch eine äquivalente Forderung für die Ideale von A zu ersetzen, stammt von Herrn P. Ribenboim. Herr Ribenboim sucht solche Bedingungen, die es gestatten, direkt von A ausgehend eine Bewertung $\mathfrak{B}$ von K zu konstruieren, von der sich dann zeigen läßt, daß A ihr Bewertungsring wird. Im Text werden dagegen Voraussetzungen eingeführt, aus denen geschlossen werden kann, daß es nur *eine* Bewertung $\mathfrak{B}$ von K mit A umfassendem Bewertungsring gibt. Herr Ribenboim wird seine Resultate gegebenenfalls selbständig veröffentlichen.

[2]) Krull, Math. Z. 41, 66—79 (1936); Nagata, Nagoya Math. J. 4 29—33 (1952).

Ist nämlich a eine beliebige Nichteinheit aus A, so haben wir $\mathfrak{p}^{n \cdot m} \subsetneqq A$, $\mathfrak{e}^m \subsetneqq a \cdot A$ für passendes m, und daraus folgt für die (nicht ganzen) Ideale $\mathfrak{p}^{-m \cdot n}$ bzw. $\mathfrak{p}^{-1}$ sofort: $a^{-1} \in \mathfrak{p}^{-m \cdot n}$, $\mathfrak{p}^{-m \cdot n} \supset A$, $\mathfrak{p}^{-1} \supset A$. Da A vollständig ganz abgeschlossen und primär ist, ergibt sich aus $\mathfrak{p}^{-1} \supset A$ weiter $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}^{-1} = A$, und aus $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}^{-1} = A$ schließt man nach üblichem Schema, daß in A jedes Ideal $\mathfrak{a}$ eine Potenz von $\mathfrak{p}$ ist. Man hat dabei nur zu beachten, daß $\mathfrak{e}^l \subsetneqq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}^{n \cdot l} \subsetneqq \mathfrak{a}$, für passendes l[3]). „Jedes Ideal $\mathfrak{a}$ Potenz von $\mathfrak{p}$" ist aber gerade die charakteristische Eigenschaft der diskreten Maximalringe.

Unser weiteres Interesse gilt ausschließlich den *nichtendlichen* primären Integritätsbereichen, in denen *niemals* $\mathfrak{p}^n \subsetneqq \mathfrak{e}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Wir knüpfen an die Bemerkung an, daß ein primärer Ring durch das Verhalten der Potenzen seiner endlichen Ideale charakterisiert werden kann[4]), und suchen die Teilbarkeitsbedingung des Maximalkriteriums durch eine Forderung zu ersetzen, in der nur von Potenzen endlicher Ideale die Rede ist. Zu diesem Zwecke definieren wir: Bei jedem Paar endlicher Ideale $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1$ *mit* $\mathfrak{e}_1 \supset \mathfrak{e}$ soll unter $k(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1)$ bzw. $g(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1)$ die kleinste bzw. größte ganze Zahl m verstanden werden, derart daß $\mathfrak{e}_1^m \subsetneqq \mathfrak{e}$ bzw. $\mathfrak{e}_1^m \supset \mathfrak{e}$. Mit $d(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1)$ werde die rationale Zahl $(k(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1) - g(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1)) \cdot g(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1)^{-1}$ bezeichnet. (Man beachte: $g(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1) > 0$ wegen $\mathfrak{e}_1 \supset \mathfrak{e}$; $k(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1) - g(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1) \geqq 1$ wegen $\mathfrak{e}_1^{k(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1)} \subsetneqq \mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1^{g(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1)} \not\subseteq \mathfrak{e}$). — Bei nichtendlichem A kann man $\mathfrak{e}_1$ zu gegebenem $\mathfrak{e}$ stets so wählen, daß $k(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1) \geqq N$ für beliebig großes N. Denn wäre $k(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1) \leqq N$ für alle $\mathfrak{e}_1$, so hätten wir $\mathfrak{p}^n \subsetneqq \mathfrak{e}$ wegen $\mathfrak{p}^n = \bigcup_{\mathfrak{e}_1} \mathfrak{e}_1^n$. — Ist ferner A ein nichtdiskreter Maximalring, so $k(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1) - g(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1) = 1$ für jedes Paar $\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1 \supset \mathfrak{e}$. Denn man hat hier $\mathfrak{e} = a \cdot A$, $\mathfrak{e}_1 = a_1 \cdot A$, und es ist $k(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1)$ bzw. $g(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1)$ gleich der kleinsten bzw. größten Zahl m, für die $m \cdot \mathfrak{B}(a_1) \geqq \mathfrak{B}(a)$ bzw. $m \cdot \mathfrak{B}(a_1) < \mathfrak{B}(a)$, falls $\mathfrak{B}(c)$ den Wert von c in der durch A definierten Bewertung $\mathfrak{B}$ von K bedeutet. — Aus den beiden letzten Bemerkungen und der Tatsache, daß $g(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1') \geqq g(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1)$ für $\mathfrak{e}_1' \geqq \mathfrak{e}_1$, folgt unmittelbar:

Satz 2. *Ist A ein nichtdiskreter Maximalring, so ist $d(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1)$ bei festem $\mathfrak{e}$ eine monoton abnehmende Funktion von $\mathfrak{e}_1$, d. h. $d(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1') \leqq d(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1)$ für $\mathfrak{e}_1' \geqq \mathfrak{e}_1$. Man hat* $\lim d(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1) = 0$ *in dem Sinne, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\mathfrak{e}_1$ mit $d(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1) < \varepsilon$ existiert.*

(Bei $\lim d(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1) = 0$ beachte man, daß wegen $k(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1) - 1 = g(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1)$ in unserem Falle nicht nur $k(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1)$, sondern auch $g(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1)$ beliebig groß gemacht werden kann.) — Aus Satz 2 ergibt sich das

Korollar: Bei einem nichtdiskreten Maximalring ist folgende *Potenzgrenzbedingung* erfüllt: Zu zwei beliebigen endlichen Idealen $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}'$ gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein endliches Ideal $\mathfrak{e}_1$ derart, daß $d(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1) + d(\mathfrak{e}', \mathfrak{e}_1) \leqq \varepsilon$.

In der Tat, nach Satz 2 gibt es jedenfalls zwei endliche Ideale $\mathfrak{e}_1'$, $\mathfrak{e}_1''$, für die $d(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1') \leqq \varepsilon/2$, $d(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1'') \leqq \varepsilon/2$ und wegen der Monotonieeigenschaft von $d(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1)$ wird $d(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1) + d(\mathfrak{e}', \mathfrak{e}_1) \leqq \varepsilon$ für $\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_1' + \mathfrak{e}_1''$. — Das Korollar umzukehren, also aus der Potenzgrenzbedingung rückwärts rein formal die Monotonie von

---

[3]) Zu dem Operieren mit $\mathfrak{p}^{-1}$ vgl. etwa: van der Waerden, Moderne Algebra II §105.

[4]) A ist dann und nur dann primär, wenn bei zwei beliebigen endlichen Idealen $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ stets $\mathfrak{e}_1^n \subsetneqq \mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_2^n \subsetneqq \mathfrak{e}_1$ für passendes n.

$d(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}_1)$ und $\lim d(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}_1) = 0$ herzuleiten, scheint nicht möglich. Die Potenzgrenzbedingung ist also „schwächer" als die Forderung der Monotonie und des asymptotischen Verschwindens von $d(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}_1)$. Wir werden dementsprechend im folgenden nur mit der Potenzgrenzbedingung arbeiten. Zu der Wahl ihres Namens sei bemerkt: Der Sinn der Potenzgrenzbedingung kann darin gesehen werden, daß $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}'$ *beide* näherungsweise Potenzen von $\mathfrak{c}_1$ sind, wobei allerdings die Exponenten mit einem durch die Schranke ε begrenzten Fehler behaftet sind.

Satz 3. *Gilt für den nichtendlichen, primären, vollständig ganz abgeschlossenen Integritätsbereich A die Potenzgrenzbedingung, so ist A ein nichtdiskreter Maximalring.*

Nach dem Durchschnittssatz ist A Durchschnitt von Maximalringen B_τ. Es seien nun, was stets möglich ist, die durch die B_τ bestimmten Bewertungen $\mathfrak{B}_\tau$ von K so normiert, daß $\mathfrak{B}_\tau(a_0) = 1$ für alle $\mathfrak{B}_\tau$, wobei a_0 eine beliebig, aber fest gewählte Nichteinheit aus A bedeutet. Man überlegt sich dann zunächst leicht: Satz 3 ist bewiesen, sobald die Richtigkeit des folgenden *Hilfssatzes* gezeigt ist:

Aus $\mathfrak{B}_\tau(a_0) = 1$ für alle τ folgt $\mathfrak{B}_{\tau_1}(a) = \mathfrak{B}_{\tau_2}(a)$ für alle $a \in A$ und jedes Paar $\mathfrak{B}_{\tau_1}, \mathfrak{B}_{\tau_2}$ aus der Reihe der $\mathfrak{B}_\tau$.

Es seien nämlich bei Gültigkeit des Hilfssatzes a, b beliebige Nichteinheiten aus A und etwa $\mathfrak{B}_{\tau_1}(a) \leqq \mathfrak{B}_{\tau_1}(b)$ für ein τ_1. Dann haben wir nach dem Hilfssatz $\mathfrak{B}_{\tau_1}(a) \leqq \mathfrak{B}_\tau(a) \leqq \mathfrak{B}_\tau(b) = \mathfrak{B}_{\tau_1}(b)$ für alle Bewertungen $\mathfrak{B}_\tau$, d. h. es gehört $b \cdot a^{-1}$ zu $\cap B_\tau = A$. Es muß also der primäre, nichtendliche Ring A ein nichtdiskreter Maximalring sein, weil er der Teilbarkeitsbedingung des Maximalringkriteriums genügt. — Wir wenden uns jetzt zum Beweise des Hilfssatzes. Sei a eine beliebige Nichteinheit aus A und $\mathfrak{B}_{\tau_1} = \mathfrak{B}$ eine beliebige Bewertung aus der Reihe der $\mathfrak{B}_\tau$. Dann brauchen wir nur zu zeigen: Ohne nähere Kenntnis von $\mathfrak{B}$ kann man allein auf Grund von $\mathfrak{B}_{\tau_1}(a_0)$ und der Potenzgrenzbedingung $\mathfrak{B}(a)$ beliebig genau berechnen, d. h. Intervalle beliebig kleiner Länge finden. in die $\mathfrak{B}(a)$ hineinfallen muß[5]). Nun ist jedenfalls $a_0^n \in a \cdot A, \mathfrak{B}(a) \leqq M \cdot \mathfrak{B}(a_0) = M$ für hinreichend großes M, wir haben also von vornherein für $\mathfrak{B}(a)$ eine feste obere Schranke M. Daraus folgt, daß $\mathfrak{B}(a)$ schon dann beliebig genau berechenbar ist, wenn man für jedes $\varepsilon > 0$ eine Eingabelung $C \cdot (1 + \eta_1) \geqq \geqq \mathfrak{B}(a) \geqq C \cdot (1 + \eta_2)$ $(|\eta_i| < \varepsilon)$ finden kann. (Beachte, daß hier jedenfalls $C < 2M$ für $\varepsilon < \frac{1}{2}$). — Es sei nun ε vorgegeben, $\zeta(\varepsilon) = \zeta$ sei eine in erst später festzulegender Weise von ε abhängige, hinreichend kleine positive Zahl, und es sei $a_0 \cdot A = \mathfrak{c}_0, a \cdot A = \mathfrak{c}$. Dann werde $\mathfrak{c}_1$ so gewählt, daß $d(\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1) + d(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}_1) < \zeta$. Da $\mathfrak{c} \cdot B = c \cdot B$ in dem zu $\mathfrak{B}$ gehörigen Bewertungsring B Hauptideal ist, ist $\mathfrak{B}(\mathfrak{c}_1) = \mathfrak{B}(c)$ erklärt und aus den Definitionen von $k(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}_1)$ usw. folgt sofort:

$$k(\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1) \cdot \mathfrak{B}(\mathfrak{c}_1) \geqq \mathfrak{B}(\mathfrak{c}_0) = \mathfrak{B}(a_0) = 1 > g(\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1) \cdot \mathfrak{B}(\mathfrak{c}_1), \tag{1}$$

$$k(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}_1) \cdot \mathfrak{B}(\mathfrak{c}_1) \geqq \mathfrak{B}(\mathfrak{c}) = \mathfrak{B}(a) > g(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}_1) \cdot \mathfrak{B}(\mathfrak{c}_1). \tag{2}$$

[5]) Daß aus den Intervallen eine auf einen Punkt zusammenziehende Folge gebildet werden kann, braucht nicht bewiesen zu werden, da ja die Existenz von $\mathfrak{B}(a)$ vorausgesetzt ist. Ebensowenig brauchen wir uns mit der Gültigkeit der Formeln $\mathfrak{B}(a \cdot b) = \mathfrak{B}(a) + \mathfrak{B}(b)$, $\mathfrak{B}(a + b) \leqq \min(\mathfrak{B}(a), \mathfrak{B}(b))$ zu beschäftigen.

(1) ist gleichwertig mit

$$g(e_0, e_1)^{-1} > \mathfrak{B}(e_1) \geq k(e_0, e_1)^{-1}, \tag{3}$$

und wegen

$$g(e_0, e_1)^{-1} - k(e_0, e_1)^{-1} = d(e_0, e_1) \cdot k(e_0, e_1)^{-1} \tag{4}$$

folgt aus (3):

$$\begin{gathered}(1 + d(e_0, e_1)) \cdot k(e_0, e_1)^{-1} > \mathfrak{B}(e_1) \geq k(e_0, e_1)^{-1}; \\ \mathfrak{B}(e_1) = (1 + \xi) \cdot k(e_0, e_1)^{-1}. \qquad (0 \leqq \xi < \zeta)\end{gathered} \tag{5}$$

Setzt man (5) in (2) ein, so ergibt sich:

$$k(e, e_1) \cdot k(e_0, e_1)^{-1} \cdot (1 + \xi) \geqq \mathfrak{B}(a) > g(e, e_1) \cdot k(e_0, e_1)^{-1} \cdot (1 + \xi). \tag{6}$$

Aus (6) schließt man weiter mit $d(e, e_1) = (k(e, e_1) - g(e, e_1)) \cdot g(e, e_1)^{-1}$; $g(e, e_1) = k(e, e_1) - d(e, e_1) \cdot g(e, e_1)$:

$$\begin{gathered}k(e, e_1) \cdot k(e_0, e_1)^{-1} \cdot (1 + \xi) \geqq \mathfrak{B}(a) > \\ > k(e, e_1) \cdot k(e_0, e_1)^{-1} \cdot (1 + \xi) \cdot [1 - d(e, e_1) \cdot g(e, e_1) \cdot k(e, e_1)^{-1}].\end{gathered} \tag{7}$$

Wegen $0 < g(e, e_1) \cdot k(e, e_1)^{-1} < 1$, $0 < d(e, e_1) < \zeta$ erhält man schließlich:

$$\begin{gathered}k(e, e_1) \cdot k(e_0, e_1)^{-1} \cdot (1 + \xi) \geqq \mathfrak{B}(a) > \\ > k(e, e_1) \cdot k(e_0, e_1)^{-1} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 - \vartheta). \qquad (|\xi| < \zeta, |\vartheta| < \zeta)\end{gathered} \tag{8}$$

d. h. aber, man kann $\zeta = \zeta(\varepsilon)$ so wählen, daß $C \cdot (1 + \eta_1) \geqq \mathfrak{B}(a) \geqq C \cdot (1 + \eta)$ $(|\eta_i| < \varepsilon)$ mit $C = k(e, e_1) \cdot k(e_0, e_1)^{-1}$. Damit ist der Beweis des Hilfssatzes und gleichzeitig der von Satz 3 abgeschlossen. Da wir bei dem Hilfssatz nirgendwo von der Tatsache Gebrauch machen mußten, daß A vollständig ganz abgeschlossen ist, haben wir nebenbei für beliebige primäre Integritätsbereiche gezeigt:

Satz 4. *Genügt der primäre, nichtendliche Integritätsbereich A der Potenzgrenzbedingung, so gibt es in K höchstens einen A umfassenden Maximalring B.*

Es liegt nahe, Satz 4 noch dadurch zu verschärfen, daß man das „höchstens einen Maximalring" durch „genau einen Maximalring" ersetzt. Man hätte zu diesem Zwecke zu zeigen: Ist die Potenzgrenzbedingung erfüllt, so kann man, ausgehend von der Feststellung $\mathfrak{B}(a_0) = 1$ für eine beliebige Nichteinheit $a_0 \in A$ jedem Element $a \in A$ nach der beim Beweis des Hilfssatzes benutzten Methode *eindeutig* einen „Wert" $\mathfrak{B}(a) \geqq 0$ zuordnen, und es gilt dabei $\mathfrak{B}(a \cdot b) = \mathfrak{B}(a) + \mathfrak{B}(b)$, $\mathfrak{B}(a + b) \geqq \min(\mathfrak{B}(a), \mathfrak{B}(b))$ $(a + b \neq 0)$[6]. Setzt man dann nämlich noch $\mathfrak{B}(a \cdot b^{-1}) = \mathfrak{B}(a) - \mathfrak{B}(b)$ für ein beliebiges Element $\alpha = a \cdot b^{-1}$ aus K, so entsteht eine Bewertung $\mathfrak{B}$ von K, deren Bewertungsring B offenbar A umfaßt. — Es soll aber dieser Gedankengang hier nicht weiter verfolgt werden. Denn die Bedeutung von Satz 4 wird durch die Bemerkung beeinträchtigt, daß kaum in allen primären Integritätsbereichen, die nur einen umfassenden Maximalring besitzen, die Potenzgrenzbedingung erfüllt sein dürfte.

[6]) Hier wären also gerade die Überlegungen nachzuholen, die bei dem Beweise des Hilfssatzes überflüssig waren [vgl. Fußnote [5])].

Lohnender erscheint vom Standpunkt unserer Note aus eine Untersuchung, ob nicht vielleicht bei Satz 3 die Bedingung, A solle vollständig ganz abgeschlossen sein, durch eine Forderung ersetzt werden kann, die sich in ihrer Form mehr an die Potenzgrenzbedingung anschließt. Zum Schluß noch zwei Bemerkungen zur Potenzgrenzbedingung selbst!

a) Offenbar kann man sich bei der Bedingung auf den Fall beschränken, daß $\mathfrak{c} = a \cdot A$ und $\mathfrak{c}' = b \cdot A$ Hauptideale sind. Dagegen würde es eine unnötige Verschärfung bedeuten, wenn man verlangen wollte, daß zu $\mathfrak{c} = a \cdot A$ und $\mathfrak{c}' = b \cdot A$ stets ein *Hauptideal* $\mathfrak{c}_1 = c \cdot A$ mit $d(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}_1) + d(\mathfrak{c}', \mathfrak{c}_1) < \varepsilon$ existiert.

b) Bei der Anwendung der Bedingung benutzten wir nur, daß es zu *festem* $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_0$ und beliebigem $\mathfrak{c}'$ ein $\mathfrak{c}_1$ der gewünschten Art gibt. Das bedeutet, daß wir tatsächlich nicht von der Potenzgrenzbedingung in ihrer vollen Schärfe Gebrauch gemacht haben. Denn aus der Existenz zweier Ideale $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_1'$ mit $d(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}_1) + d(\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1) < \varepsilon$, $d(\mathfrak{c}', \mathfrak{c}_1') + d(\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1') < \varepsilon$ kann man nicht rein formal auf die Existenz eines $\mathfrak{c}_1''$ mit $d(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}_1'') + d(\mathfrak{c}', \mathfrak{c}_1'') < \varepsilon$ schließen.

(Eingegangen am 5. August 1955)

RIBENBOIM, P.
Math. Annalen, Bd. 130, S. 399—404 (1956)

Un théorème sur les anneaux primaires et complètement intégralement clos

Par

P. RIBENBOIM *

Dans cette note, nous déterminons des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un anneau d'intégrité primaire et complètement intégralement clos soit un anneau de valuation. Nous résumons les différentes étapes qui ont conduit au présent article.

(i) En 1936, KRULL [1] a conjecturé que tout anneau d'intégrité primaire et complètement intégralement clos est un anneau de valuation.

(ii) En 1952, NAGATA [2] a construit un contre-exemple à cette conjecture de KRULL . . .

(iii) . . . mais sa «démonstration» originelle présentait des lacunes essentielles, que l'auteur vient d'éliminer dans une note récente [3].

(iv) Avec l'existence du contre-exemple, le problème de KRULL est devenu celui de chercher des conditions nécessaires et suffisantes supplémentaires pour qu'un anneau primaire et complètement intégralement clos soit un anneau de valuation.

(v) Dans une autre note [4], l'auteur à établi deux types de conditions nécessaires et suffisantes, par exemple, si l'anneau d'intégrité A est primaire et complètement intégralement clos, si son idéal premier $\mathfrak{p}$ est la réunion d'une suite strictement croissante d'idéaux principaux $A\,t_r$, qui puisse être «bien choisie», de façon qu'elle ait « largeur nulle» et détermine une topologie rendant continue la multiplication d'idéaux principaux — alors A est un anneau de valuation (et réciproquement).

(vi) Simultanément, KRULL [5] a découvert une autre condition qu'il nomme «Potenzgrenzbedingung», portant sur l'ensemble filtrant croissant des idéaux de type fini.

(vii) Enfin, dans la présente note, moyennant la notion de puissance à exposant réel dans un idéal principal (considérée par SAMUEL [6] dans un cas distinct), nous obtenons le théorème suivant: si A est un anneau d'intégrité primaire et complètement intégralement clos, dont l'idéal premier $\mathfrak{p}$ est la réunion d'une suite strictement croissante d'idéaux principaux $A\,t_r$, de façon que: (I) chaque idéal $A\,t_r$ soit puissance à exposant réel (strictement positif) de $A\,t_{r+1}$, (II) les idéaux $A\,t_r$ déterminent une topologie sur l'ensemble des idéaux principaux de A, rendant compatible l'opération de produit, alors A est un anneau de valuation (et réciproquement).

Nous considérons ce résultat comme une solution simple et assez élégante du problème de KRULL, d'autant plus que le contre-exemple de NAGATA

* Boursier du Conselho Nacional de Pesquizas, Rio de Janeiro, Brésil.

montre que la condition (I) n'est pas suffisante pour que A soit un anneau de valuation.

1. Nous commençons pour rappeler quelques définitions et résultats. Tous les anneaux considérés seront supposés des anneaux d'intégrité avec unité: parmi les idéaux premiers, on exclut l'idéal nul et l'anneau lui-même.

Si K est le corps des fractions de A, un élément $x \in K$ est *presque entier* sur A quand il existe $a \in K$, $a \neq 0$, tel que $a\,x^n \in A$, quelque soit n, entier positif. Si A contient tous les éléments de K, presque entiers sur A, alors on dit que A est complètement intégralement clos.

Un anneau A est primaire quand il possède un seul idéal premier $\mathfrak{p}$; le complémentaire de l'ensemble $\mathfrak{p}$ dans A est l'ensemble des unités de A, tout idéal non nul de A est primaire, associé à $\mathfrak{p}$, en particulier, donnés $a, b \in A$, non nuls, il existe un entier positif n tel que $a^n \in A\,b$.

Rappelons que tout anneau de valuation (de rang 1) est complètement intégralement clos; Krull a montré [1]:

(1) Tout anneau primaire et complètement intégralement clos est intersection d'anneaux de valuations.

2. Maintenant nous allons introduire la notion de puissance à exposant réel d'un idéal principal. Nous commençons par quelques considérations préliminaires.

Soit A un anneau primaire, $\mathfrak{p}$ son idéal premier, K son corps des fractions. Alors [4]:

(2) Si $t \in \mathfrak{p}$ alors $\bigcap\limits_{n \geqq 1} A\,t^n = (0)$ et $\bigcup\limits_{n \geqq 1} A\,t^{-n} = K$.

(3) Si B est un sous-anneau de K, contenant A et s'il existe un élément $t \in \mathfrak{p}$, $t \neq 0$, tel que $t^{-1} \in B$ alors $B = K$.

Soient donnés les éléments $a \in K$, $a \neq 0$, et $t \in \mathfrak{p}$, $t \neq 0$.

Considérons:

(i) l'ensemble des entiers m (positifs ou négatifs) tels que $A\,a \subsetneqq A\,t^m$; cet ensemble n'est pas vide et possède un plus grand élément, noté $m_t(a)$ (en vertu de la propriété (2) ci-dessus);

(ii) l'ensemble des entiers n (positifs ou négatifs) tels que $A\,t^n \subsetneqq A\,a$; cet ensemble n'est pas vide et possède un plus petit élément, noté $n_t(a)$ (en vertu de la propriété (2) ci-dessus).

On a:

(4) $m_t(a) \leqq n_t(a)$; si $a \in A$, $a \notin \mathfrak{p}$, alors $m_t(a) = n_t(a) = 0$; si $a \in \mathfrak{p}$ alors $0 \leqq m_t(a)$, $0 < n_t(a)$ et enfin $A\,a \subsetneqq A\,t$ équivaut à $0 < m_t(a)$.

Supposons désormais que A soit un anneau *intégralement clos*. Considérons les ensembles:

(iii) $E_t(a) = \left\{\dfrac{m}{n} \,\middle|\, A\,a^n \subsetneqq A\,t^m\right\}$; on a $m_t(a) \in E_t(a)$,

(iv) $F_t(a) = \left\{\dfrac{m}{n} \,\middle|\, A\,t^m \subsetneqq A\,a^n\right\}$; on a $n_t(a) \in F_t(a)$

(conventionnons que les fractions $\frac{m}{n}$ sont toujours telles que $n > 0$, le numérateur pouvant avoir signe quelconque).

On a les propriétés suivantes:

(5) Si $\frac{m}{n} \in E_t(a)$, $\frac{p}{q} < \frac{m}{n}$, alors $\frac{p}{q} \in E_t(a)$; si $\frac{m}{n} \in F_t(a)$, $\frac{p}{q} > \frac{m}{n}$, alors $\frac{p}{q} \in F_t(a)$; si $\frac{m}{n} \in E_t(a)$, $\frac{p}{q} \in F_t(a)$, alors $\frac{m}{n} \leqq \frac{p}{q}$.

Notons $\mu_t(a) = \sup E_t(a)$, $\nu_t(a) = \inf F_t(a)$, donc $m_t(a) \leqq \mu_t(a) \leqq \nu_t(a) \leqq \leqq n_t(a)$ et en général, on peut avoir $\mu_t(a) \neq \nu_t(a)$.

(6) Si $a \in A$, $a \notin \mathfrak{p}$, on a $\mu_t(a) = \nu_t(a) = 0$; si $a \in \mathfrak{p}$ alors $0 < \mu_t(a)$ $\left(\text{car si } q > 0 \text{ est un entier tel que } A\, a^q \subsetneqq A\, t \text{ alors } 0 < \frac{1}{q} \in E_t(a), \text{ donc } \frac{1}{q} \leqq \mu_t(a)\right)$.

(7) $m_t(a) \leqq \mu_t(a) < m_t(a) + 1$ et $n_t(a) - 1 < \nu_t(a) \leqq n_t(a)$.

En effet, si m' est la partie entière de $\mu_t(a)$, alors $m' \leqq \mu_t(a)$ donc $A\, a \subsetneqq A\, t^{m'}$, ainsi $m' \leqq m_t(a)$, et puisque $m_t(a) \leqq \mu_t(a)$ alors $m' = m_t(a)$. Idem pour $n_t(a)$.

Définition. Si $t \in \mathfrak{p}$, $t \neq 0$, $a \in K$, $a \neq 0$, s est un nombre réel (de signe quelconque) posons $A\, a = (A\, t)^s$ quand on a $\mu_t(a) = \nu_t(a) = s$. On dit que l'idéal $A\, a$ est la puissance s de l'idéal $A\, t$.

Voyons d'abord que ceci définit bien une opération univoque:

(8) Si s est un nombre réel, $t \in \mathfrak{p}$, $a, a' \in K$, des éléments non nuls, et si $\mu_t(a) = \nu_t(a) = s$, $\mu_t(a') = \nu_t(a') = s$, alors $A\, a = A\, a'$.

En effet, soit $\Omega = (w)$ une famille de valuations de K telles que $A = \bigcap_{w \in \Omega} A_w$ (car A est intégralement clos). Si $\frac{m}{n} \in E_t(a)$, $\frac{p}{n} \in F_t(a)$ (où $n > 0$) alors $A\, t^p \subsetneqq A\, a^n \subsetneqq A\, t^m$, donc $\frac{p}{n} \cdot w(t) \geqq w(a) \geqq \frac{m}{n} \cdot w(t)$; cela entraîne $\nu_t(a) \cdot w(t) \geqq \geqq w(a) \geqq \mu_t(a) \cdot w(t)$, donc $w(a) = s \cdot w(t)$ quelle que soit $w \in \Omega$. De même, $w(a') = s \cdot w(t)$, donc $w(a) = w(a')$ quelle que soit $w \in \Omega$ et alors $A\, a = A\, a'$ [7].

Remarquons que cette opération de potentiation à exposant réel n'est pas nécessairement partout définie. Néanmoins, les propriétés usuelles de la potentiation sont vérifiées, dès que les expressions écrites aient un sens. Ainsi, par exemple:

(9) Si $0 < s_1 \leqq s_2$, si $a \in \mathfrak{p}$, $a \neq 0$, si $(A\, a)^{s_1}$, $(A\, a)^{s_2}$ existent, alors $(Aa)^{s_1} \supseteqq \supseteqq (A\, a)^{s_2}$; si $0 < s_1$, $0 < s_2$, si $a \in \mathfrak{p}$, $a \neq 0$, si $(A\, a)^{s_1}$, $(A\, a)^{s_1 s_2}$ existent, alors $((A\, a)^{s_1})^{s_2}$ existe et on a $((A\, a)^{s_1})^{s_2} = (A\, a)^{s_1 s_2}$; etc.

Nous ommettons les vérifications de ces propriétés.

3. *Théorème.* Soit A un anneau primaire et complètement intégralement clos. Supposons qu'il existe une suite strictement croissante d'idéaux principaux $A\, t_r$ tels que $\mathfrak{p} = \bigcup_{r \geqq 1} A\, t_r$ et satisfaisant aux conditions suivantes:

(I) pour tout $r > 1$ il existe un nombre réel strictement positif $s(r)$ tel que $A\, t_{r-1} = A\, t_r^{s(r)}$;

(II) si $a, b \in A$, $a, b \notin A\, t_{r-1}$, alors $a\, b \notin A\, t_r$, pour tout $r \geqq 1$.

Alors A est un anneau de valuation.

Démonstration.

Nous diviserons la démonstration en plusieurs parties.

(a) Pour écarter un cas trivial, on peut supposer que $\lim_{r\to\infty} S(r) = \infty$, où on pose $S(1) = 1$, $S(r) = S(r-1) \cdot s(r)$.

En effet, s'il existe un nombre entier S tel que $S \geqq S(r)$ quelque soit r, alors $(A\,t_r)^S \subseteq (A\,t_r)^{S(r)} = At_1$ (en vertu de (9)) pour tout $r \geqq 1$, donc $\mathfrak{p}^S \subseteq At_1$. Or, alors il résulte que $\mathfrak{p}$ est un idéal principal [5] et le théorème est trivial.

(b) Pour tout $a \in \mathfrak{p}$, $a \neq 0$, et $r \geqq 1$, on a

$$\frac{\mu_r(a)}{S(r)} \leqq \frac{\mu_{r+1}(a)}{S(r+1)} \leqq \frac{\nu_{r+1}(a)}{S(r+1)} \leqq \frac{\nu_r(a)}{S(r)}.$$

Il faut vérifier que $\mu_r(a) \cdot s(r+1) \leqq \mu_{r+1}(a)$, $\nu_{r+1}(a) \leqq \nu_r(a) \cdot s(r+1)$. On a $0 < \mu_r(a)$, par (6); soit $\frac{m}{n}$ tel que $0 < \frac{m}{n} \leqq \mu_r(a)$ et $0 < \frac{p}{q} < s(r+1)$ alors $A\,a^n \subseteq At_r^m$, $At_r^q \subseteq At_{r+1}^p$, donc on a $A\,a^{qn} \subseteq At_r^{qm} \subseteq At_{r+1}^{pm}$ d'où $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} \leqq \mu_{r+1}(a)$ et alors $\mu_r(a) \cdot s(r+1) \leqq \mu_{r+1}(a)$. L'autre inégalité se démontre analoguement.

(c) Pour tout $a \in \mathfrak{p}$, $a \neq 0$, il existe $\lim_{r\to\infty} \frac{\mu_r(a)}{S(r)}$ et cette limite est finie.

Posons: $w(a) = \lim_{r\to\infty} \frac{\mu_r(a)}{S(r)}$, quand $a \in \mathfrak{p}$, $a \neq 0$; $w(a) = 0$ quand $a \in A$, $a \notin \mathfrak{p}$; $w(0) = \infty$. Alors, si $a \in A$, $w(a) > 0$ équivaut à $a \in \mathfrak{p}$.

Car si $a \in \mathfrak{p}$, $a \neq 0$, alors il existe $r \geqq 1$ tel que $a \in A\,t_r$, c'est-à-dire $1 \leqq \mu_r(a)$ et d'après (b), on a $w(a) = \lim_{r\to\infty} \frac{\mu_r(a)}{S(r)} > 0$.

(d) Si $a, b \in A$ alors $w(a+b) \geqq \inf\{w(a), w(b)\}$.

Il suffit de démontrer l'inégalité quand $a, b \in \mathfrak{p}$, non nuls, sinon la formule est triviale. Soit, par exemple, $w(a+b) < w(a) \leqq w(b)$. D'après (b), (c), il existe r assez grand pour que $\mu_r(a+b) < \mu_r(a) \leqq \mu_r(b)$ et $\mu_r(a) - \mu_r(a+b) > 1$. Puisque $m_r(a)$ est la partie entière de $\mu_r(a)$, d'après (7), alors il résulte que $m_r(a) > m_r(a+b)$.

Or, pour tout entier q on a $m_r(a) - \frac{1}{q} = \frac{m_r(a)\cdot q - 1}{q} < \mu_r(a) \leqq \mu_r(b)$, donc $A\,a^q \subseteq At_r^{q\cdot m_r(a)-1}$, $A\,b^q \subseteq At_r^{q\cdot m_r(a)-1}$. Si n est un entier arbitraire, on a $A \cdot (a+b)^n = A \cdot \left(\sum_{q=0}^{n} \binom{n}{q} a^q b^{n-q}\right) \subseteq \sum_{q=0}^{n} A\,a^q \cdot A\,b^{n-q} \subseteq \sum_{q=0}^{n} At_r^{q\cdot m_r(a)-1} \times$ $\times\, At_r^{(n-q)\cdot m_r(a)-1} = At_r^{n\cdot m_r(a)-2}$; ainsi, $\frac{n\cdot m_r(a)-2}{n} = m_r(a) - \frac{2}{n} \leqq \mu_r(a+b)$. Cela étant vrai pour tout n, on déduit que $m_r(a) \leqq \mu_r(a+b)$ et, en vertu de (7), $m_r(a) \leqq m_r(a+b)$; absurde!

(e) Si $x \in K$, $b \in A$, sont des éléments non nuls tels que $x\,b \in A$, alors il existe la limite $\lim_{r\to\infty} \frac{\mu_r(x)}{S(r)}$ et on a $w(x\,b) = \lim_{r\to\infty} \frac{\mu_r(x)}{S(r)} + w(b)$. En particulier, si $a, b \in A$ alors $w(a\,b) = w(a) + w(b)$.

D'abord, $\mu_r(x) + \mu_r(b) \leqq \mu_r(x\,b)$. En effet, si $\frac{m}{n} \leqq \mu_r(x)$, $\frac{p}{q} \leqq \mu_r(b)$ (où $n > 0, q > 0$) alors $A\,x^n \subseteq At_r^m$, $A\,b^q \subseteq At_r^p$, donc $A\,x^{nq} \subseteq At_r^{mq}$, $A\,b^{nq} \subseteq At_r^{np}$,

et enfin $A(xb)^{nq} \subseteq A t_r^{mq+np}$; cela veut dire que $\frac{mq+np}{nq} = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} \leq \mu_r(xb)$, c'est-à-dire, $\mu_r(x) + \mu_r(b) \leq \mu_r(x\,b)$.

D'autre part, $A\,x \subseteq A t_r^{m_r(x)}$ et si $u_r = t_r^{-1}$ alors $x u_r^{m_r(x)} \in A$, $x u_r^{m_r(x)} \notin A\,t_r$. De même, $b u_r^{m_r(b)} \in A$, $b u_r^{m_r(b)} \notin A\,t_r$. En vertu de (II), il résulte que $x b\, u_r^{m_r(x)+m_r(b)} \notin A\,t_{n-1}$. Si $\frac{h}{k} > s(r) = \mu_r(t_{r-1}) = \nu_r(t_{r-1})$ alors $A t_r^h \subseteq A t_{r-1}^k$ et si c'était $x^k b^k u_r^{k[m_r(x)+m_r(b)]} \subseteq A t_r^h \subseteq A t_{r-1}^k$ il serait $x\,b\,u_r^{m_r(x)+m_r(b)} \in A\,t_{r-1}$ (car A est intégralement clos), absurde! Donc, $x^k b^k u_r^{k\cdot m_r(x)+m_r(b)]} \notin A t_r^h$, alors $(x\,b)^k \notin A t_r^{h+k[m_r(x)+m_r(b)]}$ et enfin $\mu_r(x\,b) < \frac{h+k[m_r(x)+m_r(b)]}{k}$ $= \frac{h}{k} + m_r(x) + m_r(b)$; ceci étant vrai quelque soit $\frac{h}{k} > s(r)$ alors on a

$$\mu_r(x) + \mu_r(b) \leq \mu_r(x\,b) \leq s(r) + m_r(x) + m_r(b) \leq s(r) + \mu_r(x) + \mu_r(b).$$

En divisant ces inégalités par $S(r)$, et puisque $\lim_{r\to\infty} \frac{s(r)}{S(r)} = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{S(r-1)} = 0$ on déduit par passage à la limite, l'existence de $\lim_{r\to\infty} \frac{\mu_r(x)}{S(r)}$ et l'égalité $\lim_{r\to\infty} \frac{\mu_r(x)}{S(r)} + w(b) = w(x\,b)$.

(f) Si on pose, pour tout $x = \frac{a}{b} \in K$ (avec $a, b \in A$, $b \neq 0$), $w(x) = w(a) - - w(b)$, alors cette fonction w ainsi prolongée à K, définit une valuation de K, dont l'anneau A_w contient A. On a $w\left(\frac{a}{b}\right) = \lim_{r\to\infty} \frac{\mu_r\left(\frac{a}{b}\right)}{S(r)}$. Enfin, l'idéal de la valuation w est égal à $\mathfrak{p}$.

Il suffit de montrer que si $x \in A_w$, $x \notin A$, alors $w(x) = 0$. De $x \notin A$ on a $\mu_r(x) \leq 0$ quelque soit $r \geq 1$; sinon il existe r tel que $0 < \mu_r(x)$ et si n est un entier tel que $0 < \frac{1}{n} < \mu_r(x)$ alors $A\,x^n \subseteq A t^r \subseteq A$ et puisque A est intégralement clos, alors $x \in A$, absurde!

Donc, $w(x) = \lim_{r\to\infty} \frac{\mu_r(x)}{S(r)} \leq 0$ et de $x \in A_w$, il vient $w(x) = 0$.

(g) $A_w = A$.

En effet, supposons que $x \in A_w$, $x \notin A$. Alors, en vertu de (1), il existe $w' \in \Omega$ tel que $x \notin A_{w'}$, donc $A_{w'} \neq A_w$ et ces anneaux étant maximaux, car A est complètement intégralement clos, il existe $y \in A_{w'}$, $y \notin A_w$, c'est-à-dire $w(y) < 0$, donc $w(y^{-1}) > 0$ et alors $y^{-1} \in \mathfrak{p}$; or, d'après (3), on conclut que $A_{w'} = K$, absurde! c. q. f. d.

Corollaire. Soit A un anneau primaire et *intégralement clos*. Supposons qu'il existe une suite croissante d'idéaux principaux $A t_r$ tels que $\mathfrak{p} = \bigcup_{r\geq 1} A t_r$, satisfaisant les conditions (I) et (II). Alors, il existe un anneau de valuation de rang 1 contenant tout anneau de valuation (de rang arbitraire) qui contient A.

En effet, remarquons que dans la démonstration du théorème l'hypothèse que A soit complètement intégralement clos n'a intervenu qu'à la partie (g),

et partout ailleurs on a employé seulement l'hypothèse moins forte que A soit intégralement clos.

Soit donc w la valuation (de rang 1) définie aux parties (a)—(f), ayant idéal égal à $\mathfrak{p}$. Si $A \subsetneq A_{w'} \subsetneq A_w$, où w' est de rang arbitraire, soit $y \in A_{w'}$, $y \notin A_w$, donc $w(y) < 0$, $w(y^{-1}) > 0$ et alors $y^{-1} \in \mathfrak{p}$; d'après (3) il résulte que $A_{w'} = K$, absurde!

4. Nous concluons avec quelques courtes remarques.

Comme montre l'exemple de Nagata, la condition (I) n'est pas suffisante pour que l'anneau A soit un anneau de valuation.

La condition (II) admet une interprétation topologique très simple, qui permet de l'envisager comme une condition très naturelle; ainsi, si on note $V_r = C_A\, A\, t_r$, pour tout $r \geqq 1$, alors la famille d'ensembles $\{a\, V_r \mid a \in A, a \neq 0\}$ est un système fondamental de voisinages pour une topologie sur l'ensemble des éléments non nuls de A, et par passage au quotient modulo l'ensemble des unités, on obtient une topologie séparée sur le monoïde multiplicatif des idéaux principaux entiers non nuls de A, rendant continue l'opération de produit.

Bibliographie

[1] Krull, W.: Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche. II. Math. Z. **41**, 665—679 (1936). — [2] Nagata, M: On Krull's Conjecture concerning Valuation Rings. Nagoya Math. J. **4**, 29—33 (1952). — [3] Ribenboim, P.: Sur une Note de Nagata relative à un Problème de Krull. Math. Z. **64**, 159—168 (1956) — [4] Ribenboim, P.: Sur une Conjecture de Krull en Théorie des Valuations. Nagoya Math. J. (à paraître). — [5] Krull, W.: Eine Bemerkung über primäre Integritätsbereiche. Math. Annalen **130**, 394 (1956). — [6] Samuel: Some Asymptotic Properties of Powers of Ideals. Ann. of Math. **56**, 11—21 (1952). — [7] Krull, W.: Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche I. Math. Z. **41**, 545—577 (1936).

(Eingegangen am 5. August 1955)

ROBINSON, A.
Math. Annalen, Bd. 130, S. 405—409 (1956)

Further Remarks on Ordered Fields and Definite Functions

By

ABRAHAM ROBINSON in Toronto

1. *Introduction.* The present paper contains two distinct contributions to the subject matter of refs. [1] and [2]. We shall suppose that the reader is familiar with these papers and shall make use of the terminology of ref. [2].

In section 2, we reconsider the arguments which lead to ARTIN's results on totally positive quantities (ref. [1]) and to the generalisation of these results which is formulated as Theorem 3.8 in ref. [2]. In both ref. [1] and ref. [2], the respective proofs depend in a essential manner on certain extensions of the field under consideration, more particularly on the adjunction of square roots. The alternative proof given here does not involve any field extensions but is based on the introduction of a certain kind of semi-module.

The contents of section 3 may be illustrated by the following result, which is a special case of 3.1 below.

Let V be an irreducible algebraic variety in the space S_n with coordinates in the field of real numbers, M, and let $\mathfrak{J}$ be the prime ideal of $M[x_1, \ldots, x_n]$ which belongs to V. Let $f(x_1, \ldots, x_n)$ be a polynomial with real coefficients such that

$$f(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$$

everywhere on V. Then there exist polynomials with real coefficients, $g_0(x_1, \ldots x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n)$, $k \geq 1$ such that

$$(h_0(x_1, \ldots, x_n))^2 f(x_1, \ldots, x_n) \equiv (h_1(x_1, \ldots, x_n))^2 + \cdots + (h_k(x_1 \ldots, x_n))^2 \ (\mathfrak{J})$$

while

$$h_0(x_1, \ldots, x_n) \not\equiv 0 \quad (\mathfrak{J}) .$$

2. *Pseudo-ideals.* Let M be a formally real commutative field. A set $\mathfrak{J}$ of elements of M will be said to be *a pseudo-ideal* if it satisfies the following conditions.

2.1 $\mathfrak{J}$ is a semi-module. That is to say, for any $a \in \mathfrak{J}$, $b \in \mathfrak{J}$, $a + b$ and ab also belong to $\mathfrak{J}$.

2.2. The square of every element of M, other than 0, belongs to $\mathfrak{J}$.

2.3. 0 does not belong to $\mathfrak{J}$.

We note that the set of pseudo-ideals in M is not empty. For example, the set of all finite sums

$$b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_k^2, \quad k \geq 1; \quad b_j \neq 0, \quad j = 1, \ldots, k$$

is a pseudo-ideal. More generally, if M is formally real with respect to a

given core C (ref. 2, section 3) then the set of all finite sums

$$a_1 b_1^2 + a_2 b_2^2 + \cdots + a_k b_k^2, \quad k \geqq 1; \quad b_j \neq 0, \quad a_j \in C, \quad j = 1, \ldots, k$$

is a pseudo-ideal.

2.4. *Theorem.* Let $\mathfrak{J}$ be a pseudo-ideal in M and let $a \neq 0$ be an element of M such that $-a$ does not belong to $\mathfrak{J}$. Then there exists a pseudo-ideal $\mathfrak{J}'$ which contains the element a such that $\mathfrak{J}' \supseteq \mathfrak{J}$.

Proof. Supposing that $\mathfrak{J}$ and a satisfy the conditions of the theorem, let $\mathfrak{J}'$ be the set of finite sums.

2.5. $a_1 a^{j_1}, + a_2 a^{j_2} + \cdots + a_k a^{j_k}$, $k \geqq 1$; $a_m \in \mathfrak{J}$, j_m a nonnegative integer, $m = 1, \ldots, k$.

Then it is not difficult to see that $\mathfrak{J}'$ is a semi-module (see 2.1.). Moreover $\mathfrak{J}' \supseteq \mathfrak{J}$ and so $\mathfrak{J}'$ satisfies also 2.2.

Suppose now that 0 is contained in $\mathfrak{J}'$. Then there exists an identity

2. 6. $$a_1 a^{j_1} + a_2 a^{j_2} + \cdots + a_k a^{j_k} = 0$$

where the left hand side satisfies the conditions of 2.5.

We may number the indices of a in 2.6. in such a way that j_m is even for $m = 1, \ldots, l$ and odd for $m = l+1, \ldots, k$. There must be both even and odd j_m, for if the powers of a on the left hand side of 2.6. were all even then this expression would belong to $\mathfrak{J}$ (which is impossible since $0 \notin \mathfrak{J}$); while if the j_m were all odd, then

$$-(a_1 a^{j_1} + \cdots + a_k a^{j_k}) = (-a)(a_1 a^{j_1 - 1} + \cdots + a_k a^{j_k - 1}) = 0$$

would entail

2.7. $$a_1 a^{j_1 - 1} + \cdots + a_k a^{j_k - 1} = 0$$

and this is again impossible since the left hand side of 2.7 would then belong to $\mathfrak{J}$.

Put

$$b = a_1 a^{j_1} + \cdots + a_l a^{j_l} \qquad c = a_{l+1} a^{j_{l+1} - 1} + \cdots + a_k a^{j_k - 1}$$

Then $b \in \mathfrak{J}$ and so $b \neq 0$. Hence, from 2.6

$$b + ac = 0$$

and furthermore

2.8. $$-a = \frac{c}{b} = \frac{cb}{b^2} = a_{l+1} \left(\frac{a^{p_{l+1}}}{b} \right)^2 + \cdots + a_k \left(\frac{a^{p_k}}{b} \right)^2$$

where

$$p_m = \tfrac{1}{2}(j_m - 1), \quad m = l+1, \ldots, k.$$

We observe that the p_m are all integers. Accordingly, the representation of $-a$ by the right hand side of 2.8 shows that $-a$ belongs to $\mathfrak{J}$. But this is contrary to assumption, and so an identity 2.6 cannot exist, $\mathfrak{J}'$ satisfies 2.1 — 2.3 and is a pseudo-ideal. This proves 2.4.

A pseudo-ideal $\mathfrak{J}$ in M is said to be *maximal* if there does not exist any pseudo-ideal in M which includes $\mathfrak{J}$ as a proper subset.

2.9. *Theorem.* In order that a pseudo-ideal $\mathfrak{J}$ in M be maximal it is necessary and sufficient that for every element $a \neq 0$ of M either $a \in \mathfrak{J}$ or $-a \in \mathfrak{J}$.

Proof. Suppose that for some element $a \neq 0$ of M, the pseudo-ideal $\mathfrak{J}$ includes neither a nor $-a$. Then by 2.4 there exists a pseudo-ideal $\mathfrak{J}' \geq \mathfrak{J}$ which includes a, and $\mathfrak{J}' \neq \mathfrak{J}$ since $\mathfrak{J}$ does not include a. Thus $\mathfrak{J}$ cannot be maximal, the condition of the theorem is necessary.

Now suppose that $\mathfrak{J}$ satisfies the condition of the theorem, but that there exists another pseudo-ideal $\mathfrak{J}'$ which includes $\mathfrak{J}$ as a proper subset. Select any $b \in \mathfrak{J}' - \mathfrak{J}$. Then b is not included in $\mathfrak{J}$ and so $-b$ must belong to $\mathfrak{J}$, and hence to $\mathfrak{J}'$. But if so, then $b + (-b) = 0$ would also belong to $\mathfrak{J}'$, which is impossible. This proves that the condition of 2.9 is also sufficient.

It is not difficult to verify that the union of a monotonic set of pseudo-ideals is again a pseudo-ideal. Accordingly, by ZORN's lemma, every pseudo-ideal is included in a maximal pseudo-ideal. More precisely, we may state the following theorem.

2.10. *Theorem.* Let $\mathfrak{J}$ be a pseudo-ideal in the field M and let $a \neq 0$ be an element of M which does not belong to $\mathfrak{J}$. Then there exists a maximal pseudo-ideal which includes $\mathfrak{J}$ and $-a$ (and hence, does not include a).

Indeed, by 2.4, $\mathfrak{J}$ is contained in a pseudo-ideal $\mathfrak{J}'$ which includes $-a$, and $\mathfrak{J}'$ in turn is included in a maximal pseudo-ideal.

An interesting immediate consequence of 2.10, which however will not be used in the sequel is

2.11. *Theorem.* Every pseudo-ideal is the intersection of all the maximal pseudo-ideals in which it is contained.

Now suppose that M is an ordered field, and let $\mathfrak{J}$ be the set of positive elements in M. Then conditions 2.1, 2.2, 2.3 as well as the condition of Theorem 2.9 are all satisfied, and so $\mathfrak{J}$ is a maximal pseudo-ideal. Conversely, if $\mathfrak{J}$ is a maximal pseudo-ideal in the field M, then an ordering of M is defined by putting $a > 0$ for all $a \in \mathfrak{J}$.

2.12. *Theorem.* (Theorem 3.8 of ref. [2]). Let M be a formally real field with core C. Then every element a of M which is totally positive with respect to C can be represented in the form

2.13. $$a = a_1 b_1^2 + \cdots + a_n b_n^2, \quad a_j \in C, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Proof. The set of all elements which are given by the right hand side of 2.13 with $b_j \neq 0, j = 1, \ldots, n$, constitutes a pseudo-ideal $\mathfrak{J}$. If a is not contained in $\mathfrak{J}$ there exists a maximal pseudo-ideal $\mathfrak{J}'$ which includes $\mathfrak{J}$ and $-a$. Thus, there exists an ordering of M for which the elements of C are positive, as well as $-a$. It follows that a is not totally positive with respect to C. This proves the theorem.

3. *Definite functions on algebraic varieties.*

3.1. *Theorem.* Let M be a real-closed ordered field and let S_n be the n-dimensional cartesian space with coordinates in M. Let V be any non-empty irreducible algebraic variety in S_n and let $\mathfrak{J}$ be the prime ideal which belongs to V in the ring of polynomials $M[x_1, \ldots, x_n]$. Furthermore, let

3.2. $$f(x_1, \ldots, x_n), g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n), m \geq 1$$

be a set of polynomials in $M[x_1, \ldots, x_n]$, but outside $\mathfrak{J}$, such that for every

point $(x_1, \ldots, x_n)$ which belongs to V, the system of inequalities

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) > 0 \qquad i = 1, \ldots, m$$

entails

$$f(x_1, \ldots, x_n) \geqq 0 .$$

Then there exists a congruence

3.3. $$(h_0(x_1, \ldots, x_n))^2 f(x_1, \ldots, x_n)$$
$$\equiv \sum_{i=1}^{k} (g_1(x_1, \ldots, x_n))^{\lambda_1^i} \ldots (g_m(x_1, \ldots, x_n))^{\lambda_m^i} (h_i(x_1, \ldots, x_n))^2 \ (\mathfrak{J})$$

where the λ_j^i stand for either 0 or 1 and where $h_0(x_1, \ldots, x_n) \ldots, h_k(x_1, \ldots, x_n)$ are polynomials with coefficients in M such that

$$h_0(x_1, \ldots, x_n) \not\equiv 0 \qquad (\mathfrak{J}).$$

Proof. Select a basis

$$p_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, p_r(x_1, \ldots, x_n)$$

for the ideal $\mathfrak{J}$. Suppose that the polynomials 3.2 satisfy the conditions of the theorem but that there does not exist any congruence of the type indicated by 3.3. Let M_1 be the residue ring $M[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{J}$. It will not cause any confusion if we denote the elements of M_1 which, when regarded as classes, contain the polynomials of 3.2, by $f, g_1, \ldots, g_m$ respectively. Then our assumption is that no identity

3.4. $$h_0^2 f = \sum_{i=1}^{k} g_1^{\lambda_1^i} \ldots g^{\lambda_m^i} h_2^i. \qquad \lambda_j^i = 0 \text{ or } 1$$

exists in M_1 with $h_0 \neq 0$. It follows that no identity of the type

3.5. $$f = \sum_{i=1}^{k} g_1^{\lambda_1^i} \ldots g_m^{\lambda_m^i} h_i^2. \qquad \lambda_j^i = 0 \text{ or } 1$$

can exist in the quotient field M_2 of M_1.

We observe that M_2 is an extension of M and, hence, is of characteristic 0. Let C be the set of products of powers

$$a g_1^{\lambda_1} \ldots g_m^{\lambda_m} \qquad \lambda = 0, 1, 2, \ldots ; \quad a > 0 \text{ in } M$$

regarded as elements of M_2. Since none of the polynomials $h_j(x_1, \ldots, x_n)$ belong to $\mathfrak{J}$, C satisfies the conditions of a core in M_2 (see ref. [2], 3.1). If M_2 is not formally real with respect to C, we may conclude from Theorem 3.10 of ref. [2] that there exists an identity

3.6. $$f = \sum_{i=1}^{k} a_i g_1^{\lambda_1^i} \ldots g_m^{\lambda_m^i} h_i^2, \ \lambda_j^i = 0, 1, 2, \ldots ; \ a_i > 0 \text{ in M}.$$

By absorbing the $a_i = (\sqrt{a_i})^2$ and the even powers of the g_i in h_i^2, we may reduce 3.6 to the form 3.5, thus proving the theorem. Again, if M_2 is formally real with respect to C, and an identity 3.6 exists then we may still complete the proof by reducing 3.6 to 3.5. Suppose then that M_2 is formally real with respect to C but that there does not exist an identity 3.6. It then follows from theorem 2.12 above that we can find an ordering of M_2 for which all

elements of C are positive, but f is negative. Now let $\xi_1, \ldots, \xi_n$ be the elements of M_2 which correspond to the indeterminates $x_1, \ldots, x_n$ of $M[x_1, \ldots, x_n]$. Then f and $g_1, \ldots, g_m$ are precisely the values taken by the *functions*

$$f(x_1, \ldots, x_n), \quad g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)$$

for the argument values

$$x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2, \ldots x_n = \xi_n.$$

Thus, in this case, the following statement holds in M_2.

3.7. There exist elements $x_1, \ldots, x_n$ such that

$$p_i(x_1, \ldots, x_n) = 0, i = 1, \ldots, r, \text{ and } g_i(x_1, \ldots, x_n) > 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

while at the same time

$$f(x_1, \ldots, x_n) < 0 .$$

We observe that the specified ordering of M_2 is a continuation of the ordering of M since C includes all the positive elements of M. Furthermore, we observe that 3.7 still holds in the real closure M_3 of M_2, whose order is again a continuation of the order of M.

Now let $\mathfrak{Z}^*$ be a set of axioms for the concept of a real closed ordered field, as in section 5 of ref. [2], and let N be the diagram of M. Then both M and M_3 are models of $\mathfrak{Z}^* \cup N$. Also let X be a formal statement in the lower predicate calculus which expresses 3.7 in terms of the relations of equality, addition, multiplication, and order and in terms of some of the individual constants (elements) of M. Then X holds in M_3 while $\sim X$ holds in M. But $\mathfrak{Z}^* \cup N$ is model-complete, and so either X is deducible from $\mathfrak{Z}^* \cup N$ or $\sim X$ is deducible from $\mathfrak{Z}^* \cup N$. This implies that either X holds in both M and M_3 or $\sim X$ holds in both M and M_3. Neither of these alternatives applies, and so the assumption that 3.1 is false leads to a contradiction in all cases.

The result mentioned in the introduction is obtained from 3.1 for $m = 1$, $g_1(x_1, \ldots, x_n) \equiv 1$.

3.8. *Corollary.* 3.1. still applies (trivially so) if $f(x_1, \ldots, x_n)$ is contained in $\mathfrak{Z}$. On the other hand, the assumption that the polynomials $g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots$ $g_m(x_1, \ldots, x_n)$ do not belong to $\mathfrak{Z}$ is essential.

3.9. *Corollary.* Suppose that the conditions of theorem 3.1 are satisfied. Then, for given polynomials $g_1, \ldots, g_m$ and for a given bound on the degree of f, there exist uniform bounds on the number k and on the degrees of the polynomials $h_0, h_1, \ldots, h_k$.

The proof of 3.9 is along the lines of the proof of theorem 5.9 of ref. [2] and need not be given in detail.

List of References

[1] E. Artin: Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate. Abhdl. math. Sem. Hamburg. Univ. 5, 100—115 (1927). — [2] A. Robinson: On ordered fields and definite functions. Math. Ann. 130, 257—271 (1955).

(Eingegangen am 22. August 1955)

REMMERT, R.
Math. Annalen, Bd. 130, S. 410—441 (1956)

Projektionen analytischer Mengen

Von

REINHOLD REMMERT in Münster (Westf.)

Einleitung

1. Ein wichtiges Hilfsmittel der algebraischen Geometrie ist die Eliminationstheorie. Das Kardinalproblem dieser Theorie kann im wesentlichen wie folgt formuliert werden:

Vorgegeben sind endlich viele Polynome $P_\varrho(x_1, \ldots, x_n)$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$ in $n \geqq 2$ Unbestimmten über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Man bestimme endlich viele Polynome $Q_\sigma(x_1, \ldots, x_{n-1})$ $(\sigma = 1, \ldots, s)$ in $(n-1)$ Unbestimmten über k, derart, daß gilt (Eliminationsbedingung):

Ein $(n-1)$-Tupel $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ mit $a_\nu \in k$ ist genau dann ein Lösungstupel des Gleichungssystems $Q_1 = \cdots = Q_s = 0$, wenn es ein $a_n \in k$ gibt, so daß das n-Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ ein Lösungstupel des Gleichungssystems $P_1 = \cdots = P_r = 0$ ist.

Der grundlegende Satz der Eliminationstheorie lautet:

Zu beliebig vorgegebenen Polynomen $P_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, P_r(x_1, \ldots, x_n)$ $(n \geqq 2)$ gibt es nach Einführung neuer Koordinaten $y_1, \ldots, y_n$ durch eine lineare Transformation der Gestalt $x_1 = y_1 + c_1 y_n, \ldots, x_{n-1} = y_{n-1} + c_{n-1} y_n, x_n = c_n y_n$ $(c_n \neq 0)$ mit geeignet gewählten $c_1, \ldots, c_n$ stets endlich viele Polynome $Q_1(y_1, \ldots, y_{n-1}), \ldots, Q_s(y_1, \ldots, y_{n-1})$, derart, daß die Eliminationsbedingung erfüllt ist, wenn man die P_ϱ als Polynome in den $y_1, \ldots, y_n$ schreibt. Als Tupel $(c_1, \ldots, c_n)$ kann jedes Tupel gewählt werden, welches nicht Nullstelle eines gewissen homogenen, nicht identisch verschwindenden Polynoms in n Unbestimmten über k ist.

Für den Fall, daß an die Polynome P_ϱ Homogenitätsforderungen gestellt werden, kann man folgende Aussage machen:

Sind die Polynome $P_1, \ldots, P_r$ sämtlich jeweils homogen in den Unbestimmten $x_1, \ldots, x_m$ und $x_{m+1}, \ldots, x_n$ $(m \geqq 2,\ n-m \geqq 2)$, so kann man endlich viele Polynome $Q_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, Q_s(x_1, \ldots, x_m)$ finden, die sämtlich in den $x_1, \ldots, x_m$ homogen sind, derart, daß ein m-Tupel $(a_1, \ldots, a_m) \neq (0, \ldots, 0)$ genau dann das Gleichungssystem $Q_1 = \cdots = Q_s = 0$ löst, wenn es Elemente $a_{m+1}, \ldots, a_n \in k$ gibt, die nicht sämtlich Null sind, so daß das n-Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ das Gleichungssystem $P_1 = \cdots = P_r = 0$ löst. Eine lineare Koordinatentransformation braucht in diesem Falle nicht mehr durchgeführt zu werden.

2. Es sei im folgenden k der Körper C der komplexen Zahlen. Dann läßt sich, wie es in der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen — vornehmlich in der letzten Zeit — geschehen ist, der Begriff der *algebraischen Menge*, d. i. die gemeinsame Nullstellenmenge von endlich vielen Polynomen über C, verallgemeinern zum Begriff der *analytischen Menge*. Darunter versteht man eine

abgeschlossene Menge in einem *komplexen Raum*, die im Kleinen als gemeinsame Nullstellenmenge von holomorphen Funktionen darstellbar ist. Dabei bedarf allerdings noch der Begriff des komplexen Raumes einer Präzisierung. Es sind verschiedene Definitionen bekannt; wir folgen in unseren Überlegungen einem Vorschlag von SERRE.

Sieht man die Theorie der analytischen Mengen in allgemeinen komplexen Räumen als eine mögliche Verallgemeinerung einer speziellen algebraischen Geometrie, nämlich der Theorie der analytischen Mengen in mehrfach-projektiven Räumen über dem Körper C an, so steht zu erwarten, daß eine sinngemäße Übertragung der Eliminationstheorie auf die Funktionentheorie von mehreren Veränderlichen das Studium der analytischen Mengen in mancherlei Hinsicht erleichtern wird. Vor allem darf man dies für analytische Mengen in kompakten komplexen Räumen vermuten, da die aus der Funktionentheorie einer Veränderlichen bekannte starke Bindung, die zwischen den Begriffen „kompakt" und „algebraisch" besteht, auch bei mehreren Veränderlichen vorhanden ist, wie z. B. ein Satz von CHOW lehrt, der aussagt, daß analytische Mengen in (kompakten) mehrfach-projektiven komplexen Räumen algebraische Mengen sind.

3. Der Versuch einer direkten Übertragung der Eliminationstheorie, indem man die Polynome durch meromorphe Funktionen ersetzt, ist aber aus einem unmittelbar ersichtlichen Grunde nicht möglich: die Existenzgebiete von meromorphen Funktionen sind nämlich im allgemeinen komplexe Räume, in denen keine globalen Koordinaten existieren (in gewissen Punkten des Raumes sind nicht einmal lokale Koordinaten im strengen Sinne vorhanden); daher kann man zunächst überhaupt keine Veränderlichen eliminieren[1]). Man sieht aber sofort, wie das Problem anzugreifen ist, wenn man dem Hauptsatz der Eliminationstheorie eine andere Fassung gibt. Zu dem Zwecke führen wir den Begriff der Projektion ein: es seien X, Y irgend zwei Mengen, es sei A eine Teilmenge des Produktes $X \times Y$. Die Abbildung, die dem Punkt $(x, y) \in A$ den Punkt $x \in X$ zuordnet, heißt die Projektion von A in X; analog wird die Projektion von A in Y definiert. Die Bildmengen heißen die Projektionsmengen oder, wenn Mißverständnisse ausgeschlossen sind, wieder die Projektion von A in X bzw. in Y. Nunmehr kann der Hauptsatz der Eliminationstheorie, wie man sofort überlegt, auch so formuliert werden (wir beschränken uns auf den Körper C als Grundkörper):

Im Raume C^n von n komplexen Veränderlichen sei eine algebraische Menge A gegeben. Die Gesamtheit der 1-dimensionalen analytischen Ebenen E durch den Nullpunkt des C^n bildet einen $(n-1)$-dimensionalen komplex-projektiven Raum P^{n-1}. Es gibt eine höchstens $(n-2)$-dimensionale algebraische Menge B im P^{n-1}, derart, daß für jede Ebene $E \notin B$ gilt: ist $C^n = C^{n-1} \times E$ irgendeine kartesische Zerlegung des C^n mit der einen festen Komponente E, so ist die Projektion von A in den C^{n-1} eine algebraische Menge im C^{n-1}.

---

[1]) Für Potenzreihen in n komplexen Veränderlichen hat bereits W. RÜCKERT die Eliminationstheorie behandelt. W. RÜCKERT: Zum Eliminationsproblem der Potenzreihenideale; Math. Ann. **107**, 259—281 (1933).

Ist in einem mehrfach-projektiven Raum $P^{n_1} \times \cdots \times P^{n_t}$ eine algebraische Menge A gegeben, so ist die Projektion von A in jeden der Räume P^{n_τ} eine algebraische Menge in P^{n_τ} [2]).

4. Geht man von der soeben gegebenen Fassung des Hauptsatzes der klassischen Eliminationstheorie aus, so ist klar, wie ein Analogon zum Eliminationsproblem in der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen formuliert werden kann. Man kann sich folgende Frage vorlegen:

Im kartesischen Produkt $X \times Y$ zweier komplexer Räume X, Y sei eine analytische Menge A gegeben. Unter welchen Voraussetzungen über X, Y oder A sind die Projektionen von A in X bzw. Y analytische Mengen in X bzw. Y?

Diese Frage ist das Hauptproblem der vorliegenden Arbeit. Wir geben eine allgemeine Bedingung dafür an, daß die Projektionen analytische Mengen sind. Wir beweisen u. a. folgenden Satz (hinsichtlich der genauen Fassung vgl. § 7, Satz 18):

Es sei A eine analytische Menge im kartesischen Produkt $X \times Y$ zweier komplexer Räume X, Y. Es sei X' eine relativ-kompakt in X liegende Menge, derart, daß gilt: $A = A \cap (X' \times Y)$. Dann ist die Projektion von A in Y eine analytische Menge in Y.

Diese Bedingung ist sicher erfüllt, wenn die *Menge A kompakt* ist. Weiter ist sie erfüllt, wenn der *Raum X kompakt* ist. Insbesondere gilt also:

Ist A eine analytische Menge im kartesischen Produkt $X \times Y$ zweier kompakter komplexer Räume X, Y, so sind die Projektionen von A in X und in Y analytische Mengen in X und in Y.

Ist im letzten Satz Y ein mehrfach-projektiver Raum, so ist die Projektion von A in Y sogar eine *algebraische Menge*, wie unmittelbar aus dem in 2. angegebenen Satz von CHOW folgt.

5. Der Projektionssatz gestattet mannigfache Anwendungen. Es lassen sich z. B. mit seiner Hilfe grundlegende Sätze über die Beschaffenheit der Bildmengen komplexer Räume unter holomorphen und meromorphen Abbildungen gewinnen. Insbesondere ergibt sich als unmittelbare Folgerung der von CHOW angekündigte Satz, daß der Körper der auf einem n-dimensionalen, kompakten komplexen Raum meromorphen Funktionen stets eine endliche algebraische Erweiterung eines Körpers in höchstens n Unbestimmten über dem Körper der komplexen Zahlen ist. — Darüber soll in einer weiteren Arbeit berichtet werden[3]).

6. Der Beweis des oben ausgesprochenen Projektionssatzes bereitet größere Schwierigkeiten. Die diesbezüglichen Überlegungen machen wesentlichen

---

[2]) Aus diesem letzten Satz folgt insbesondere, daß bei beliebiger Wahl einer eindimensionalen analytischen Ebene für jede kartesische Zerlegung $C^n = C^{n-1} \times E$ gilt: Die abgeschlossene Hülle der Projektion einer im C^n algebraischen Menge in den C^{n-1} ist eine algebraische Menge im C^{n-1}. Die Projektion einer im C^n algebraischen Menge in den C^{n-1} ist also genau dann eine algebraische Menge im C^{n-1}, wenn sie abgeschlossen im C^{n-1} ist.

[3]) Weitere Anwendungen des Projektionssatzes finden sich in: H. GRAUERT u. R. REMMERT, Zur Theorie der Modifikationen. I. Math. Ann. **129**, 274—296 (1955).

Gebrauch von einem von K. STEIN und dem Verfasser früher bewiesenen Satz über die Verteilung der Singularitäten einer analytischen Menge; sie finden sich in den §§ 6, 7. In § 6 wird zunächst der Fall einer nirgends entarteten Projektion behandelt, worauf dann in § 7 der Allgemeinfall zurückgeführt wird.

Die Vorbereitungen für den Beweis des Projektionssatzes werden in den ersten fünf Paragraphen getroffen. Es sei jedoch betont, daß bei der Abfassung derselben nicht stets der Gedanke maßgebend war, nur solche Aussagen aufzunehmen, die später für den Beweis des Projektionssatzes benötigt werden.

In § 1 sind grundlegende Sätze über analytische Mengen zusammengestellt. Der Begriff des uniformisierbaren Punktes einer analytischen Menge wird abweichend von der geläufigen Definition eingeführt. Auf die Durchführung von Beweisen haben wir in § 1 verzichtet; dieselben lassen sich aus der Darstellung der Theorie der analytischen Mengen, wie sie in den §§ 1, 2 der Arbeit [3] gegeben wurde, entnehmen.

In § 2 beweisen wir einige für unsere Überlegungen wichtige, z. T. hinlänglich bekannte Eigenschaften von holomorphen Funktionen auf analytischen Mengen. In § 3 definieren wir holomorphe Abbildungen von analytischen Mengen ineinander; wir beschränken uns im wesentlichen auf die Wiedergabe der Resultate.

Die Definition des komplexen Raumes wird in § 4 gegeben; dort wird ferner ein bekannter Satz über die Fortsetzbarkeit von analytischen Mengen auf analytische Mengen in komplexen Räumen übertragen. Ein für den Beweis des Projektionssatzes wesentlicher Satz über den Rang eines Systems von endlich vielen auf einem komplexen Raum holomorphen Funktionen findet sich in § 5.

Es sei mir gestattet, an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. K. STEIN für wertvolle Anregungen meinen herzlichen Dank auszusprechen.

§ 1. Lokale und globale Eigenschaften analytischer Mengen

0. In diesem Paragraphen sind ohne Beweise die wichtigsten Sätze über analytische Mengen zusammengestellt, die in dieser Arbeit benötigt werden. Eine Teilmenge M des n-dimensionalen komplexen Zahlenraumes C^n heißt bekanntlich eine *analytische Menge in einem Punkte* $z \in C^n$, wenn es eine Umgebung $U(z)$ und endlich viele in $U(z)$ holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_s$ gibt, derart, daß $M \cap U(z)$ das simultane Nullstellengebilde der Funktionen $f_1, \ldots, f_s$ ist; eine Teilmenge M eines Gebietes $G \subset C^n$ heißt eine *analytische Menge in* G, wenn M in jedem Punkte $z \in G$ eine analytische Menge ist. Die sich an die Definition der analytischen Menge unmittelbar anschließenden Begriffe wie „*reduzibel*", „*irreduzibel*", „*Dimension in einem Punkt*", „*gewöhnlicher Punkt*" usw. werden als bekannt vorausgesetzt (vgl. hierzu etwa [3]).

Analytische Mengen, wie sie in diesem Paragraphen vorkommen, sind stets als analytische Mengen in einem Gebiete G des C^n zu verstehen; in unseren Betrachtungen geben wir daher nicht immer das Gebiet G mit an.

1. Von grundlegender Bedeutung für die lokale Theorie analytischer Mengen ist der

Einbettungssatz: Es sei M eine analytische Menge, die den Nullpunkt O des C^n *enthält. Die Koordinaten* $z_1, \ldots, z_n$ *seien so beschaffen, daß die* $(n-d)$*-dimensionale analytische Ebene* $\{z_1 = \cdots = z_d = 0\}$ *in einer Umgebung von O nur den Punkt O mit M gemeinsam hat* $(1 \leqq d < n)$. *Dann gibt es eine Umgebungsbasis* $\{S\}$ *des Punktes O mit Polyzylindern* $S: \{|z_1| < r_1, \ldots, |z_n| < r_n\}$ *und eine jeweils in S analytische Menge M' (Einbettungsmenge von M in S) mit folgenden Eigenschaften:*

a) *M' gestattet in S die Darstellung*

$$\omega_\delta(z_\delta; z_1, \ldots, z_d) = z_\delta^{k_\delta} + \sum_{\varkappa=0}^{k_\delta - 1} A_{k_\delta-\varkappa}^{(\delta)}(z_1, \ldots, z_d) \cdot z_\delta^\varkappa = 0 \quad (\delta = d+1, \ldots, n)$$

$$\sigma_\varrho(z_1, \ldots, z_d) = 0 \quad (\varrho = 1, \ldots, r).$$

Dabei sind die Funktionen $A_{k_\delta-\varkappa}^{(\delta)}(z_1, \ldots, z_d)$ $(\varkappa = 0, \ldots, k_\delta - 1; \delta = d+1, \ldots, n)$ *und* $\sigma_\varrho(z_1, \ldots, z_d)$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$ *sämtlich im Polyzylinder* $S^d: \{|z_1| < r_1, \ldots, |z_d| < r_d\}$ *holomorph, und es gilt stets:* $A_{k_\delta-\varkappa}^{(\delta)}(0, \ldots, 0) = 0$, $\sigma_\varrho(0, \ldots, 0) = 0$. *Die Pseudopolynome* $\omega_\delta(z_\delta; z_1, \ldots, z_d)$ *besitzen im Nullpunkt keine mehrfachen Faktoren; alle Wurzeln* $z_\delta(z_1, \ldots, z_d)$ *von* $\omega_\delta = 0$ *liegen für* $(z_1, \ldots, z_d) \in S^d$ *in* $\{|z_\delta| < r_\delta\}$.

b) *M ist in jedem Polyzylinder S eine analytische Menge, und es gilt jeweils:* $M \cap S \subset M'$.

c) *Zu jedem Lösungs-d-Tupel* $(z_1', \ldots, z_d') \in S^d$ *des Gleichungssystems*

$$\sigma_1(z_1, \ldots, z_d) = 0, \ldots, \sigma_r(z_1, \ldots, z_d) = 0$$

gehört wenigstens ein Punkt $(\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n) \in M \cap S$ *mit* $\tilde{z}_1 = z_1', \ldots, \tilde{z}_d = z_d'$.

Aus diesem Einbettungssatz ergibt sich sofort ein für spätere Betrachtungen wichtiger

Projektionssatz: Es sei M eine analytische Menge; es gelte $O \in M$. *Die* $(n-d)$*-dimensionale analytische Ebene* $\{z_1 = 0, \ldots, z_d = 0\}$ *habe in der Nähe von O nur den Punkt O mit M gemeinsam. Dann gibt es eine Umgebungsbasis* $\{S\}$ *von O mit Polyzylindern* $S: \{|z_1| < r_1, \ldots, |z_n| < r_n\}$ *derart, daß M in S und die Projektion von M in den d-dimensionalen Polyzylinder* $S^d: \{|z_1| < r_1, \ldots, |z_d| < r_d\}$ *jeweils eine analytische Menge ist.*

Dabei sollen alle diejenigen Punkte $(z_1', \ldots, z_d') \in S^d$ zur *Projektion von M in* S^d gehören, über denen Punkte von $M \cap S$ liegen. Man sagt, ein Punkt $(\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n)$ *liegt über* dem Punkt $(z_1', \ldots, z_d')$, wenn gilt $\tilde{z}_1 = z_1', \ldots, \tilde{z}_d = z_d'$.

2. Der Einbettungssatz läßt sich wesentlich verschärfen, wenn man über die Menge M weitere Voraussetzungen macht. So gilt zunächst:

Ist M im Punkte $O \in C^n$ *eine d-dimensionale analytische Menge, so verschwinden jeweils die Zusatzfunktionen* $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ *identisch.*

Darüber hinaus gilt, falls M in der Umgebung von $O \in C^n$ rein d-dimensional ist:

d) *Ist* $\tilde{z}$ *irgendein Punkt von* $M \cap S$, *der nicht über der Vereinigung D der Diskriminantenflächen der Pseudopolynome* $\omega_{d+1}, \ldots, \omega_n$ *im Polyzylinder* S^d

liegt, so gibt es eine Polyzylinderumgebung $\tilde{S}(\tilde{z}) \subset S$*, derart, daß gilt:* $M \cap \tilde{S}(\tilde{z}) = M' \cap \tilde{S}(\tilde{z})$*. Zwei verschiedene Punkte von* $M \cap \tilde{S}(\tilde{z})$ *liegen nie über demselben Punkt von* S^d.

e) $M \cap S$ *zerfällt jeweils in endlich viele in* S *irreduzible analytische Mengen, die auch in* $O \in C^n$ *irreduzibel sind. Jede irreduzible Komponente von* $M \cap S$ *in* S *ist eine irreduzible Komponente von* M' *in* S.

f) *Ist* M^* *eine irreduzible Komponente von* $M \cap S$ *in* S*, so liegt über jedem Punkt von* S^d *mindestens ein Punkt von* M^*.

Die Polyzylinder S mit den zugehörigen Koordinaten $z_1, \ldots, z_n$, für welche bezüglich M die Eigenschaften a)—f) erfüllt sind, nennen wir *ausgezeichnete Koordinatensysteme in O bezüglich M*; wir schreiben $(S; z_1, \ldots, z_n)$.

3. Die Eigenschaften d), e) und f) besagen insbesondere, daß die Menge $M \cap S$ jeweils eine *Überlagerung von* S^d ist. Diese Überlagerung ist endlichblättrig und höchstens über den Punkten von $D \subset S^d$ *verzweigt*, d. h. die natürliche Abbildung Φ von $M \cap S$ auf S^d ist außerhalb D lokal-topologisch. Es gilt nun:

Ist M eine in der Umgebung $O \in C^n$ *rein d-dimensionale analytische Menge, so lassen sich die ausgezeichneten Koordinatensysteme* $(S; z_1, \ldots, z_n)$ *in O bezüglich M so wählen, daß* $M \cap S - \Phi^{-1}(D)$ *jeweils eine unbegrenzte Überlagerung von* $S^d - D$ *ist. Ist M in einer Umgebung von O irreduzibel, so kann man weiter erreichen, daß* $M \cap S - \Phi^{-1}(D)$ *zusammenhängend ist.*

4. Die Aussagen dieses Abschnittes sind im wesentlichen direkte Folgerungen aus dem Einbettungssatz und seinen Zusätzen. So gewinnt man etwa:

Ist M eine in $O \in C^n$ *irreduzible, d-dimensionale analytische Menge, so gibt es eine Umgebungsbasis* $\{U\}$ *des Punktes O, derart, daß* $M \cap U$ *jeweils irreduzibel und rein d-dimensional in U ist.*

Es sei angemerkt, daß man jedoch aus der Irreduzibilität von M in einem Punkte $z \in M$ im allgemeinen nicht auf die Irreduzibilität von M in allen in der Nähe von z liegenden Punkten von M schließen kann. Man kann hierfür einfache Beispiele im C^n, $n \geqq 3$, angeben.

Über die Lage der nichtgewöhnlichen Punkte einer analytischen Menge M in M macht der folgende Satz eine Aussage:

Ist M eine rein d-dimensionale analytische Menge, so gibt es zu jedem Punkt $z \in M$ *eine Umgebung U und eine in U analytische, höchstens* $(d-1)$*-dimensionale Menge* $\tilde{M}$*, die alle nichtgewöhnlichen Punkte von* $M \cap U$ *enthält.*

Darüber hinaus gilt, daß die nichtgewöhnlichen Punkte von M selbst eine analytische Menge bilden[4]); diese Aussage wird in dieser Arbeit jedoch nirgends benutzt.

5. Für analytische Mengen gilt ein „Identitätssatz".

Es seien M, M' analytische Mengen in einem Gebiet $G \subset C^n$*, M sei irreduzibel in G. Gibt es dann einen Punkt* $z \in M'$*, derart, daß eine irreduzible Komponente von M in z in einer irreduziblen Komponente von M' in z enthalten ist bzw. mit einer solchen Komponente übereinstimmt, so ist M in M' enthalten bzw. M stimmt mit einer der in G irreduziblen Komponenten von M' überein.*

[4]) Vgl. hierzu etwa [1], Exp. IX.

Hieraus folgt sofort das sog.

RITTsche *Lemma: Es seien M, M' analytische Mengen in einem Gebiete $G \subset C^n$; keine der in G irreduziblen Komponenten von M' sei in M enthalten. Dann ist jeder Punkt von $M \cap M'$ Häufungspunkt von Punkten von M', die nicht zu M gehören*[5]).

Weiter ergibt sich:

Sind M, M' rein d-dimensionale analytische Mengen in einem Gebiete $G \subset C^n$ und gilt $M' \subset M$, so stimmt M' mit gewissen der in G irreduziblen Komponenten von M überein.

6. Über die Dimension des Durchschnitts zweier analytischer Mengen benötigen wir folgenden Satz:

Ist M eine in einem Gebiet $G \subset C^n$ irreduzible d-dimensionale analytische Menge und ist M' eine analytische Menge in G, in der M nicht enthalten ist, so ist $M \cap M'$ eine höchstens $(d-1)$-dimensionale analytische Menge in G. Ist M' rein $(n-1)$-dimensional, so ist $M \cap M'$ entweder leer oder rein $(d-1)$-dimensional.

Ferner werden wir benutzen:

Ist M eine nicht rein nulldimensionale analytische Menge in einem beschränkten Gebiete $G \subset C^n$, so gibt es einen Randpunkt von G, der Häufungspunkt von M ist.

7. Die nichtgewöhnlichen Punkte einer analytischen Menge lassen sich weiter klassifizieren, wenn man den Begriff des uniformisierbaren Punktes einführt.

Es sei z ein Punkt einer im Raum der Veränderlichen $z_1, \ldots, z_n$ liegenden analytischen Menge M; wir nehmen zunächst an, daß M im Punkte z *irreduzibel* ist. Der Punkt z heißt ein *uniformisierbarer Punkt von M*, wenn es eine Umgebung U von z und eine topologische Abbildung φ von $U \cap M$ auf ein Gebiet G eines $t_1, \ldots, t_d$-Raumes gibt, derart, daß φ^{-1} durch n in G holomorphe Funktionen $z_\nu = u_\nu(t_1, \ldots, t_d)$ beschrieben wird. Die Veränderlichen $t_1, \ldots, t_d$ nennen wir in Verbindung mit der Abbildung φ ein *System von Ortsuniformisierenden* von M in z. Offensichtlich ist d die Dimension von M in z. Man sieht, daß jeder gewöhnliche Punkt einer analytischen Menge M ein uniformisierbarer Punkt von M ist.

Sind zwei Systeme $t_1, \ldots, t_d$ und $t'_1, \ldots, t'_d$ von Ortsuniformisierenden im Punkte $z \in M$ gegeben, so überlegt man, daß die eineindeutige Beziehung, die zwischen den Tupeln $(t'_1, \ldots, t'_d) \in G'$ und $(t_1, \ldots, t_d) \in G$ vermöge der Abbildung $\varphi \cdot \varphi'^{-1}$ geliefert wird, durch d in G holomorphe Funktionen $t_\delta = f_\delta(t'_1, \ldots, t'_d)$, $\delta = 1, \ldots, d$, mit nicht verschwindender Funktionaldeterminante beschrieben wird.

Wir lassen nun die Voraussetzung fallen, daß M in z irreduzibel ist. Ist z ein uniformisierbarer Punkt einer jeden der in z irreduziblen Komponenten von M, so soll z auch noch ein uniformisierbarer Punkt von M heißen.

Ein Punkt $z \in M$ kann also auch dann ein uniformisierbarer Punkt von M sein, wenn M in z reduzibel ist. Die obige Definition wird gerechtfertigt durch folgenden einfach zu beweisenden Satz:

---

[5]) Vgl. auch: H. HERMES, Analytische Mannigfaltigkeiten in Riemannschen Bereichen, Math. Ann. 120, 539—562 (1947/49), S. 546.

Ist die analytische Menge M in einer Umgebung des Punktes $z \in M$ rein d-dimensional, so gibt es eine Umgebung $U(z)$ und eine in $U(z)$ analytische, höchstens $(d-2)$-dimensionale Menge M^*, die alle nichtuniformisierbaren Punkte von $M \cap U(z)$ enthält.

Würden wir die Irreduzibilität von M in z als wesentliche Voraussetzung für die Uniformisierbarkeit von M in z gemacht haben, so wäre dieser Satz falsch. Der Grund dafür ist, daß eine in z irreduzible analytische Menge in beliebiger Nähe von z Punkte besitzen kann, in denen M reduzibel ist.

Die nichtuniformisierbaren Punkte einer analytischen Menge bilden selbst wieder eine analytische Menge[6]. Dieser Satz ist jedoch tiefliegend und wird in dieser Arbeit nirgends benutzt.

§ 2. Holomorphe Funktionen auf analytischen Mengen

1. Eine komplex-wertige Funktion f, die auf einer analytischen Menge M definiert ist, heißt eine *holomorphe Funktion* auf M, wenn f in jedem Punkt von M stetig und in jedem uniformisierbaren Punkt von M holomorph ist.

Dabei heißt f in einem uniformisierbaren Punkt $z \in M$ holomorph, wenn f auf jeder der in z irreduziblen Komponenten $M_\varkappa$ von M eine holomorphe Funktion ist in bezug auf ein System von Ortsuniformisierenden von $M_\varkappa$ in z, d. h. wenn $f \cdot \varphi^{-1}$ eine holomorphe Funktion in den $t_1, \ldots, t_d$ ist (φ bezeichnet die zu den $t_1, \ldots, t_d$ gehörende topologische Abbildung, vgl. 1.7.). — Ist f holomorph in $z \in M_\varkappa$ in bezug auf ein System von Ortsuniformisierenden von $M_\varkappa$ in z, so auch in bezug auf jedes andere System von Ortsuniformisierenden dieses Punktes.

Wir beweisen zunächst eine naheliegende Verallgemeinerung eines bekannten Satzes von Riemann über hebbare Unstetigkeiten holomorpher Funktionen.

Satz 1: Es sei f eine stetige Funktion auf einer analytischen Menge M. Zu jedem Punkte $z \in M$ gebe es eine Umgebung $U(z)$ und eine in $U(z)$ analytische, in $M \cap U(z)$ enthaltene Menge $'M$ mit $d_z('M) \leqq d_z(M) - 1$, derart, daß f in $U(z) \cap M - 'M$ holomorph ist. Dann ist f auf M selbst holomorph[7].

Beweis: Sei $z^{(0)}$ ein uniformisierbarer Punkt von M (nur für solche Punkte ist etwas zu beweisen); man kann sich auf den Fall beschränken, daß M irreduzibel in $z^{(0)}$ ist. Wählt man die dem Punkt $z^{(0)}$ auf Grund des Satzes zugeordnete Umgebung U genügend klein, so wird M in U durch Gleichungen $g_1 = 0, \ldots, g_s = 0$ mit in U holomorphen Funktionen $g_\sigma (\sigma = 1, \ldots, s)$ dargestellt. Wegen der Voraussetzung $d_{z^{(0)}}('M) \leqq d_{z^{(0)}}(M) - 1$ kann man (evtl. ist U noch zu verkleinern) eine in U holomorphe Funktion h finden, die auf $M \cap U$ nicht identisch verschwindet, derart, daß $'M \cap U$ enthalten ist in der in U durch die Gleichungen $g_1 = \cdots = g_s = h = 0$ definierten analytischen Menge. Sind daher $t_1, \ldots, t_d$ Ortsuniformisierende von M in $z^{(0)}$, so gilt $h(t_1, \ldots, t_d) \not\equiv 0$.

---

[6]) Dieser Satz wurde von K. Oka und H. Cartan bewiesen; siehe K. Oka: Sur les Fonctions Analytiques de Plusieurs Variables VIII. Lemme Fondamental, J. Math. Soc. of Japan 3, 204—214 (1951); sowie [1], Exp. X u. XI.

[7]) Mit $d_z(M)$ werde die Dimension von M im Punkte $z \in M$ bezeichnet.

Wir betrachten nun f als Funktion der $t_1, \ldots, t_d$ zunächst in den Punkten $(t'_1, \ldots, t'_d)$, für die gilt: $h(t'_1, \ldots, t'_d) \neq 0$. Für die zugehörigen Punkte z' auf M gilt stets $z' \in U \cap M - 'M$; mithin ist f laut Voraussetzung holomorph in jedem solchen Punkt $(t'_1, \ldots, t'_d)$. Da f in den auf $h = 0$ gelegenen Punkten noch stetig ist, so folgt aus dem bekannten Riemannschen Satz über hebbare Unstetigkeiten, daß $f(t_1, \ldots, t_d)$ auch auf $h = 0$ und mithin in den $t_1, \ldots, t_d$ schlechthin holomorph ist, w.z.b.w.

Aus Satz 1 folgt wegen 1.4. sofort:

Satz 2: Ist f eine stetige Funktion auf einer analytischen Menge M, die in jedem gewöhnlichen Punkt von M holomorph ist, so ist f auf M selbst holomorph.

Die holomorphen Funktionen auf analytischen Mengen stehen in enger Beziehung zu den *ganz-algebroiden* Funktionen. Es gilt nämlich:

Satz 3: In einer Umgebung des Nullpunktes $O \in C^n$ sei M eine irreduzible d-dimensionale analytische Menge. Es sei $(S; z_1, \ldots, z_n)$ — wo $S: \{|z_1| < r_1, \ldots, |z_n| < r_n\}$ — *ein ausgezeichnetes Koordinatensystem in O bezüglich M. Eine auf $M \cap S$ stetige Funktion f ist genau dann holomorph auf $M \cap S$, wenn f im d-dimensionalen Polyzylinder $S^d: \{|z_1| < r_1, \ldots, |z_d| < r_d\}$ ganz-algebroid ist, d. h. wenn f Nullstelle eines in S^d irreduziblen Pseudopolynoms der Form $w^s + c_1(z_1, \ldots, z_d) w^{s-1} + \cdots + c_s(z_1, \ldots, z_d)$ mit in S^d holomorphen Koeffizienten $c_1, \ldots, c_s$ ist.*

Der Beweis ist einfach. Die Menge M kann nach 1.3. als eine Überlagerung von S^d aufgefaßt werden; sämtliche Verzweigungspunkte von M liegen über einer in S^d analytischen Menge $D(D \neq S^d)$. Ist $z' = (z'_1, \ldots, z'_n) \in M$ kein Verzweigungspunkt, so sind die auf die Nähe von $z'_1, \ldots, z'_d$ beschränkten Koordinaten $z_1, \ldots, z_d$ Ortsuniformisierende von M in der Umgebung von z'. Ist daher f holomorph auf M, so ist f in der Umgebung eines jeden solchen Punktes z' eine holomorphe Funktion in den $z_1, \ldots, z_d$. Dieselbe ist in $S^d - D$ uneingeschränkt holomorph fortsetzbar; sie bleibt dabei zwar i. a. nicht eindeutig, stellt jedoch noch stets die Funktion f in den zugehörigen Punkten von M dar. Auf diese Weise gelangt man zu den Funktionswerten von f in sämtlichen Punkten von $M \cap S - \Phi^{-1}(D)$ (Φ sei die Projektion von M auf S), da nach 1.3. die Überlagerung außerhalb D unbegrenzt und zusammenhängend ist. Sei nun diese Überlagerung s-blättrig und seien etwa $w_1(z_1, \ldots, z_d), \ldots, w_s(z_1, \ldots, z_d)$ die Funktionswerte von f über dem Punkt $(z_1, \ldots, z_d) \in S^d - D$. Dann sind die elementarsymmetrischen Funktionen

$$c_\sigma(z_1, \ldots, z_d) = w_1(z_1, \ldots, z_d) \cdot \ldots \cdot w_\sigma(z_1, \ldots, z_d) + \cdots \quad (\sigma = 1, \ldots, s)$$

uneingeschränkt holomorph in $S^d - D$ fortsetzbar; sie bleiben dabei, wie unmittelbar aus dem vorstehenden folgt, eindeutig. Da f stetig ist, sind die $c_\sigma(z_1, \ldots, z_d)$ stetig in die Punkte von D fortsetzbar. Mithin ist jedes c_σ eine eindeutige holomorphe Funktion in S^d. Das Pseudopolynom

$$\Omega(w; z_1, \ldots, z_d) = w^s + c_1(z_1, \ldots, z_d) w^{s-1} + \cdots + c_s(z_1, \ldots, z_d)$$

wird nun durch $w = f$ identisch annulliert. Ist Ω irreduzibel in S^d, so sind wir bereits am Ziele. Andernfalls sei $\Omega = \Omega_1 \cdot \ldots \cdot \Omega_t$ die Primelementzerlegung von Ω in S^d. Ist etwa Ω_1 ein Faktor, der von der Funktion f annulliert wird,

wenn man f auf die Umgebung irgendeines Punktes von $M \cap S$, der nicht über D liegt, beschränkt, so annullieren auch alle holomorphen Fortsetzungen dieses Funktionselementes auf $M \cap S$ den Faktor Ω_1. Daraus folgt aber (nach Konstruktion von Ω), daß Ω eine Potenz von Ω_1 sein muß. Damit ist insbesondere der erste Teil des Satzes bewiesen.

Es sei nun f ganz-algebroid in S^d. Ist $z \in M \cap S$ irgendein Punkt, der nicht Verzweigungspunkt ist, so folgt wegen der Stetigkeit von f auf $M \cap S$ aus einem bekannten Satze über die Wurzeln von Pseudopolynomen, daß f in der Umgebung von $z \in M \cap S$ holomorph in den Ortsuniformisierenden $z_1, \ldots, z_d$ ist. Daher ist f in allen Punkten von $M \cap S$, die nicht über D liegen, holomorph. Dann ist aber, da f stetig auf $M \cap S$ ist und die Verzweigungspunktmenge von $M \cap S$ in der höchstens $(d-1)$-dimensionalen in S analytischen Menge $\Phi^{-1}(D)$ enthalten ist, nach Satz 1 die Funktion f auf $M \cap S$ selbst holomorph.

2. Ist f eine Funktion, deren Argumentbereich irgendeine Menge A ist, so versteht man unter der *Beschränkung von f* auf eine Teilmenge $\hat{A}$ von A diejenige auf $\hat{A}$ definierte Funktion $\hat{f}$, für die gilt: $\hat{f}(a) = f(a)$ für jedes $a \in \hat{A}$. — Es gilt

Satz 4: Ist f eine holomorphe Funktion auf einer analytischen Menge M und ist $\hat{M}$ eine in M enthaltene analytische Menge, so ist die Beschränkung $\hat{f}$ von f auf $\hat{M}$ eine holomorphe Funktion auf $\hat{M}$.

Anmerkung: Dieser Satz ist nicht trivial, denn $\hat{M}$ kann evtl. aus lauter nichtuniformisierbaren Punkten von M bestehen. Dann weiß man zunächst nur, daß $\hat{f}$ stetig auf $\hat{M}$ ist.

Beweis: Wegen Satz 2 genügt es zu zeigen, daß $\hat{f}$ in allen gewöhnlichen Punkten von $\hat{M}$ holomorph ist. Sei $z^{(0)} \in \hat{M}$ ein solcher Punkt; sei $(S; z_1, \ldots, z_n)$ ein ausgezeichnetes Koordinatensystem in $z^{(0)}$ bezüglich $\hat{M}$, so daß $\hat{M} \cap S$ durch die Gleichungen $z_{l+1} = \cdots = z_n = 0$ dargestellt wird. Man darf annehmen, daß M in $z^{(0)}$ irreduzibel ist; dann ist M — falls S hinreichend klein gewählt ist — eine rein d-dimensionale in S irreduzible analytische Menge. Nur der Fall $l \leq d-1$ ist interessant. Wir zeigen zunächst, daß man den Beweis des Satzes auf den Fall $l = d-1$ zurückführen kann. Zu dem Zwecke betrachten wir die in S analytischen Mengen

$$M_\lambda = M \cap S \cap \{z_{n-\lambda} = \cdots = z_n = 0\} \quad (\lambda = 0, \ldots, n-l-1).$$

Es gilt offenbar: $M \cap S \supset M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_{n-l-1} = \hat{M} \cap S$.

Ist $l < d-1$, so gibt es einen kleinsten Index λ_0 mit $0 \leq \lambda_0 < n-l-1$, so daß die Menge $M \cap S$ die Menge M_{λ_0} echt umfaßt. Daraus folgt aber, im wesentlichen auf Grund von 1.6., wie man leicht überlegt, daß M_{λ_0} eine rein $(d-1)$-dimensionale analytische Menge in S ist. Es gibt eine in S irreduzible Komponente von M_{λ_0} — wir bezeichnen sie mit M^{d-1} — die $\hat{M} \cap S$ umfaßt. Gilt $d-2 = l$, so brechen wir das Verfahren ab; gilt jedoch $l < d-2$, so läßt sich in analoger Weise eine in S irreduzible analytische $(d-2)$-dimensionale Menge M^{d-2} finden, die in M^{d-1} enthalten ist und $\hat{M} \cap S$ umfaßt. Man kann mithin in S irreduzible analytische $(d-\delta)$-dimensionale Mengen

$M^{d-\delta}$ finden ($\delta = 1, \ldots, d-l-1$), so daß gilt: $M \cap S \supset M^{d-1} \supset M^{d-2} \supset \cdots \supset$ $\supset M^{l+1} \supset \hat{M} \cap S$.

Ist nun die Beschränkung f^* von f auf M^{d-1} holomorph und die Beschränkung von f^* auf M^{d-2} ebenfalls usw., so folgt, daß auch die Beschränkung $\hat{f}$ von f auf $\hat{M} \cap S$ holomorph ist.

Nun zum eigentlichen Beweis! Es sei $l = d - 1$. Wir wählen in $z^{(0)}$ bezüglich M ein ausgezeichnetes Koordinatensystem (T; $u_1, \ldots, u_n$), derart, daß $\hat{M} \cap T$ nur aus gewöhnlichen Punkten besteht. Ist T^d: $\{|u_1| < r_1, \ldots, |u_d| < r_d\}$ der d-dimensionale Teilpolyzylinder von T bezüglich der ersten d Koordinaten, so gibt es nach Satz 3 ein in T^d irreduzibles Pseudopolynom $\Omega \equiv w^s + c_1(u_1, \ldots, u_d)\, w^{s-1} + \cdots + c_s(u_1, \ldots, u_s)$, welches von f auf M annulliert wird.

Wir dürfen annehmen, daß $\hat{M} \cap T$ in der Verzweigungsmenge von $M \cap T$ liegt, denn besitzt $\hat{M} \cap T$ Punkte, die gewöhnliche Punkte von $M \cap T$ sind, so ist ohne weiteres ersichtlich, daß die Beschränkung $\hat{f}$ von f auf $\hat{M} \cap T$ zunächst in diesen Punkten und dann wegen Satz 1 in sämtlichen Punkten von $\hat{M} \cap T$ holomorph ist. Die Menge $\hat{M} \cap T$ sei demnach enthalten in der in T durch die Gleichungen

$$\omega_\delta(u_\delta;\, u_1, \ldots, u_d) = 0 \qquad (\delta = d+1, \ldots, n)$$
$$D(u_1, \ldots, u_d) = 0$$

dargestellten analytischen Menge; dabei sind ω_δ die die Einbettungsmenge von $M \cap T$ darstellenden Pseudopolynome, während D die Diskriminantenfläche aller ω_δ beschreibt. Wir können annehmen (evtl. ist eine lineare Koordinatentransformation in den $u_1, \ldots, u_d$ allein auszuführen), daß D ein Pseudopolynom in u_d ist. Alsdann wird die Menge $\hat{M}$ in der Nähe des Nullpunktes von der Ebene $\{u_1 = \cdots = u_{d-1} = 0\}$ nur in isolierten Punkten geschnitten; da $\hat{M} \cap T$ nur aus gewöhnlichen Punkten besteht, kann $\hat{M} \cap T$ also durch holomorphe Gleichungen der Form

$$u_\delta = g_\delta(u_1, \ldots, u_{d-1}) \qquad (\delta = d, \ldots, n)$$

in der Umgebung von $(0, \ldots, 0)$ dargestellt werden. Wir können T so klein gewählt denken, daß diese Darstellung in ganz T gilt. Die Beschränkung $\hat{f}$ von f auf $\hat{M} \cap T$ annulliert nun in T^{d-1}: $\{|u_1| < r_1, \ldots, |u_{d-1}| < r_{d-1}\}$ das Pseudopolynom $\tilde{\Omega} \equiv w^s + \tilde{c}_1(u_1, \ldots, u_{d-1})\, w^{s-1} + \cdots + \tilde{c}_s(u_1, \ldots, u_{d-1})$; dabei gilt:

$$\tilde{c}_\sigma(u_1, \ldots, u_{d-1}) = c_\sigma(u_1, \ldots, u_{d-1}, g_d(u_1, \ldots, u_{d-1})) \quad (\sigma = 1, \ldots, s);$$

die $\tilde{c}_\sigma$ sind also in T^{d-1} holomorph. (Man kann voraussetzen, daß gilt: $|g_d(u_1, \ldots, u_{d-1})| < r_d$ für $(u_1, \ldots, u_{d-1}) \in T^{d-1}$). Die Funktion $\hat{f}$ annulliert, da sie auf $\hat{M} \cap T$ stetig ist, auch einen der in T^{d-1} irreduziblen Faktoren von $\tilde{\Omega}$ (derselbe ist sogar linear). Daraus folgt aber nach Satz 3, daß $\hat{f}$ holomorph auf $\hat{M} \cap T$ ist.

3. Nachdem wir auf analytischen Mengen den Begriff der holomorphen Funktion eingeführt haben, können wir auch analytische Mengen in analytischen Mengen definieren.

Eine Teilmenge N einer analytischen Menge M heißt eine *analytische Menge bezüglich M in einem Punkt* $z^{(0)} \in M$, wenn es eine Umgebung U von $z^{(0)}$ auf M gibt und endlich viele in U holomorphe Funktionen $g_1, \ldots, g_s$, so daß $N \cap U$ genau aus den in U gelegenen gemeinsamen Nullstellen der Funktionen $g_1, \ldots, g_s$ besteht. Eine Teilmenge N von M heißt eine analytische Menge bezüglich M in M, wenn N in jedem Punkt $z^{(0)} \in M$ eine analytische Menge bezüglich M ist.

Sind M, N analytische Mengen in einem Gebiete des C^n und gilt $N \subset M$, so ist N auch eine analytische Menge bezüglich M in M.

Wir zeigen im folgenden, daß man durch Betrachtung von analytischen Mengen in analytischen Mengen zu keinen „*neuen*" analytischen Mengen gelangt. Es gilt:

Satz 5: Ist M eine rein d-dimensionale analytische Menge in einem Gebiet G des C^n und ist f eine auf M holomorphe nicht identisch verschwindende Funktion, so ist die Nullstellenmenge N von f entweder leer oder eine rein $(d-1)$-dimensionale analytische Menge in G.

Beweis: Die Menge N ist abgeschlossen in G. Sei N nicht leer, sei $z^{(0)} \in N$ ein beliebiger Punkt. Wir dürfen annehmen, daß M in $z^{(0)}$ irreduzibel ist. Daraus ergibt sich nämlich der allgemeine Fall sofort, denn sind $M_1, \ldots, M_k$ die irreduziblen Komponenten von M in $z^{(0)}$, sind $h_1, \ldots, h_k$ die Beschränkungen von h jeweils auf $M_1, \ldots, M_k$ und ist die Nullstellenmenge $N_\varkappa$ von $h_\varkappa$ jeweils eine rein $(d-1)$-dimensionale analytische Menge in $z^{(0)}$ (bezogen auf $z^{(0)}$ als Punkt des C^n), so ist auch $N = \bigcup N_\varkappa$ als Vereinigung von endlich vielen in $z^{(0)} \in C^n$ analytischen rein $(d-1)$-dimensionalen Mengen eine analytische rein $(d-1)$-dimensionale Menge in $z^{(0)} \in C^n$.

Es sei nun $(S; z_1, \ldots, z_n)$ ein ausgezeichnetes Koordinatensystem in $z^{(0)}$ bezüglich M, es gilt: $S \subset G$. Nach Satz 3 annulliert f auf $M \cap S$ ein Pseudopolynom $w^s + c_1(z_1, \ldots, z_d)\, w^{s-1} + \cdots + c_s(z_1, \ldots, z_d)$. Es gilt $c_s(z_1, \ldots, z_d) \not\equiv 0$, da nach Voraussetzung $f \not\equiv 0$. Die Funktion f verschwindet nun in einem Punkt $(z_1', \ldots, z_n') \in M \cap S$ höchstens dann, wenn gilt $c_s(z_1', \ldots, z_d') = 0$. Umgekehrt liegt, da $c_s(z_1', \ldots, z_d')$ das Produkt der Funktionswerte von f in den über $(z_1', \ldots, z_d')$ liegenden Punkten von $M \cap S$ ist, über jeder Nullstelle von c_s mindestens ein Punkt von $M \cap S$, in dem f verschwindet.

Die Menge $N \cap S$ ist mithin eine Teilmenge der in S analytischen Menge

$$L = M \cap S \cap \{c_s(z_1, \ldots, z_d) = 0\}.$$

Wir konstruieren nun eine Umgebung $\tilde{S}$ von $z^{(0)}$, die in S enthalten ist, derart, daß $N \cap \tilde{S}$ mit gewissen der in $\tilde{S}$ irreduziblen Komponenten von $L \cap \tilde{S}$ übereinstimmt. Da L offensichtlich rein $(d-1)$-dimensional in S ist, ist alsdann der Satz bewiesen. Für $d = 1$ ist der Satz trivial, wir setzen daher $d > 1$ voraus.

Wir können annehmen (evtl. ist eine lineare Koordinatentransformation in den $z_1, \ldots, z_d$ allein auszuführen), daß gilt: $c_s(0, \ldots, 0, z_d) \not\equiv 0$. Dann

schneidet die $(n-d+1)$-dimensionale analytische Ebene $\{z_1 = \cdots = z_{d-1} = 0\}$ die Menge L in der Nähe von $z^{(0)}$ nur in $z^{(0)}$; es gibt daher einen in S enthaltenen Polyzylinder $\tilde{S}: \{|z_1| < a_1, \ldots, |z_n| < a_n\}$, derart, daß $L \cap \tilde{S}$ eine Überlagerung des Polyzylinders $S^{d-1}: \{|z_1| < a_1, \ldots, |z_{d-1}| < a_{d-1}\}$ ist. Sämtliche Verzweigungspunkte von $L \cap \tilde{S}$ liegen über einer leeren oder rein $(d-2)$-dimensionalen, in S^{d-1} analytischen Menge V. Es sei $z = (\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n) \in L \cap \tilde{S}$ ein Punkt, der nicht über V liegt und in dem f verschwindet. Wir wollen eine Umgebung $S(\tilde{z})$ konstruieren, derart, daß f auf $L \cap S(\tilde{z})$ identisch verschwindet. Zu dem Zwecke betrachten wir zunächst die Menge M in der Nähe von $\tilde{z}$. Da die Ebene $\{z_1 = \tilde{z}_1, \ldots, z_d = \tilde{z}_d\}$ die Menge M in der Nähe von $\tilde{z}$ nur in $\tilde{z}$ schneidet, so gibt es einen Polyzylinder $S(\tilde{z}): \{|z_1 - \tilde{z}_1| < b_1, \ldots, |z_n - \tilde{z}_n| < b_n\}$, derart, daß $M \cap S(\tilde{z})$ eine Überlagerung von $S^d(\tilde{z}): \{|z_1 - \tilde{z}_1| < b_1, \ldots, |z_d - \tilde{z}_d| < b_d\}$ ist.

Wir denken uns $S(\tilde{z})$ so klein gewählt, daß jede in $\tilde{z}$ irreduzible Komponente von M in $S(\tilde{z})$ irreduzibel ist (das ist nach 1.4. möglich); ferner sei $S(\tilde{z})$ so beschaffen, daß zwei verschiedene Punkte von $L \cap S(\tilde{z})$ nie dieselben $z_1, \ldots, z_{d-1}$-Koordinaten haben; im übrigen gelte $S(\tilde{z}) \subset S$. Die Funktion f annulliert auf $M \cap S(\tilde{z})$ wieder ein Pseudopolynom $w^r + d_1(z_1, \ldots, z_d)\, w^{r-1} + \cdots + d_r(z_1, \ldots, z_d)$, dabei gilt $d_r \not\equiv 0$. Nun ist aus gleichen Gründen wie vorhin die Nullstellenmenge $N \cap S(\tilde{z})$ von f auf $M \cap S(\tilde{z})$ in der in $S(\tilde{z})$ analytischen Menge

$$K = M \cap S(z) \cap \{d_r(z_1, \ldots, z_d) = 0\}$$

enthalten, und zwar liegt über jeder Nullstelle von d_r in $S^d(\tilde{z})$ mindestens eine Nullstelle von f auf $M \cap S(\tilde{z})$. Da $d_r(z_1, \ldots, z_d)$ das Produkt der Funktionswerte von f in den über $(z_1, \ldots, z_d)$ gelegenen Punkten von $M \cap S(\tilde{z})$ ist, so ist die Nullstellenmenge von d_r in $S(\tilde{z})$ in der Nullstellenmenge von c_s in $S(\tilde{z})$ enthalten. Das besagt aber, daß die Menge K in der Menge $L \cap S(\tilde{z})$ enthalten ist. Da $L \cap S(\tilde{z})$ in $S(\tilde{z})$ irreduzibel ist ($L \cap S(\tilde{z})$ ist zusammenhängend und jeder Punkt ist gewöhnlicher Punkt!) und sowohl K als auch $L \cap S(\tilde{z})$ rein $(d-1)$-dimensionale analytische Mengen sind, so stimmt also K nach 1.5. mit $L \cap S(\tilde{z})$ überein. Da nun über jedem d-Tupel aus $S^d(\tilde{z})$, welches c_s annulliert, genau ein Punkt von $L \cap S(\tilde{z})$ liegt und da weiter über jedem solchen d-Tupel eine Nullstelle von f auf $M \cap S(\tilde{z})$ liegt, so folgt, daß f auf $L \cap S(\tilde{z})$ identisch verschwindet.

Sei nun L_1 diejenige irreduzible Komponente von L in $\tilde{S}$, die die Menge $L \cap S(\tilde{z})$ enthält. Die Beschränkung von h auf L_1 ist nach Satz 4 eine holomorphe Funktion auf L_1; da dieselbe auf $L \cap S(\tilde{z})$ identisch verschwindet, so auch notwendig auf L_1; d. h. aber, daß h auf L_1 verschwindet.

Nunmehr betrachten wir alle über einem beliebigen $(d-1)$-Tupel $(z_1, \ldots, z_{d-1}) \notin V$ liegenden Punkte, in denen f verschwindet. Jedem solchen Punkt können wir nach dem soeben bewiesenen eine in $\tilde{S}$ irreduzible Komponente von L zuordnen, auf der f identisch verschwindet. Die Vereinigung L' dieser Komponenten ist dann die genaue Nullstellenmenge von f auf $M \cap \tilde{S}$. Ist nämlich $z' = (z_1', \ldots, z_n') \in M \cap \tilde{S}$ irgendeine Nullstelle von f und steht $z' \in L'$

noch nicht fest, so dürfen wir $(z'_1, \ldots, z'_{d-1}) \in V$ annehmen, da sonst z' nach Konstruktion von L' bereits zu L' gehört. Da die Ebene $\{z_1 = z'_1, \ldots, z_d = z'_d\}$ die Menge M in der Nähe von z' nur in z' schneidet, so genügt f nach Satz 3 in einer geeigneten Polyzylinderumgebung $S(z')$ einer Pseudopolynomgleichung $f^\nu + e_1(z_1, \ldots, z_d) f^{\nu-1} + \cdots + e_\nu(z_1, \ldots, z_d) = 0$. Über jeder genügend nahe bei $(z'_1, \ldots, z'_d)$ gelegenen Nullstelle von e_ν liegt eine Nullstelle von f auf $M \cap S(z')$. Da V leer oder rein $(d-2)$-dimensional und die Nullstellenmenge von e_ν rein $(d-1)$-dimensional ist, gibt es eine gegen z' konvergierende Folge $z^{(\nu)}$ von Nullstellen von f auf $M \cap S(z')$, derart, daß kein $z^{(\nu)}$ über V liegt. Daher gehören alle $z^{(\nu)}$ zu L'; da L' abgeschlossen ist, folgt $z' \in L'$. Mithin ist L' die genaue Nullstellenmenge von f auf $M \cap \widetilde{S}$, so daß Satz 5 bewiesen ist.

Aus Satz 5 folgt unmittelbar:

Satz 6: Ist M eine analytische Menge in einem Gebiete G des C^n und ist N eine Teilmenge von M, die eine analytische Menge bezüglich M in M ist, so ist N eine analytische Menge in G.

§ 3. Holomorphe Abbildungen analytischer Mengen

1. M, M' seien wieder analytische Mengen in Gebieten eines Zahlenraumes. Eine Abbildung φ einer analytischen Menge M in eine analytische Menge M' (M' liege im $z_1, \ldots, z_n$-Raume) heißt eine *holomorphe Abbildung*, wenn die die Abbildung beschreibenden Funktionen $z_\nu = f_\nu(x)$ $(x \in M;$ $\nu = 1, \ldots, n)$ holomorphe Funktionen auf M sind.

Eine holomorphe Funktion auf einer analytischen Menge M ist also eine holomorphe Abbildung von M in die Zahlenebene C.

Man kann eine äquivalente Definition geben, die nicht die Koordinaten im Bildraum benutzt. Es gilt nämlich, was hier nicht bewiesen werden soll (vgl. etwa [2]):

Eine Abbildung φ einer analytischen Menge M in eine analytische Menge M' ist genau dann eine holomorphe Abbildung, wenn φ stetig ist und folgender Bedingung genügt: für jede in einer offenen Menge V von M' holomorphe Funktion f ist $f \cdot \varphi$ eine holomorphe Funktion in der in M offenen Menge $\varphi^{-1}(V)$.

2. Holomorphe Abbildungen haben zwei wichtige Eigenschaften:

a) *Ist φ eine holomorphe Abbildung einer analytischen Menge M in eine analytische Menge M' und φ' eine holomorphe Abbildung von M' in eine analytische Menge M'', so ist $\varphi' \cdot \varphi$ eine holomorphe Abbildung von M in M''.*

b) *Ist φ eine eineindeutige holomorphe Abbildung einer analytischen Menge M auf eine analytische Menge M', so ist die Umkehrabbildung φ^{-1} eine holomorphe Abbildung von M' auf M*[8]).

Aus b) folgt:

Satz 7: Ist φ eine eineindeutige holomorphe Abbildung einer analytischen Menge M auf eine analytische Menge M', so gilt:

1. *Zerfällt die Menge M im Punkte $z \in M$ in k irreduzible Komponenten, so zerfällt M' im Punkte $z' = \varphi(z)$ ebenfalls in k irreduzible Komponenten (ist insbesondere M irreduzibel in z, so ist M' irreduzibel in z').*

---

[8]) Hinsichtlich der Beweise vgl. [2].

2. *Der Punkt $z \in M$ ist genau dann ein uniformisierbarer Punkt von M, wenn $z' = \varphi(z)$ ein uniformisierbarer Punkt von M' ist.*

3. *Die Menge M ist in $z \in M$ genau dann d-dimensional, wenn M' in z' d-dimensional ist.*

Die Aussagen 1., 2. sind ohne weiteres ersichtlich; 3. kann wie folgt eingesehen werden: Man darf annehmen, daß M und M' irreduzibel im Großen sind. Alsdann hat M in allen Punkten dieselbe Dimension, dasselbe gilt für M'. Daher genügt es, einen Punkt $z' \in M'$ anzugeben, derart, daß M' in z' d-dimensional ist. Wir wählen $z' \in M'$ so, daß z' ein gewöhnlicher Punkt von M' und $\varphi^{-1}(z') \in M$ ein gewöhnlicher Punkt von M ist. Sei nun etwa d' die Dimension von M' in z'. Wir denken uns in der Umgebung von $\varphi^{-1}(z')$ bzw. z' die Koordinaten $z_1, \ldots, z_n$ bzw. $z'_1, \ldots, z'_n$ so gewählt, daß M bzw. M' in der Nähe dieser Punkte durch die Gleichungen

$$z_{d+1} = \cdots = z_n = 0 \quad \text{bzw.} \quad z'_{d'+1} = \cdots = z'_n = 0$$

beschrieben wird. Dann sind $z_1, \ldots, z_d$ bzw. $z'_1, \ldots, z'_{d'}$ Ortsuniformisierende von M bzw. M' in $\varphi^{-1}(z')$ bzw. z'; die Abbildung φ kann dementsprechend durch Gleichungen

$$z'_1 = f_1(z_1, \ldots, z_d), \ldots, z'_{d'} = f_{d'}(z_1, \ldots, z_d)$$

mit in einer Umgebung des Punktes $(0, \ldots, 0)$ holomorphen Funktionen f_δ dargestellt werden. Da dieses Funktionensystem umkehrbar ist, folgt notwendig $d = d'$ (vgl. hierzu etwa [3], S. 283).

Aus Satz 4 ergibt sich direkt

Satz 8: Ist φ eine holomorphe Abbildung einer analytischen Menge M in eine analytische Menge M' und ist $\hat{M}$ eine in M enthaltene analytische Menge, so ist die Beschränkung $\hat{\varphi}$ von φ auf $\hat{M}$ eine holomorphe Abbildung von $\hat{M}$ in M'.

§ 4. Komplexe Räume

1. Es ist im Hinblick auf die in dieser Arbeit zu besprechenden Projektionssätze zweckmäßig, den Begriff des komplexen Raumes im Anschluß an J. P. Serre ([1], Exp. XX) einzuführen. Dementsprechend definieren wir:

Def. Unter einer komplex-analytischen Struktur auf einem Hausdorff*schen Raum X wird folgendes verstanden:*

1. *X ist mit einer Überdeckung $\mathfrak{U}$ von Karten (U_j, ψ_j) ($j \in J$, J eine Indexmenge) versehen. Dabei wird unter einer Karte (U, ψ) eine offene Menge $U \subset X$ verstanden, die durch eine topologische Abbildung ψ auf eine analytische Menge, die in einem Gebiete eines komplexen Zahlenraumes liegt, bezogen ist.*

2. *Zwei Karten (U_i, ψ_i) und (U_j, ψ_j) aus $\mathfrak{U}$ sind holomorph verträglich, d. h. $U_i \cap U_j$ ist leer oder die topologische Abbildung $\psi_j \cdot \psi_i^{-1} : \psi_i(U_i \cap U_j) \to \psi_j(U_i \cap U_j)$ ist eine holomorphe Abbildung (Verträglichkeitsbedingung).*

3. *Ist (U, ψ) irgendeine Karte, welche mit allen $(U_j, \psi_j) \in \mathfrak{U}$ holomorph verträglich ist, so gilt: $(U, \psi) \in \mathfrak{U}$ (Vollständigkeitsbedingung).*

Eine Überdeckung $\mathfrak{U}$, die zunächst nur die Bedingungen 1. und 2. erfüllt, kann offenbar stets zu einer komplex-analytischen Struktur vervollständigt werden.

Def. Ein HAUSDORFF*scher Raum X mit einer fest vorgegebenen komplex-analytischen Struktur heißt ein komplexer Raum*[8]).

Ein Punkt x eines komplexen Raumes X heißt ein *uniformisierbarer Punkt* von X, wenn es eine Karte $(U, \psi) \in \mathfrak{U}$ gibt, derart, daß $x \in U$ und $\psi(x)$ ein uniformisierbarer Punkt von $\psi(U)$ ist.—Ist x ein uniformisierbarer Punkt von X, so ist auf Grund von Satz 7, 2. für jede Karte $(U, \psi) \in \mathfrak{U}$ mit $x \in U$ der Punkt $\psi(x)$ ein uniformisierbarer Punkt von $\psi(U)$.

Ein komplexer Raum X heißt *d-dimensional* im Punkte $x \in X$, wenn es eine Karte $(U, \psi) \in \mathfrak{U}$ mit $x \in U$ gibt, so daß die im Punkte $\psi(x)$ analytische Menge $\psi(U)$ in $\psi(x)$ d-dimensional ist. — Ist $('U, '\psi) \in \mathfrak{U}$ mit $x \in {}'U$ eine weitere Karte, so ist, wie man sofort aus Satz 7, 3. folgert, die Menge $'\psi('U)$ in $'\psi(x)$ ebenfalls d-dimensional. Die Dimension des Raumes X im Punkte $x \in X$ ist daher unabhängig von der Wahl der Karte definiert.

Eine komplex-wertige stetige Funktion f auf einer offenen Menge W eines komplexen Raumes X heißt *holomorph* in einem Punkte $x \in W$, wenn es eine Karte $(U, \psi) \in \mathfrak{U}$ mit $x \in U$ gibt, so daß $f \cdot \psi^{-1}$ eine holomorphe Funktion im Punkte $\psi(x)$ der analytischen Menge $\psi(U)$ ist; diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Karte $(U, \psi) \in \mathfrak{U}$. Die Funktion f heißt holomorph in W, wenn f in jedem Punkt $x \in W$ holomorph ist. Eine stetige Abbildung τ eines komplexen Raumes X in einen komplexen Raum Y heißt eine *holomorphe Abbildung*, wenn folgendes gilt: ist f eine holomorphe Funktion in einer offenen Menge $V \subset Y$, so ist $f \cdot \tau$ eine holomorphe Funktion in der offenen Menge $\tau^{-1}(V)$.

2. Eine Teilmenge A eines komplexen Raumes X heißt eine *analytische Menge* in einem Punkte $x \in X$, wenn es eine Umgebung $U(x)$ gibt, so daß $U(x) \cap A$ aus dem genauen simultanen Nullstellengebilde endlich vieler in $U(x)$ holomorpher Funktionen besteht. A heißt eine analytische Menge in X, wenn A in jedem Punkte $x \in X$ eine analytische Menge ist. Es folgt sofort:

Ist τ eine holomorphe Abbildung eines komplexen Raumes X in einen komplexen Raum Y, so ist das Urbild $\tau^{-1}(M)$ einer jeden in Y analytischen Menge M eine analytische Menge in X.

Neben analytischen Mengen werden wir auch lokal-analytische Mengen betrachten. Eine Teilmenge A eines komplexen Raumes X heißt eine *lokal-analytische Menge* in X, wenn A in jedem Punkt $x \in A$ eine analytische Menge ist. *Eine lokal-analytische Menge A in X ist genau dann eine analytische Menge in X, wenn A abgeschlossen in X ist.*

---

[8]) Der Begriff des komplexen Raumes hat sich als grundlegend für die Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen erwiesen. Es sind im wesentlichen zwei Definitionen geläufig: H. CARTAN (Séminaire E. N. S. 1951—1952 und [1]) führte den Begriff des espace analytique général ein; die lokalen Repräsentanten sind analytische Mengen, die sich „normal" in einen komplexen Zahlenraum einbetten lassen. H. BEHNKE und K. STEIN führten in der Arbeit: Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete, Math. Ann. 124, 1—16 (1951) den Begriff des Riemannschen Gebietes ein; hier sind die lokalen Repräsentanten analytisch-verzweigte Überlagerungen der Hyperkugel. Zum Begriff des komplexen Raumes vgl. auch: H. GRAUERT u. R. REMMERT, loc. cit. 3), und [2]. Es ist noch unbekannt, ob die Definitionen von H. CARTAN sowie von H. BEHNKE und K. STEIN inhaltsgleich sind. — Die in der vorliegenden Arbeit gegebene Definition des komplexen Raumes ist eine von SERRE vorgeschlagene Verallgemeinerung der CARTANschen Definition.

Es sei A eine analytische Menge in einem komplexen Raum X und $\mathfrak{U} = (U_j, \psi_j)$ die die komplex-analytische Struktur auf X definierende Überdeckung. Wir ordnen jeder Karte $(U_j, \psi_j) \in \mathfrak{U}$, wo $U_j \cap A$ nicht leer ist, die auf A definierte Karte $(U_j \cap A, \hat{\psi}_j)$ zu; dabei bezeichne $\hat{\psi}_j$ die Beschränkung von ψ_j auf $U_j \cap A$. $\hat{\psi}_j$ ist eine topologische Abbildung, wenn A mit der induzierten Topologie versehen wird. Das System $(U_j \cap A, \hat{\psi}_j)$ bildet eine Überdeckung von A. Da offensichtlich $\hat{\psi}_j(U_j \cap A)$ eine analytische Menge bezüglich der in einem Gebiete eines komplexen Zahlenraumes gelegenen analytischen Menge $\psi_j(U_j)$ ist, so folgt aus Satz 6, daß $\hat{\psi}_j(U_j \cap A)$ eine analytische Menge in demselben Gebiete dieses Zahlenraumes ist. Aus Satz 8 folgt weiter, daß je zwei Karten $(U_i \cap A, \hat{\psi}_i)$ und $(U_j \cap A, \hat{\psi}_j)$ holomorph verträglich sind. Mithin läßt sich die Überdeckung $(U_j \cap A, \hat{\psi}_j)$ zu einer komplex-analytischen Struktur auf dem Hausdorffschen Raum A vervollständigen. Damit haben wir bewiesen:

Satz 9: Ist A eine analytische Menge in einem komplexen Raum X, so wird A zu einem komplexen Raum, wenn man die komplex-analytische Struktur von X auf A beschränkt.

Im Sinne dieses Satzes können also analytische Mengen A in komplexen Räumen X selbst als komplexe Räume aufgefaßt werden; A ist *„holomorph eingebettet"* in X, d. h. die identische Abbildung von A in X ist eine holomorphe Abbildung[10]).

Eine analytische Menge A in einem komplexen Raum X zerfällt in jedem Punkt $x \in A$ in eindeutiger Weise in endlich viele in x analytische und daselbst irreduzible Mengen (vgl. auch [3]). Ferner zeigt man durch eine einfache Überlegung:

Jede in einem komplexen Raum X analytische Menge A ist eindeutig darstellbar als unverkürzbare Vereinigung von in X analytischen und irreduziblen Mengen $A_\varkappa$. — Diese Tatsache werden wir im folgenden häufig benötigen.

3. Komplexe Räume, wie sie hier den Betrachtungen zugrunde liegen, haben im allgemeinen in verschiedenen Punkten nicht dieselbe Dimension; selbst die zusammenhängenden Komponenten können Punkte verschiedener Dimension besitzen. Man kann aber jeden komplexen Raum X „aufspalten" in komplexe Räume X^d, derart, daß X^d leer oder in jedem Punkt d-dimensional ist $(d = 0, 1, \ldots)$. Ist nämlich $x \in X$ ein beliebiger Punkt, so zerfällt X in x in endlich viele analytische Primkeime[10a]); wir nennen sie die zu $x \in X$ gehörenden Primkeime. Wir definieren nun als Raum $X^d (d = 0, 1, \ldots)$ die Menge aller derjenigen Punkte von X, zu denen ein Primkeim gehört, der d-dimensional ist. Man überlegt, daß X^d eine analytische Menge in X ist und mithin nach Satz 9 als komplexer Raum aufgefaßt werden darf. X^d ist ein rein

[10]) Für komplexe Räume im engeren Sinne von H. Cartan oder H. Behnke u. K. Stein ist dieser Satz falsch; man kann dann nur „in kanonischer Weise" jeder analytischen Menge einen komplexen Raum zuordnen (vgl. [2]).

[10a]) Ein analytischer Primkeim in einem Punkte x X ist ein Mengenkeim in x, der durch eine ~~in x~~ irreduzible analytische Menge repräsentiert werden kann (vgl. auch [3], S. 265). — Man beachte, daß der Raum X in jedem seiner Punkte x als analytische Menge „aufgefaßt" werden kann.

d-dimensionaler komplexer Raum. Ein Punkt $x \in X$ kann zu mehreren, aber höchstens endlich vielen Räumen X^d gehören. Die natürliche Abbildung von X^d in X ist eine holomorphe Abbildung.

Def. Ein komplexer Raum X heißt lokal-reindimensional, wenn die zu einem Punkt $x \in X$ gehörenden Primkeime sämtlich gleichdimensional sind.

Nach dem vorstehenden läßt sich jedem komplexen Raum X in natürlicher Weise ein lokal-reindimensionaler komplexer Raum zuordnen, nämlich der Raum $\bigcup_{d=0}^{\infty} X^d$. Ist X selbst lokal-reindimensional, so gehört jeder Punkt $x \in X$ genau einem Raum X^d an; die Räume X^d stellen in diesem Falle also eine Zerlegung von X dar.

Spezielle komplexe Räume sind die *komplexen Mannigfaltigkeiten*. Ein komplexer Raum X heißt eine komplexe Mannigfaltigkeit, wenn X nur uniformisierbare Punkte enthält und in jedem Punkt $x \in X$ irreduzibel ist. (X heißt irreduzibel in $x \in X$, wenn zu $x \in X$ genau ein Primkeim gehört.)

4. Zum Beweise des Hauptsatzes über Projektionen benötigen wir ein Fortsetzbarkeitskriterium für analytische Mengen.

Satz 10. Es sei N eine analytische Menge in einem komplexen Raum X; dieselbe sei in jedem ihrer Punkte höchstens l-dimensional. In $X - N$ sei eine rein d-dimensionale analytische Menge M gegeben; es gelte $l < d$. Dann ist die abgeschlossene Hülle $\overline{M}$ von M in X eine rein d-dimensionale analytische Menge in X.

Für den Fall, daß X ein Gebiet des C^n bzw. eine komplexe Mannigfaltigkeit ist, ist dieser Satz bekannt[11]); der Allgemeinfall läßt sich hieraus sofort wie folgt gewinnen: ist $x \in N$ ein Häufungspunkt von M, so sei $(U, \psi) \in \mathfrak{U}$ eine Karte mit $x \in U$. Dann ist $\psi(U)$ eine analytische Menge in einem Gebiete G eines C^n; weiter ist $\psi(U \cap N)$ eine höchstens l-dimensionale analytische Menge in G und $\psi(U \cap M)$ eine rein d-dimensionale analytische Menge in $G - \psi(U \cap N)$. Daher ist die abgeschlossene Hülle von $\psi(U \cap M)$ bezüglich G eine in G analytische, rein d-dimensionale Menge. Dann ist aber auch $\overline{M} \cap U$ eine rein d-dimensionale, analytische Menge in U.

§ 5. Ein Satz über den Rang eines Funktionensystems

1. Die Menge aller uniformisierbaren Punkte eines komplexen Raumes X werde im folgenden stets mit $\check{X}$ bezeichnet. $\check{X}$ ist offen und liegt dicht in X. Wir beweisen zunächst

Satz 11: Es sei X ein lokal-reindimensionaler komplexer Raum; es sei h eine meromorphe, nicht identisch verschwindende Funktion auf $\check{X}$. Ist B die Nullstellenmenge von h auf $\check{X}$, so ist die abgeschlossene Hülle $\overline{B}$ von B in X eine analytische Menge in X. Es gilt stets: $d_x(\overline{B}) = d_x(X) - 1$[12]).

[11]) Beweise siehe etwa [1], Exp. XIII, XIV sowie [3]. Ferner auch W. ROTHSTEIN: Zur Theorie der Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen, Math. Ann. **126**, 221—238 (1953).

[12]) Wir nennen eine Funktion h meromorph in einem uniformisierbaren Punkt $x \in X$, wenn die Beschränkung von h auf jede in x irreduzible Komponente von X im üblichen Sinne meromorph in den Ortsuniformisierenden dieser Komponente ist.

Beweis: Sei B nicht leer. Für jeden Punkt von $\bar{B}$, der zu $\check{X}$ gehört, ist die Behauptung des Satzes klar; es sei also x ein nichtuniformisierbarer Punkt von X, der zu $\bar{B}$ gehört. In einer Umgebung U des Punktes x können wir den Raum X auffassen als eine etwa rein n-dimensionale analytische Menge M in einem Gebiete G eines C^N mit x als Nullpunkt. Nach 1.9 gibt es eine Umgebung V des Nullpunktes des C^N und eine in V analytische Menge M^*, die höchstens $(n-2)$-dimensional ist und alle nichtuniformisierbaren Punkte von $M \cap V$ enthält. Jeder Punkt von $V \cap M - M^*$ ist ein uniformisierbarer Punkt von X; in $V \cap M - M^*$ ist also die Menge B nach Definition eine rein $(n-1)$-dimensionale Menge. Die abgeschlossene Hülle B' von $B \cap (V \cap M - M^*)$ ist alsdann nach Satz 10 eine rein $(n-1)$-dimensionale analytische Menge in V. Die Menge B' stimmt aber mit der abgeschlossenen Hülle $\bar{B}$ von $B \cap V$ überein, denn in beliebiger Nähe eines Punktes der rein $(n-1)$-dimensionalen Menge $B \cap V$ liegen, da M^* höchstens $(n-2)$-dimensional ist, Punkte von $B \cap (V \cap M - M^*)$. — Satz 11 ist bewiesen.

2. Ist $f_1, \ldots, f_s$ ein System von holomorphen Funktionen auf einem komplexen Raum X, so kann man in jedem Punkt $x \in \check{X}$ den *Rang* dieses Funktionensystems definieren: ist $\check{X}$ irreduzibel in x und n-dimensional, so wähle man ein System $t_1, \ldots, t_n$ von Ortsuniformisierenden in x und erkläre als Rang r des Systems $f_1, \ldots, f_s$ in x den Rang der Funktionalmatrix $\left(\frac{\partial f_\sigma}{\partial t_\nu}\right)$ $(\sigma = 1, \ldots, s;\ \nu = 1, \ldots, n)$ in x; diese Definition ist, wie man sofort überlegt, unabhängig von der Wahl der Ortsuniformisierenden. Zerfällt $\check{X}$ in x in k irreduzible Komponenten $X_\varkappa$ und ist jeweils $r_\varkappa$ der Rang des Systems in x, wenn man die Funktionen $f_1, \ldots, f_s$ auf $X_\varkappa$ beschränkt, so sei der *Rang* r der $f_1, \ldots, f_s$ in x das Minimum der $r_\varkappa$.

Satz 12: Es seien $f_1, \ldots, f_s$ endlich viele holomorphe Funktionen auf einem lokal-reindimensionalen komplexen Raum X; es sei $B(m)$ die Gesamtheit aller Punkte von $\check{X}$, in denen der Rang des Systems $f_1, \ldots, f_s$ höchstens gleich m ist. Dann ist die abgeschlossene Hülle $\bar{B}(m)$ von $B(m)$ bezüglich X eine analytische Menge in X.

Beweis: Die Menge $B(m)$ ist, wie leicht einzusehen, abgeschlossen in $\check{X}$. Weiter ist $B(m)$ in jedem Punkt $x^{(0)} \in B(m)$ analytisch. In einer Umgebung von $x^{(0)}$ kann man nämlich den Raum X auffassen als eine analytische Menge M, die in einem Gebiete G eines C^n liegt; die $f_1, \ldots, f_s$ sind dann holomorphe Funktionen auf M. Es seien $M_1, \ldots, M_k$ die in $x^{(0)}$ irreduziblen Komponenten von M. Betrachtet man die $f_1, \ldots, f_s$ jeweils als Funktionen auf $M_\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, und definiert man in der Umgebung von $x^{(0)}$ die Menge $B_\varkappa(m)$ als die Menge aller derjenigen Punkte von $M_\varkappa$, in denen der Rang der $f_1, \ldots, f_s$ höchstens gleich m ist, so ist jedes $B_\varkappa(m)$ sicher eine in $x^{(0)}$ analytische Menge. Ein Punkt $x \in M_\varkappa$ gehört nämlich genau dann zu $B_\varkappa(m)$, wenn sämtliche bezüglich irgendeines Systems von Ortsuniformisierenden von $M_\varkappa$ in x bildbaren Unterdeterminanten der Funktionalmatrix, die mindestens $(m+1)$ Zeilen haben, in x verschwinden. Nun gilt aber $B(m) = \bigcup_\varkappa B_\varkappa(m)$ in der Umgebung von $x^{(0)}$; daher ist $B(m)$ eine in $x^{(0)}$ analytische Menge.

Sei nun $x^{(0)}$ ein nichtuniformisierbarer Punkt von X, der Häufungspunkt von $B(m)$ ist. In der Umgebung von $x^{(0)}$ sei M etwa rein d-dimensional. Es sei $(S; z_1, \ldots, z_n)$ — wo $S: \{|z_1| < r_1, \ldots, |z_n| < r_n\}$ — ein ausgezeichnetes Koordinatensystem in $x^{(0)} \in C^n$ bezüglich M. Dann ist also $M \cap S$ eine Überlagerung des d-dimensionalen Polyzylinders $S^d: \{|z_1| < r_1, \ldots, |z_d| < r_d\}$, die höchstens über einer in S^d rein $(d-1)$-dimensionalen analytischen Menge D verzweigt ist (vgl. 1.3.). Bezeichnet Φ die Projektion von $M \cap S$ auf S^d, so können also in jedem Punkt von $\widetilde{M} = M \cap S - \Phi^{-1}(D)$ die Koordinaten $z_1, \ldots, z_d$ als Ortsuniformisierende gewählt werden; in allen diesen Punkten kann daher die Menge $B(m)$ dargestellt werden als Nullstellenmenge von endlich vielen Funktionen h_j, die aus den $f_1, \ldots, f_s$, die als Funktionen in den $z_1, \ldots, z_d$ aufzufassen sind, durch Differentiation nach den $z_1, \ldots, z_d$ nebst anschließender Determinantenbildung gewonnen werden. Wir werden nun sogleich unten zeigen: *Jede Funktion* $\frac{\partial f_\sigma}{\partial z_\delta}$, $\sigma = 1, \ldots, s$; $\delta = 1, \ldots, d$, *ist in jeden uniformisierbaren Punkt von* $\Phi^{-1}(D)$ *meromorph fortsetzbar.* Dann lassen sich auch die Funktionen h_j sämtlich meromorph in die uniformisierbaren Punkte von $\Phi^{-1}(D)$ fortsetzen; nach Satz 11 ist daher die bezüglich S gebildete abgeschlossene Hülle der Nullstellenmenge jeder dieser Funktionen h_j eine analytische Menge in S. Der Durchschnitt aller dieser Mengen stimmt mit der Menge $\overline{B(m) \cap \widetilde{M}}$ überein. Es ist denkbar, daß dieselbe noch nicht die ganze Menge $\overline{B}(m) \cap S$ ausmacht. Es könnte z. B. möglich sein, daß ein uniformisierbarer Punkt $\tilde{x} \in \Phi^{-1}(D)$ existiert, in dem auf einer der in $\tilde{x}$ irreduziblen Komponenten von M alle zu betrachtenden Funktionaldeterminanten mit mehr als m Zeilen verschwinden, ohne daß eine derselben in der Nähe von $\tilde{x}$ eine Nullstelle besitzt, die zu $\widetilde{M}$ gehört. In diesem Falle gehören jedoch sämtliche uniformisierbaren Punkte von gewissen irreduziblen Komponenten der Menge $\Phi^{-1}(D)$, die den Punkt $\tilde{x}$ enthalten, zu $B(m)$. Diese vollen Komponenten sind dann bei der Hüllenbildung von $B(m)$ der oben konstruierten Menge noch hinzuzufügen. Insgesamt ist also $\overline{B}(m) \cap S$ die Vereinigung dieser Komponenten mit der Menge $\overline{B(m) \cap \widetilde{M}}$ und mithin eine analytische Menge in $x^{(0)}$.

Um zu sehen, daß die Funktionen $\frac{\partial f_\sigma}{\partial z_\delta}$ in jeden uniformisierbaren Punkt von $\Phi^{-1}(D)$ meromorph fortsetzbar sind, sei $\tilde{x}$ irgendein uniformisierbarer Punkt von $\Phi^{-1}(D)$. Wir können annehmen, daß M irreduzibel in $\tilde{x}$ ist. Es seien $t_1, \ldots, t_d$ Ortsuniformisierende von M in $\tilde{x}$; weiter seien $z_\nu = u_\nu(t_1, \ldots, t_d)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ die zugehörigen holomorphen Funktionen. Wir betrachten insbesondere das Funktionensystem $z_1 = u_1(t_1, \ldots, t_d), \ldots, z_d = u_d(t_1, \ldots, t_d)$. Dasselbe ist in jedem Nichtverzweigungspunkt von $M \cap S$ umkehrbar, da dort auch $z_1, \ldots, z_d$ Ortsuniformisierende sind; also verschwindet die Determinante $\left|\frac{\partial z_\varkappa}{\partial t_\delta}\right|$ in diesen Punkten nicht. Bezeichnen wir mit $g_1(t_1, \ldots, t_d)$, $\ldots, g_s(t_1, \ldots, t_d)$ jeweils die Funktionen $f_1, \ldots, f_s$, wenn wir sie in der Umgebung von $\tilde{x}$ als holomorphe Funktionen in den $t_1, \ldots, t_d$ auffassen, so stehen die $g_1, \ldots, g_s$ und $u_1, \ldots, u_d$ mit den Funktionen $\frac{\partial f_\sigma}{\partial z_\delta}$ — letztere ebenfalls

in den Nichtverzweigungspunkten als Funktionen in den $t_1, \ldots, t_d$ aufgefaßt — in folgender Relation:

$$\frac{\partial g_\sigma}{\partial t_\delta} = \frac{\partial f_\sigma}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial t_\delta} + \cdots + \frac{\partial f_\sigma}{\partial z_d}\frac{\partial z_d}{\partial t_\delta}, \qquad \sigma = 1, \ldots, s;\ \delta = 1, \ldots, d.$$

Faßt man bei festem σ hier die Funktionen $\frac{\partial f_\sigma}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial f_\sigma}{\partial z_d}$ als Unbestimmte auf, so folgt, daß in allen Nichtverzweigungspunkten dieses Gleichungssystem umkehrbar ist, da dort die Determinante $\left|\frac{\partial z_\varkappa}{\partial t_\delta}\right|$ nicht verschwindet. Es gilt daher

$$\frac{\partial f_\sigma}{\partial z_\varkappa} = \frac{A_{\varkappa\sigma}}{\left|\frac{\partial z_\nu}{\partial t_\delta}\right|}, \qquad \sigma = 1, \ldots, s;\ \varkappa = 1, \ldots, d,$$

mit in der Umgebung von $\tilde{x} \in M \cap S$ in den $t_1, \ldots, t_d$ holomorphen Funktionen $A_{\varkappa\sigma}$. Daraus folgt aber, daß die Funktionen $\frac{\partial f_\tau}{\partial z_\iota}$ meromorph in den Punkt $\tilde{x} \in M$ fortsetzbar sind. — Satz 12 ist bewiesen.

Jedes System von endlich vielen auf einem komplexen Raum holomorphen Funktionen besitzt einen Maximalrang. In Satz 12 ist daher insbesondere enthalten:

Sind $f_1, \ldots, f_s$ endlich viele holomorphe Funktionen auf einem lokal-reindimensionalen komplexen Raum X, so ist die abgeschlossene Hülle aller derjenigen Punkte von $\mathring{X}$, in denen dieses System nicht vom Maximalrang ist, eine analytische Menge in X.

§ 6. Sätze über Projektionen analytischer Mengen

1. Im topologischen Produkt $X \times Y$ zweier komplexer Räume X, Y läßt sich in natürlicher Weise eine komplex-analytische Struktur einführen; im folgenden denken wir uns $X \times Y$ stets mit dieser Struktur versehen und nennen $X \times Y$ das *kartesische Produkt* von X und Y. Wir schreiben oft $X \times Y = Z$ und entsprechend für die Punkte: $(x, y) = z$.

Ist X im Punkte $x \in X$ von der Dimension m und Y im Punkte $y \in Y$ von der Dimension n, so ist Z im Punkte (x, y) von der Dimension $m + n$; der Raum Z ist lokal-reindimensional, wenn X und Y lokal-reindimensional sind.

Die komplex-analytische Struktur in Z ist so beschaffen, daß die *Projektion* $p: (x, y) \to x$ von Z auf X bzw. $q: (x, y) \to y$ von Z auf Y jeweils eine holomorphe Abbildung ist.

Ist A eine analytische Menge in Z, so nennen wir auch die Beschränkungen von p und q auf A Projektionen; genauer: Projektion von A in X bzw. A in Y. Die Mengen $p(A)$ und $q(A)$ heißen Projektionsmengen, oder, wenn Mißverständnisse ausgeschlossen sind, wieder die Projektionen von A in X bzw. Y.

In diesem Paragraphen soll untersucht werden, wann die Projektionen $p(A)$ oder $q(A)$ einer in Z analytischen Menge A analytische Mengen in X oder Y sind. Wir werden in unseren Überlegungen durchweg die Projektion q bzw.

die Menge $q(A)$ betrachten; die Resultate gelten dann natürlich mutatis mutandis auch für p bzw. $p(A)$.

Die Menge $q(A)$ ist im allgemeinen *keine* analytische Menge in Y; selbst dann nicht, wenn X und Y beide komplexe Mannigfaltigkeiten sind und A singularitätenfrei in $X \times Y$ liegt. Es seien z. B. X bzw. Y die offenen Einheitspolyzylinder eines x_1, x_2- bzw. y_1, y_2-Raumes; in $X \times Y$ werde die durch die Gleichungen

$$y_1 - x_1 = 0, \qquad y_2 - x_1 x_2 = 0$$

definierte analytische Menge A betrachtet; A besitzt nur gewöhnliche Punkte. Die Menge $q(A)$ besteht aus allen Punkten $(y_1, y_2) \in Y$ mit $|y_2| < |y_1| < 1$ sowie aus dem Nullpunkt. Diese Menge ist offenbar im Punkte $(0, 0)$ nicht analytisch.

2. Wir beweisen in diesem Abschnitt einen Satz, der für die weiteren Überlegungen grundlegend ist. Zunächst werde noch eine Bezeichnung eingeführt:

Ist A eine analytische Menge in $Z = X \times Y$, so ist für jeden Punkt $z \in A$ die Menge $F = q^{-1}(q(z))$ eine analytische Menge in Z, die den Punkt z enthält; F heiße die *Faser von q bezüglich A* (über $y = q(z)$). Jede Faser F kann auch als analytische Menge in X aufgefaßt werden; wir schreiben dann auch $F = F(y)$.

Es gilt nun

Satz 13: Es sei A eine rein s-dimensionale analytische Menge im kartesischen Produkt $S^m \times S^n$ zweier Polyzylinder S^m: $\{|x_1| < a_1, \ldots, |x_m| < a_m\}$, S^n: $\{|y_1| < b_1, \ldots, |y_n| < b_n\}$. Die Fasern von q bezüglich A seien über jedem Punkt von $q(A)$ rein d-dimensional; es gebe einen relativ-kompakt in S^m liegenden Polyzylinder $'S^m$, derart, daß jede Faser von q, aufgefaßt als analytische Menge in S^m, mit $'S^m$ Punkte gemeinsam hat. Dann ist die Projektion $q(A)$ von A in S^n eine rein $(s-d)$-dimensionale analytische Menge in S^n.

Aus Darstellungsgründen ist es zweckmäßig, dem Beweise dieses Satzes zwei Hilfssätze voranzuschicken.

Hilfssatz 1: Es sei A eine rein s-dimensionale analytische Menge im kartesischen Produkt $S^m \times S^n$ zweier Polyzylinder S^m: $\{|x_1| < a_1, \ldots, |x_m| < a_m\}$, S^n: $\{|y_1| < b_1, \ldots, |y_n| < b_n\}$; die Menge $p(A)$ liege relativ-kompakt in S^m. Dann ist $q(A)$ eine rein s-dimensionale analytische Menge in S^n.

Beweis: Die Menge $q(A)$ ist, wie unmittelbar ersichtlich, abgeschlossen in S^n; zu zeigen bleibt also, daß $q(A)$ lokal-analytisch ist. Die Faser F besteht für jedes $y' = (y'_1, \ldots, y'_n) \in q(A)$ aus endlich vielen Punkten; denn eine nicht nulldimensionale Komponente von F müßte nach 1.6. Punkte in beliebiger Nähe des Randes von S^m haben, was nicht sein kann, da $p(A)$ relativ-kompakt in S^m liegt. Seien etwa $z^{(\varrho)} = (x^{(\varrho)}, y')$, $\varrho = 1, \ldots, r$, die endlich vielen Punkte von F über y'. Wir betrachten A zunächst in der Umgebung von $z^{(1)}$. Die m-dimensionale Ebene $\{y_1 = y'_1, \ldots, y_n = y'_n\}$ schneidet A in der Nähe von $z^{(1)}$ nur in $z^{(1)}$. Nach dem Projektionssatz aus § 1 gibt es dann eine in $S^m \times S^n$ enthaltene Polyzylinderumgebung $S_1^m \times S_1^n$ des Punktes $z^{(1)}$, derart, daß kein Punkt $z^{(\varrho)}$, $\varrho = 2, \ldots, r$, in $S_1^m \times S_1^n$ liegt und die Projektion N_1 von $A \cap (S_1^m \times S_1^n)$ in S_1^n eine analytische Menge in S_1^n ist. Die Menge N_1 ist rein s-dimensional in S_1. Ist nämlich $d_{y'}(N_1) = d$, wo $y' \in N_1$ ein beliebiger Punkt ist, so gibt es ausgezeichnete Koordinaten $\eta_1, \ldots, \eta_n$ in y', derart, daß die $(n-d)$-dimensionale analytische

Ebene $\{\eta_1 = \cdots = \eta_d = 0\}$ die Menge N_1 in der Nähe von y' nur in y' schneidet. Nach dem Einbettungssatz gibt es daher einen Polyzylinder V^d: $\{|\eta_1| < c_1, \ldots, |\eta_d| < c_d\}$, derart, daß über jedem Punkt von V^d mindestens ein Punkt von N_1 liegt. Dann liegt aber auch über jedem Punkt von V^d mindestens ein Punkt von $A \cap (S_1^m \times S_1^n)$, woraus folgt: $d \leqq s$.

Um $d \geqq s$ zu beweisen, fassen wir $\{\eta_1 = \cdots = \eta_d = 0\}$ als $(m + n - d)$-dimensionale analytische Ebene in $S_1^m \times S_1^n$ auf. Diese Ebene läuft durch $z^{(1)}$ und hat in der Nähe von $z^{(1)}$ mit A nur den Punkt $z^{(1)}$ gemeinsam; denn für jeden in hinreichender Nähe von $z^{(1)}$ auf ihr liegenden Punkt $\tilde{z} = (\tilde{x}, \tilde{y}) \in A$ gilt notwendig $\tilde{y} = y'$, woraus $\tilde{z} = z^{(1)}$ folgt, da $z^{(1)}$ der einzige Punkt von $A \cap (S_1^m \times S_1^n)$ ist, der über y' liegt. Da also die $(m + n - d)$-dimensionale analytische Ebene $\{\eta_1 = \cdots = \eta_d = 0\}$ die Menge A in der Nähe von $z^{(1)}$ nur in $z^{(1)}$ schneidet, so folgt $d \geqq s$. Damit ist gezeigt: $d_{y'}(N_1) = s$.

Die soeben für den Punkt $z^{(1)}$ durchgeführten Überlegungen lassen sich für jeden der Punkte $z^{(\varrho)}$ $(\varrho = 2, \ldots, r)$ wiederholen; man erhält jeweils einen Polyzylinder $S_\varrho^m \times S_\varrho^n$ um $z^{(\varrho)}$, derart, daß die Projektion N_ϱ von $A \cap (S_\varrho^m \times S_\varrho^n)$ in S_ϱ^n eine rein s-dimensionale analytische Menge in S_ϱ^n ist. Bezeichnet nun S_0^n eine in sämtlichen S_ϱ^n enthaltene Polyzylinderumgebung um y', so ist $\left(\bigcup_{\varrho=1}^{r} N_\varrho\right) \cap S_0^n$ eine rein s-dimensionale analytische Menge in S_0^n. Es gilt aber $q(A) \cap S_0^n = \left(\bigcup_{\varrho=1}^{r} N_\varrho\right) \cap S_0^n$, womit Hilfssatz 1 bewiesen ist.

Hilfssatz 2: Es sei A eine rein s-dimensionale analytische Menge im kartesischen Produkt $S^m \times S^n$ zweier Polyzylinder S^m: $\{|x_1| < a_1, \ldots, |x_m| < a_m\}$, S^n: $\{|y_1| < b_1, \ldots, |y_n| < b_n\}$. Die Fasern von q bezüglich A seien stets mit S^m identisch. Dann ist $q(A)$ eine rein $(s - m)$-dimensionale analytische Menge in S^n.

Beweis: Die Menge $N = A \cap \{x_1 = \cdots = x_m = 0\}$ ist eine analytische Menge in $S^m \times S^n$. Die N jeweils beschreibenden Gleichungen enthalten nicht mehr die Veränderlichen $x_1, \ldots, x_m$; daher kann N auch als eine analytische Menge im Polyzylinder S^n aufgefaßt werden. Bei dieser Deutung stimmt N aber, wie man sofort sieht, mit der Menge $q(A)$ überein; daher ist $q(A)$ eine analytische Menge in S^n.

Um zu zeigen, daß $q(A)$ rein $(s - m)$-dimensional ist, betrachten wir zunächst die Menge $N_1 = A \cap \{x_1 = 0\}$. Keine der in $S^m \times S^n$ irreduziblen Komponenten von A ist in der Ebene $\{x_1 = 0\}$ enthalten; denn wäre das etwa für eine Komponente A_1 von A der Fall, so sei $(0, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}; y^{(0)}) \in A_1$ ein gewöhnlicher Punkt von A. Die Faser über $y^{(0)}$ stimmt dann nicht mit S^m überein, denn die Punkte $(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)})$, wo x_1 genügend nahe bei 0 liegt, gehören nicht zu derselben. Nach 1.6 ist also N_1 eine rein $(s - 1)$-dimensionale analytische Menge in $S^m \times S^n$, und die Fasern von q bezüglich N_1 stimmen stets mit der in S^m $(m - 1)$-dimensionalen analytischen Ebene $\{x_1 = 0\}$ überein.

Bilden wir weiter die Menge $N_2 = N_1 \cap \{x_2 = 0\}$, so folgt mittels desselben Schlusses wie eben, daß N_2 eine rein $(s - 2)$-dimensionale analytische Menge in $S^m \times S^n$ ist, deren Fasern stets mit der in S^m $(m - 2)$-dimensionalen analytischen Ebene $\{x_1 = x_2 = 0\}$ übereinstimmen.

Nach m Schritten gelangt man so zur Menge N selbst; da sich bei jedem Schritt die Dimension um 1 erniedrigt, ist also in der Tat N und mithin auch $q(A)$ eine rein $(s-m)$-dimensionale analytische Menge, w.z.b.w.

Nunmehr beweisen wir Satz 13. Die Menge $q(A)$ ist abgeschlossen in S^n. Ist nämlich $y^{(\nu)} \in q(A)$ eine Punktfolge mit einem Konvergenzpunkt $y' \in S^n$, so können Punkte $x^{(\nu)} \in {}'S^m$ jeweils so gewählt werden, daß gilt $(x^{(\nu)}, y^{(\nu)}) \in A$. Da ${}'S^m$ relativ-kompakt in S^m liegt, haben die $x^{(\nu)}$ einen Häufungspunkt x' in S^m; alsdann ist $(x', y') \in S^m \times S^n$ ein Häufungspunkt der Folge $(x^{(\nu)}, y^{(\nu)})$. Da A abgeschlossen in $S^m \times S^n$ ist, folgt $(x', y') \in A$. Dann gilt aber $y' \in q(A)$; d. h. $q(A)$ ist abgeschlossen in S^n.

Um zu zeigen, daß $q(A)$ eine lokal-analytische Menge in S^n ist, sei $y' = (y'_1, \ldots, y'_n)$ ein beliebiger Punkt aus $q(A)$ und $F(y')$ die über y' in S^m liegende Faser. Wir behaupten zunächst, daß sich jedem Punkt $\tilde{z} = (\tilde{x}, y')$ mit $\tilde{x} \in F(y')$ eine in $S^m \times S^n$ enthaltene Produktumgebung $V^m \times V^n$ von $\tilde{z}$ zuordnen läßt, derart, daß die Projektion von $A \cap (V^m \times V^n)$ in V^n eine rein $(s-d)$-dimensionale analytische Menge in V^n ist. Zu dem Zwecke seien $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ Koordinaten in V^m in einer Umgebung von $\tilde{x}$, derart, daß die $(m-d)$-dimensionale analytische Ebene $\{\zeta_1 = \cdots = \zeta_d = 0\}$ die Faser $F(y')$, die nach Voraussetzung rein d-dimensional ist, in der Nähe von $\tilde{x}$ nur in $\tilde{x}$ schneidet (es gelte $\tilde{x} = (\zeta_1, \ldots, \zeta_m) = (0, \ldots, 0)$). Dann schneidet die ebenfalls $(m-d)$-dimensionale analytische Ebene $\{\zeta_1 = \cdots = \zeta_d = 0,\ y_1 = y'_1, \ldots, y_n = y'_n\}$ die Menge A in der Nähe von $\tilde{z}$ nur in $\tilde{z}$. Man kann daher positive reelle Zahlen e_δ, $\delta = d+1, \ldots, m$ finden, so daß die Mengen

$$A \cap \{\zeta_1 = \cdots = \zeta_d = 0, |\zeta_{d+1}| \leqq e_{d+1}, \ldots, |\zeta_\delta| = e_\delta, \ldots, |\zeta_m| \leqq e_m, y_1 = y'_1, \ldots, y_n = y'_n\}$$

für $\delta = d+1, \ldots, m$ sämtlich leer sind. Da A abgeschlossen in $S^m \times S^n$ ist, gibt es weiter positive reelle Zahlen $e_1, \ldots, e_d, f_1, \ldots, f_n$, so daß auch noch die Mengen

$$A \cap \{|\zeta_1| \leqq e_1, \ldots, |\zeta_d| \leqq e_d,\ |\zeta_{d+1}| \leqq e_{d+1}, \ldots, |\zeta_\delta| = e_\delta, \ldots, |\zeta_m| \leqq e_m,$$
$$|y_1 - y'_1| \leqq f_1, \ldots, |y_n - y'_n| \leqq f_n\}$$

leer sind, $\delta = d+1, \ldots, n$. Setzt man nun:

$$V^m: \{|\zeta_1| < e_1, \ldots, |\zeta_m| < e_m\},\quad V^n: \{|y_1 - y'_1| < f_1, \ldots, |y_n - y'_n| < f_n\}$$

und denkt man sich die e_μ und f_ν noch so klein gewählt, daß $V^m \times V^n$ in $S^m \times S^n$ enthalten ist, so liegt also die Projektion von $A \cap (V^m \times V^n)$ in den $(m-d)$-dimensionalen Polyzylinder V^{m-d}: $\{|\zeta_{d+1}| < e_{d+1}, \ldots, |\zeta_m| < e_m\}$ relativ-kompakt in V^{m-d}. Nach Hilfssatz 1 ist folglich die Projektion ${}'A$ von $A \cap (V^m \times V^n)$ in den Polyzylinder

$$V^d \times V^n: \{|\zeta_1| < e_1, \ldots, |\zeta_d| < e_d\} \times \{|y_1 - y'_1| < f_1, \ldots, |y_n - y'_n| < f_n\}$$

eine in $V^d \times V^n$ rein s-dimensionale analytische Menge.

Da die Projektion von $A \cap (V^m \times V^n)$ in V^{m-d} relativ-kompakt in V^{m-d} liegt, so liegt auch die Projektion jeder der rein d-dimensionalen analytischen Mengen $F(y) \cap V^m$, wo $F(y)$ die Faser über $y \in q(A \cap (V^m \times V^n))$ ist, in V^{m-d} relativ-kompakt in V^{m-d}; daher sind nach Hilfssatz 1 die Projektionen ${}'F(y)$ von $F(y)$ in V^d stets rein d-dimensionale analytische Mengen in V^d, die alsdann

notwendig mit V^d übereinstimmen. Da offensichtlich die Menge $'F(y)$ jeweils die Faser von q bezüglich $'A$ über y ist, so läßt sich auf $'A$ Hilfssatz 2 anwenden. Es folgt, daß die Projektion $''A$ von $'A$ in V^n eine in V^n rein $(s-d)$-dimensionale analytische Menge ist. Da gilt: $''A = q(A \cap (V^m \times V^n))$, so ist also $V^m \times V^n$ eine Produktumgebung der behaupteten Art.

Wir denken uns nun jedem Punkt $(\tilde{x}, y')$ mit $\tilde{x} \in F(y') \cap '\overline{S}^m$ eine solche Produktumgebung $V^m \times V^n$ zugeordnet (mit $'\overline{S}^m$ sei die abgeschlossene Hülle von $'S^m$ bezüglich S^m bezeichnet). Da $'\overline{S}^m$ kompakt in S^m liegt, kann man auf Grund des Heine-Borelschen Satzes endlich viele solche Umgebungen $V^m \times V^n$ — wir bezeichnen sie mit $V_1^m \times V_1^n, \ldots, V_t^m \times V_t^n$ — finden, so daß die Menge $\bigcup_{\tau=1}^{t} V_\tau^m$ eine offene Umgebung von $F(y') \cap '\overline{S}^m$ ist. Da nun jeweils die Mengen $q(A \cap (V_\tau^m \times V_\tau^n))$ rein $(s-d)$-dimensionale analytische Mengen in V_τ^n sind, so ist auch, wenn V_*^n einen in allen V_τ^n enthaltenen Polyzylinder um y' bezeichnet, die Menge $N = \bigcup_{\tau=1}^{t} q(A \cap (V_\tau^m \times V_\tau^n)) \cap V_*^n$ eine rein $(s-d)$-dimensionale analytische Menge in V_*^n.

Die Menge N ist nach Konstruktion in $q(A) \cap V_*^n$ enthalten; zeigen wir noch, daß bei hinreichend kleiner Wahl von V_*^n beide Mengen übereinstimmen, so ist offenbar Satz 13 bewiesen. Angenommen, man könnte den Polyzylinder V_*^n nicht so wählen. Dann gäbe es eine gegen y' konvergierende Folge $y^{(\nu)} \in q(A)$, derart, daß kein $y^{(\nu)}$ zu $\bigcup_{\tau=1}^{t} q(A \cap (V_\tau^m \times V_\tau^n))$ gehört. Zu jedem solchen $y^{(\nu)}$ gibt es nach Voraussetzung ein $x^{(\nu)} \in 'S^m$, so daß gilt: $(x^{(\nu)}, y^{(\nu)}) \in A$. Da $'S^m$ relativ-kompakt in S^m liegt, haben die $x^{(\nu)}$ einen Häufungspunkt x' in $'\overline{S}^m$, es gilt $(x', y') \in A$, also $x' \in F(y') \cap '\overline{S}^m$. Es gibt nun unendlich viele Punkte $x^{(\nu)}$, die in der Umgebung $\bigcup_{\tau=1}^{t} V_\tau^m$ von $F(y') \cap '\overline{S}^m$ liegen, darunter sind auch solche $x^{(\nu)}$, deren zugehörige $y^{(\nu)}$ in einem V_τ^n liegen. Jedes solche $y^{(\nu)}$ liegt dann aber in $\bigcup_{\tau=1}^{t} q(A \cap (V_\tau^m \times V_\tau^n))$ im Widerspruch zur Annahme. — Satz 13 ist bewiesen.

3. Wir erweitern in diesem Abschnitt Satz 13 auf komplexe Räume. Vorbereitend zeigen wir:

Satz 14: Es sei A eine rein s-dimensionale analytische Menge im kartesischen Produkt $X \times Y$ zweier komplexer Räume X, Y; die Fasern von q bezüglich A seien stets rein d-dimensional. Dann gibt es zu jedem Punkt $(x, y) \in A$ Umgebungen U und V der Punkte x und y, derart, daß die Projektion von $A \cap (U \times V)$ in V eine rein $(s-d)$-dimensionale analytische Menge in V ist.

Beweis: Es bezeichne F die Faser von q bezüglich A über $y \in q(A)$; dann gilt $x \in F$. Es seien (U', ψ) und (V', φ) Karten auf X und Y mit $x \in U'$, $y \in V'$, die jeweils zu den die komplex-analytischen Strukturen auf X und Y definierenden Überdeckungen gehören. Dann ist $(U' \times V', \psi \times \varphi)$ eine die Struktur auf $X \times Y$ definierende Karte, und der Punkt (x, y) liegt in $U' \times V'$. Die Mengen $\psi(U')$ bzw. $\varphi(V')$ sind analytische Mengen in Gebieten G_1 bzw. G_2 eines C^{N_1} bzw. C^{N_2}; wir dürfen $\psi(x)$ und $\varphi(y)$ jeweils als Nullpunkt voraus-

setzen. Nach Satz 6 ist $\psi(F)$ bzw. $\psi\times\varphi(A)$ eine rein d- bzw. s-dimensionale analytische Menge in G_1 bzw. $G_1\times G_2$. Es seien nun $x_1,\ldots,x_{N_1}$ Koordinaten im C^{N_1}, derart, daß die (N_1-d)-dimensionale analytische Ebene $\{x_1=\cdots=x_d=0\}$ die Menge $\psi(F)$ in der Nähe von $\psi(x)=O$ nur in O selbst schneidet. Sind dann $y_1,\ldots,y_{N_2}$ Koordinaten im C^{N_2}, so schneidet die (N_1-d)-dimensionale analytische Ebene $\{x_1=\cdots=x_d=y_1=\cdots=y_{N_2}=0\}$ die Menge $\psi\times\varphi(A)$ in der Nähe von $(O,O)\in C^{N_1}\times C^{N_2}$ nur im Punkte (O,O). Nach dem Einbettungssatz gibt es also zwei Polyzylinder

$$S^{N_1}\colon\{|x_1|<a_1,\ldots,|x_{N_1}|<a_{N_1}\},\quad \tilde S^{N_2}\colon\{|y_1|<\tilde b_1,\ldots,|y_{N_2}|<\tilde b_{N_2}\}$$

mit $S^{N_1}\times\tilde S^{N_2}\subset G_1\times G_2$, derart, daß in $S^{N_1}\times\tilde S^{N_2}$ die Menge $\psi\times\varphi(A)$ einbettbar ist in eine analytische Menge $'A$, die dort durch Gleichungen

$$\omega_\delta(x_\delta;x_1,\ldots,x_d,y_1,\ldots,y_{N_2})\equiv x_\delta^{k_\delta}+\sum_{\varkappa=0}^{k_\delta-1}A^{(\delta)}_{k_\delta-\varkappa}(x_1,\ldots,x_d,y_1,\ldots,y_{N_2})\,x_\delta^{\varkappa}=0$$
$$(\delta=d+1,\ldots,N_1)$$

dargestellt wird; dabei sind die $A^{(\delta)}_{k_\delta-\varkappa}$ in $\{|x_1|<a_1,\ldots,|x_d|<a_d\}\times\tilde S^{N_2}$ holomorphe Funktionen, und es gilt stets: $A^{(\delta)}_{k_\delta-\varkappa}(0,\ldots,0)=0$. (Die Zusatzfunktionen σ_ϱ interessieren hier nicht.)

Ist nun $'S^{N_1}$ irgendeine relativ-kompakt in S^{N_1} liegende Polyzylinderumgebung von $O\in C^{N_1}$, so behaupten wir, daß es einen in $\tilde S^{N_2}$ enthaltenen Polyzylinder $S^{N_2}\colon\{|y_1|<b_1,\ldots,|y_{N_2}|<b_{N_2}\}$ gibt, derart, daß jede Faser von $\psi\times\varphi(A)\cap(S^{N_1}\times S^{N_2})$ über einem beliebigen Punkt von $q(\psi\times\varphi(A))\cap S^{N_2}$ in den Polyzylinder $'S^{N_1}$ eindringt (mit q bezeichnen wir jetzt vorübergehend die Projektion in S^{N_2}). Wäre das nämlich nicht der Fall, so gäbe es eine gegen $\varphi(y)=O$ konvergierende Punktfolge $y^{(\nu)}=(y_1^{(\nu)},\ldots,y_{N_2}^{(\nu)})\in q(\psi\times\varphi(A))\cap\tilde S^{N_2}$, derart, daß jeweils die Faser F_ν über $y^{(\nu)}$ nicht in $'S^{N_1}$ eindringt. Die Faser F_ν ist in der durch die Gleichungen

$$\omega_\delta(x_\delta;x_1,\ldots,x_d,y_1^{(\nu)},\ldots,y_{N_2}^{(\nu)})=0\qquad(\delta=d+1,\ldots,N_1)$$

in S^{N_1} definierten analytischen Menge F_ν^* enthalten; da sowohl F_ν als auch F_ν^* rein d-dimensionale analytische Mengen sind, so stimmt F_ν nach 1.5. mit gewissen der in S^{N_1} irreduziblen Komponenten von F_ν^* überein. Jede dieser Komponenten besitzt nun, wie sich aus 1.2. f) ergibt, über jedem Punkt $(x_1,\ldots,x_d)$, der hinreichend nahe bei $(0,\ldots,0)$ liegt, Punkte. Wegen $A^{(\delta)}_{k_\delta-\varkappa}(0,\ldots,0)=0$ hat sogar jede Komponente von F_ν^* in beliebiger Nähe des Nullpunktes von C^{N_1} Punkte, wenn die Tupel $(y_1^{(\nu)},\ldots,y_{N_2}^{(\nu)})$ und $(x_1,\ldots,x_d)$ nur genügend nahe bei den zugehörigen Nulltupeln gewählt werden. Das bedeutet aber, daß bei hinreichend großem Index ν die Fasern F_ν doch in den Polyzylinder $'S^N$ eindringen im Widerspruch zur Annahme.

Wir können mithin dem Punkt $(\psi(x),\varphi(y))=(O,O)\in C^{N_1}\times C^{N_2}$ eine Polyzylinderumgebung $S^{N_1}\times S^{N_2}$ zuordnen, so daß jede Faser von $\psi\times\varphi(A)\cap\cap(S^{N_1}\times S^{N_2})$ in einen fest vorgegebenen, relativ-kompakt in S^{N_1} liegenden Polyzylinder $'S^{N_1}$ eindringt. Damit sind aber die Voraussetzungen von Satz 13

erfüllt, die Projektion $q(\psi \times \varphi(A))$ von $\psi \times \varphi(A) \cap (S^{N_1} \times S^{N_2})$ in den Polyzylinder S^{N_2} ist daher eine rein $(s - d)$-dimensionale analytische Menge in S^{N_2}.

Alsdann haben aber die Umgebungen $U = \psi^{-1}(S^{N_1} \cap \psi(U'))$, $V = \varphi^{-1}(S^{N_2} \cap \varphi(V'))$ der Punkte $x \in X$, $y \in Y$ die im Satze behauptete Eigenschaft; denn die Projektion von $A \cap (U \times V)$ in V stimmt mit der Menge $\varphi^{-1}[q(\psi \times \varphi(A))]$ überein.

Aus Satz 14 folgt jetzt leicht:

Satz 15: Es sei A eine rein s-dimensionale analytische Menge im kartesischen Produkt $X \times Y$ zweier komplexer Räume X, Y. Die Fasern von q bezüglich A seien über jedem Punkt von $q(A)$ rein d-dimensional; es gebe weiter zu jedem $y \in q(A)$ eine Umgebung $W(y)$ und eine relativ-kompakt in X liegende Menge X_y, so daß die Fasern von q, aufgefaßt als analytische Mengen in X, über den Punkten von $q(A) \cap W(y)$ stets Punkte mit X_y gemeinsam haben. Dann ist $q(A)$ eine lokalanalytische, rein $(s-d)$-dimensionale Menge in Y.

In der Tat! Man ordne bei festem $y \in q(A)$ jedem Punkt $x \in F \cap \bar{X}_y$, wo F die Faser von q bezüglich A über y bezeichnet, eine Umgebung $U \times V$ im Sinne von Satz 14 zu; da $\bar{X}_y$ kompakt in X liegt, kann man endlich viele Umgebungen $U_\tau \times V_\tau$, $\tau = 1, \ldots, t$, dieser Art finden, derart, daß die Menge $\bigcup_{\tau=1}^{t} U_\tau$ eine Umgebung von $\bar{X}_y$ ist. Wählt man nun eine in sämtlichen V_τ und in $W(y)$ enthaltene Umgebung $V_*(y)$, so schließt man analog wie im Beweise von Satz 13, da nach Voraussetzung jede Faser von q über einem Punkt von $q(A) \cap W(y)$ Punkte mit X_y gemeinsam hat, daß die Menge $q(A) \cap V_*(y)$ mit der Vereinigung der endlich vielen Projektionen der Mengen $A \cap (U_\tau \times V_*(y))$ in $V_*(y)$ übereinstimmt, wenn $V_*(y)$ genügend klein gewählt ist. Da jede dieser Mengen eine rein $(s-d)$-dimensionale analytische Menge in $V_*(y)$ ist, ist also auch $q(A) \cap V_*(y)$ eine Menge mit dieser Eigenschaft. — Satz 15 ist bewiesen.

§ 7. Der Begriff des Ranges einer Projektion. Der Hauptsatz über Projektionen

1. Wie in § 6 sei A eine analytische Menge im kartesischen Produkt $X \times Y$ zweier komplexer Räume X, Y und q die Projektion von A in Y.

Unter dem *lokalen Rang $r(z)$ der Projektion q* bezüglich A im Punkte $z \in A$ verstehen wir die natürliche Zahl $s(z) - d(z)$; dabei sei $s(z)$ die Dimension von A in z und $d(z)$ die Dimension der Faser $q^{-1}(q(z))$ in z.

Für jede irreduzible Komponente A_ι von A existiert $r^{(\iota)} = \sup_{z \in A_\iota} r(z)$; $r^{(\iota)}$ heißt der *globale Rang* von q auf A_ι. Stimmen alle $r^{(\iota)}$ überein, so heißt q eine Projektion vom Range $r = r^{(\iota)}$ schlechthin.

Offenbar haben wir in § 6 stets die Voraussetzung gemacht, daß der lokale Rang von q in allen Punkten von A derselbe ist. Die Dimension der Menge $q(A)$ stimmte dort stets mit diesem lokalen Rang überein.

Wir beweisen zunächst:

Satz 16: Ist A eine rein-dimensionale analytische Menge in der Umgebung eines jeden Punktes $z \in A$, so ist der lokale Rang $r(z)$ der Projektion q eine nach

unten halbstetige Funktion. Es gibt sogar zu jedem $z \in A$ eine Umgebung U, so daß für jedes $\tilde{z} \in U \cap A$ gilt: $r(\tilde{z}) \geqq r(z)$[13]).

Beweis: Wir wählen zunächst eine Umgebung U von z so, daß A in U rein s-dimensional ist. Wenn wir zeigen, daß U noch so gewählt werden kann, daß für jedes $\tilde{z} \in U \cap A$ gilt: $d(\tilde{z}) \leqq d(z)$, so ist der Satz bewiesen, da in U gilt: $r(\tilde{z}) = s - d(\tilde{z})$.

Angenommen, U könnte für einen Punkt $z \in A$ nicht so gewählt werden. Dann gäbe es eine gegen z konvergierende Folge $z^{(n)} \in U \cap A$, so daß stets gilt: $d(z^{(n)}) > d(z)$, dabei sei U irgendeine hinreichend kleine Umgebung von z. Es seien F und F_n in U irreduzible Komponenten der Fasern $q^{-1}(q(z))$ und $q^{-1}(q(z^{(n)}))$, so daß gilt: $z \in F$, $z^{(n)} \in F_n$. Wir dürfen annehmen, daß alle Mengen F_n von derselben Dimension $d > d(z)$ sind. Die Vereinigung M sämtlicher Mengen F_n ist eine analytische Menge in $U - F$; denn zu jedem Punkt $\tilde{z} \in U - F$ kann man offenbar eine Umgebung $V \subset U - F$ finden, so daß nur endlich viele F_n in V eindringen. M ist rein d-dimensional. Da F rein-dimensional von der Dimension $d(z)$ ist und $d(z)$ kleiner als d ist, so folgt aus Satz 10, daß die abgeschlossene Hülle $\overline{M}$ von M in U eine analytische Menge in U ist. Das ist jedoch nicht möglich, denn $\overline{M}$ müßte in beliebiger Nähe von z stets aus abzählbar unendlich vielen irreduziblen Komponenten bestehen, was bekanntlich nicht sein kann. Es gibt mithin ein U von der verlangten Art; Satz 16 ist bewiesen.

2. Ist m eine natürliche Zahl, so sei $A(m)$ die Menge aller derjenigen Punkte $z \in A$, in denen der lokale Rang von q höchstens gleich m ist:

$$A(m) = \{z; z \in A, r(z) \leqq m\}.$$

Es gilt:

Satz 17: Ist A eine analytische Menge im kartesischen Produkt $X \times Y$ zweier komplexer Räume, die in der Umgebung eines jeden Punktes $z \in A$ reindimensional ist, so ist für jede natürliche Zahl m die Menge $A(m)$ eine analytische Menge in $X \times Y$.

Beweis: Die Menge $A(m)$ ist abgeschlossen in $X \times Y$. Ist nämlich $z \in X \times Y$ ein Konvergenzpunkt einer Folge $z^{(n)} \in A(m)$, so gilt sicher $z \in A$, da A abgeschlossen ist. Da A in der Umgebung von z rein-dimensional ist, folgt aus Satz 16, daß für Punkte $\tilde{z} \in A$, die hinreichend nahe bei z liegen, gilt: $r(\tilde{z}) \geqq r(z)$. Also gilt auch für genügend große n: $r(z) \leqq r(z^{(n)}) \leqq m$, d. h. $z \in A(m)$.

Es bleibt zu zeigen, daß $A(m)$ in jedem Punkte $(x, y) \in A(m)$ eine analytische Menge ist.

Ist in einer vollen Umgebung von (x, y) der Rang von q nirgends größer als m, so ist das trivial; man darf daher annehmen, daß es in beliebiger Nähe von (x, y) Punkte auf A gibt, in denen der Rang von q größer als m ist. Weiter darf $m \geqq 1$ vorausgesetzt werden; denn die Menge $A(0)$ ist sicher in (x, y) analytisch, da sie mit gewissen der Komponenten von A, in die A in (x, y) zerfällt, übereinstimmt.

---

[13]) Vgl. zu diesem Satz auch [1], Exp. XIV, wo Satz 16 für die Faserdimension formuliert und bewiesen ist. Wir haben hier der Vollständigkeit halber den dort geführten Beweis wiedergegeben.

Wir wählen auf X und Y Karten (U, ψ) und (V, φ) mit $x \in U$, $y \in V$; dann sind $\psi(U)$ bzw. $\varphi(V)$ analytische Mengen in Gebieten G_1 bzw. G_2 eines C^{N_1} bzw. C^{N_2}; $\psi \times \varphi(A)$ ist eine analytische Menge in $G_1 \times G_2$. Wir können U und V so klein wählen, daß $\tilde{A} = \psi \times \varphi(A)$ eine rein-dimensionale analytische Menge — etwa von der Dimension s — ist.

Wir betrachten nun die Mengen $\tilde{A}(m)$, die wir bezüglich der Projektion von $\tilde{A}$ in G_2 definiert denken. Wenn wir zeigen, daß $\tilde{A}(m)$ für jedes natürliche m eine in $G_1 \times G_2$ analytische Menge ist, so ist offenbar auch $A(m)$ jeweils eine analytische Menge in $U \times V$.

Wir führen vollständige Induktion nach der Dimension s von $\tilde{A}$. Für $s = 0$ ist die Behauptung trivial, denn dann besteht $\tilde{A}$ nur aus isolierten Punkten, so daß sämtliche zu untersuchenden Mengen $\tilde{A}(m)$ ebenfalls aus diesen Punkten bestehen. Die Behauptung sei für alle in $G_1 \times G_2$ reindimensionalen analytischen Mengen, deren Dimension nicht größer als $s - 1$ ist, bewiesen.

Sind $y_1, \ldots, y_{N_2}$ Koordinaten in C^{N_2}, so wird die Projektion q von $\tilde{A}$ in G_2 beschrieben durch die auf $\tilde{A}$ holomorphen Funktionen $y_\nu = f_\nu(a)$, $\nu = 1, \ldots, N_2$, die jeweils einem Punkt $a \in \tilde{A}$ seine y_ν-Koordinaten zuordnen. Ist $\tilde{A}_\lambda$ irgendeine in $G_1 \times G_2$ irreduzible und also sicher reindimensionale Komponente von $\tilde{A}$, so ist in jedem uniformisierbaren Punkt von $\tilde{A}_\lambda$ der Rang des Funktionensystems $f_1, \ldots, f_{N_2}$ definiert; nach Satz 12 wissen wir, daß die bezüglich $G_1 \times G_2$ gebildete abgeschlossene Hülle der Gesamtheit aller uniformisierbaren Punkte von $\tilde{A}_\lambda$, in denen dieser Rang nicht maximal ist, eine in $G_1 \times G_2$ analytische Menge B_λ ist. Dieselbe ist, da $\tilde{A}_\lambda$ irreduzibel in $G_1 \times G_2$ ist, in jedem ihrer Punkte höchstens $(s-1)$-dimensional. Die Vereinigung aller dieser Mengen B_λ ist dann offensichtlich auch eine in $G_1 \times G_2$ analytische, höchstens $(s-1)$-dimensionale Menge B. Die Menge der nichtgewöhnlichen Punkte von $\tilde{A}$ ist, wenn U und V hinreichend klein sind, nach 1.4. in einer in $G_1 \times G_2$ analytischen, höchstens $(s-1)$-dimensionalen Menge C enthalten. Wir betrachten nun zunächst die rein s-dimensionale analytische Menge $\tilde{A}$ außerhalb der höchstens $(s-1)$-dimensionalen analytischen Menge $D' = B \cup C$. In jedem Punkt $a \in \tilde{A} - D'$ ist der Rang von q maximal, denn er stimmt, wie man sofort durch geläufige Determinantenbetrachtungen einsieht, in jedem dieser Punkte mit dem Rang des Funktionensystems $f_1, \ldots, f_{N_2}$ überein. Da nun oben angenommen werden konnte, daß es in beliebiger Nähe von a Punkte auf $\tilde{A}$ gibt, in denen der Rang von q größer als m ist, so folgt, daß die Menge $\tilde{A}(m)$ in der Menge D' enthalten ist.

Wir können, wenn die Gebiete G_1, G_2 und dementsprechend die Umgebungen U, V hinreichend klein gewählt werden, die Menge D' einbetten in eine in $G_1 \times G_2$ rein $(s-1)$-dimensionale analytische Menge D, die in $\tilde{A}$ enthalten ist. Dann gilt auch $\tilde{A}(m) \subset D$. Auf die Menge D trifft nun die Induktionsvoraussetzung zu, daher sind die Mengen $D(m)$, die bezüglich der Projektion q

von D in G_2 zu bilden sind, für jede natürliche Zahl m analytische Mengen in $G_1 \times G_2$. Wir zeigen nun $\tilde{A}(m) = D(m-1)$, womit dann der Satz bewiesen ist.

In der Tat! Zunächst gehört jeder Punkt $a \in D(m-1)$ zu $\tilde{A}(m)$. Ist nämlich der Rang von q bezüglich D in a höchstens $(m-1)$, so ist die Faser von q bezüglich D in a mindestens von der Dimension $(s-1)-(m-1) = s-m$. Dann ist aber erst recht die Faser von q bezüglich $\tilde{A}$ in a mindestens $(s-m)$-dimensional; daher kann der Rang von q bezüglich $\tilde{A}$ in a höchstens m sein, woraus folgt: $a \in \tilde{A}(m)$.

Sei umgekehrt $a \in \tilde{A}(m)$. Dann gibt es eine irreduzible Komponente F' der Faser von q bezüglich $\tilde{A}$ durch a, die mindestens $(s-m)$-dimensional ist. Alle Punkte von F' gehören zu $\tilde{A}(m)$, daher gilt: $F' \subset D$. Mithin gehört F' auch zur Faser von q bezüglich D durch a; dieselbe ist also mindestens $(s-m)$-dimensional. Dann kann aber der Rang von q bezüglich D in a höchstens $(s-1-(s-m)) = m-1$ sein. Also gilt: $a \in D(m-1)$. — Satz 17 ist bewiesen.

Ist der lokale Rang von q auf A beschränkt und ist etwa r_0 das Maximum dieses lokalen Ranges, so kann man einen Punkt $z \in A$ eine *Entartungsstelle* von q bezüglich A nennen, wenn der lokale Rang von q bezüglich A in z kleiner als r_0 ist. Dann ist in Satz 17 insbesondere enthalten:

Die Gesamtheit der Entartungsstellen der Projektion q einer analytischen Menge A ist eine analytische Menge.

Man wird die Projektion q von A in Y *nirgends entartet* nennen, wenn der lokale Rang von q in allen Punkten von A derselbe ist.

3. Wir kommen nun zum Hauptsatz dieser Arbeit. In § 6 haben wir — um in der jetzt möglichen Terminologie zu sprechen — den Fall betrachtet, daß die Projektion q nirgends entartet ist. Wir werden im folgenden zeigen, daß sich der Allgemeinfall unter Benutzung von Satz 10 und Satz 17 auf diesen Fall zurückführen läßt.

Satz 18: Es sei A eine analytische Menge im kartesischen Produkt $X \times Y$ zweier komplexer Räume X, Y. Zu jedem Punkt $y \in q(A)$ gebe es eine Umgebung $W(y)$ und eine relativ-kompakt in X liegende Menge X_y, so daß jede irreduzible Komponente einer jeden Faser von q über einem Punkt von $q(A) \cap W(y)$ Punkte mit X_y gemeinsam hat. Dann ist $q(A)$ eine lokal-analytische Menge in Y. Ist r der Rang von q bezüglich A, so ist $q(A)$ rein r-dimensional.

Beweis: Es sei $y \in q(A)$ ein beliebiger Punkt. Wir wählen eine relativ-kompakt in Y liegende, in $W(y)$ enthaltene Umgebung $V(y)$ und eine offene, relativ-kompakt in X liegende Menge X'_y, derart, daß X_y relativ-kompakt in X'_y liegt. Wir betrachten die in $X'_y \times V(y)$ analytische Menge $\tilde{A} = A \cap (X'_y \times V(y))$. Die Projektion von $\tilde{A}$ in $V(y)$ stimmt mit der Menge $q(A) \cap V(y)$ überein, da alle Fasern von q bezüglich A über den Punkten von $q(A) \cap V(y)$ wegen $V(y) \subset W(y)$ in X'_y eindringen. Wir können uns mithin darauf beschränken, an Stelle der Menge A und ihrer Projektion in Y die Menge $\tilde{A}$ und ihre Projektion in $V(y)$ zu betrachten.

Es gibt, da $\tilde{A}$ relativ-kompakt in $X \times Y$ liegt, eine natürliche Zahl s, so daß für jeden Punkt $z \in A$ gilt: $d_z(A) \leq s$. Wir denken uns s minimal gewählt und führen vollständige Induktion nach s. Der Induktionsbeginn $s = 0$ ist klar, denn dann besteht $\tilde{A}$ und folglich auch die Projektion von $\tilde{A}$ in $V(y)$ nur aus endlich vielen Punkten.

Wir nehmen zunächst an, daß $\tilde{A}$ eine irreduzible s-dimensionale analytische Menge ist. Die Menge A^* aller derjenigen Punkte von $\tilde{A}$, in denen die Projektion q von $\tilde{A}$ in $V(y)$ entartet ist, ist nach Satz 17 eine analytische Menge in $X'_y \times V(y)$; dieselbe ist höchstens $(s-1)$-dimensional. Jede irreduzible Komponente einer Faser von q bezüglich A^* über einem Punkt $y \in q(A) \cap V(y)$ stimmt mit einer Komponente der entsprechenden Faser von q bezüglich $\tilde{A}$ überein; daher dringt auch jede Faserkomponente von q bezüglich A^* in X_y ein. Mithin gibt es nach Induktionsvoraussetzung eine Umgebung V^* von $y(V^* \subset V(y))$, so daß $N^* = q(A^*) \cap V$ eine analytische Menge in V^* ist. Ist r der globale Rang von q auf $\tilde{A}$, so ist der Rang von q bezüglich A^* in jedem Punkt $z \in A^*$ höchstens $r-2$, denn A^* ist höchstens $(s-1)$-dimensional und die Dimension der Fasern von q bezüglich A^* ist stets um mindestens 1 größer als die minimale Dimension der Fasern von q bezüglich $\tilde{A}$. Daher ist N^*, wie sich ebenfalls aus der Induktionsvoraussetzung ergibt, eine höchstens $(r-2)$-dimensionale analytische Menge in V^*.

Wir betrachten nun in $X'_y \times (V^* - N^*)$ die rein s-dimensionale analytische Menge $\tilde{A}' = \tilde{A} \cap (X'_y \times (V^* - N^*))$. Die Projektion von $\tilde{A}'$ in $V^* - N^*$ ist nirgends entartet und vom Range r; daher gibt es nach Satz 15, da jede Faser von q bezüglich $\tilde{A}'$ in X_y eindringt, eine Umgebung V' von $y(V' \subset V^*)$, so daß die Projektion N' von $\tilde{A}'$ in $V' - V' \cap N^*$ eine rein r-dimensionale analytische Menge in $V' - V' \cap N^*$ ist. Nach Satz 10 ist nun die abgeschlossene Hülle $\bar{N}'$ von N' in V' eine rein r-dimensionale analytische Menge in V'. Nun gilt aber offenbar $\bar{N}' = q(A) \cap V'$, so daß Satz 18 für irreduzible s-dimensionale analytische Mengen A bewiesen ist.

Ist $\tilde{A}$ rein s-dimensional, so kann man den soeben durchgeführten Schluß für jede irreduzible Komponente von $\tilde{A}$ durchführen. Da $\tilde{A}$ relativ-kompakt in $X \times Y$ liegt, gibt es nur endlich viele solche Komponenten. Daher ist auch in diesem Falle die Menge $q(\tilde{A}) \cap V'$ eine analytische Menge in V'; dieselbe ist rein r-dimensional, wenn q auf $\tilde{A}$ vom Range r schlechthin ist.

Sei nun $\tilde{A}$ nicht rein s-dimensional. Dann ist $\tilde{A}$ die Vereinigung zweier analytischer Mengen $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$, von denen $\tilde{A}_1$ höchstens $(s-1)$-dimensional und $\tilde{A}_2$ rein s-dimensional ist. Nach dem bereits bewiesenen ist sowohl die Projektion von $\tilde{A}_1$ als auch von $\tilde{A}_2$ in der Nähe von y eine analytische Menge, die rein r-dimensional ist, wenn q vom Range r ist. Daher ist auch die Projektion von $\tilde{A}$ selbst eine solche Menge. — Satz 18 ist bewiesen [14]).

[14]) Man beachte, daß in Satz 18 nicht (wie in Satz 15) nur verlangt wird, daß jede Faser von q über einem Punkt von $q(A) \cap W(y)$ in X_y eindringen soll, sondern daß darüber

Bemerkung: Macht man in Satz 18 die (stärkere) Voraussetzung, daß eine relativ-kompakt in X liegende Menge X' existiert, derart, daß jede irreduzible Komponente einer jeden Faser von q bezüglich A in X' eindringt, so ist die Menge $q(A)$ eine analytische (rein r-dimensionale) Menge in Y.

In diesem Fall ist nämlich, wie man sofort überlegt, $q(A)$ abgeschlossen in Y.

Aus der soeben gemachten Bemerkung folgt

Satz 19: Ist A eine kompakte analytische Menge im kartesischen Produkt $X \times Y$ zweier komplexer Räume X, Y, so sind die Projektionen von A in X und in Y kompakte analytische Mengen in X und in Y. Ist r' bzw. r der Rang der Projektion p bzw. q von A in X bzw. in Y, so ist $p(A)$ bzw. $q(A)$ rein r'- bzw. rein r-dimensional.

Jede irreduzible Komponente jeder Faser von p bzw. q bezüglich A über einem Punkt von $p(A)$ bzw. $q(A)$ dringt nämlich in die kompakte Menge $q(A) \subset Y$ bzw. $p(A) \subset X$ ein.

Weiter ergibt sich (unter Benutzung des Satzes von CHOW) sofort:

Satz 20: Ist A eine analytische Menge im kartesischen Produkt $X \times Y$ zweier komplexer Räume und ist X kompakt, so ist die Projektion von A in Y eine analytische Menge in Y. Ist r der Rang von q bezüglich A, so ist $q(A)$ rein r-dimensional. Ist Y ein mehrfach-projektiver Raum, so ist $q(A)$ eine algebraische Menge[15]).

In diesem letzten Satze sind offensichtlich die Resultate der klassischen Eliminationstheorie für mehrfach projektive Räume (vgl. Einleitung) enthalten.

Literatur

[1] H. CARTAN: Séminaire E. N. S., Paris 1953—54 (hektographiert). — [2] H. GRAUERT u. R. REMMERT: Analytisch-verzweigte Überlagerungen und komplexe Räume. Erscheint demnächst in den Math. Ann. — [3] R. REMMERT u. K. STEIN: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. Math. Ann. **126**, 263—306 (1953).

(Eingegangen am 25. Juni 1955)

---

hinaus sogar jede irreduzible Faserkomponente diese Eigenschaft haben soll. Die schwächere Forderung des Satzes 15 reicht bei dem hier gegebenen Beweis nicht aus, weil man nicht weiß, ob die Fasern, die bezüglich der Projektion der Entartungsmenge A^* gebildet werden, stets in X_y eindringen. Daher wäre kein Induktionsschluß möglich.

[15]) Für den Fall, daß X der n-dimensionale Raum der Funktionentheorie und Y ein Gebiet des C^m ist, findet sich eine Teilaussage dieses Satzes bei W. THIMM: Über die Nullstellenmengen von Polynomidealen über dem Potenzreihenring. J. reine u. angew. Math. **193**, 183—208 (1954).

LEICHTWEISS, K.
Math. Annalen, Bd. 130, S. 442—474 (1956)

Das Problem von Cauchy in der mehrdimensionalen Differentialgeometrie

I. Zur isometrischen Einbettung und Verbiegung von Riemannschen Räumen

Von

KURT LEICHTWEISS in Freiburg i. Br.

§ 1. Einleitung

Trotz der großen Fortschritte der mehrdimensionalen Differentialgeometrie zu Anfang dieses Jahrhunderts hat man sich relativ wenig um Existenz- und Eindeutigkeitsfragen gekümmert. Die einzig wesentlichen Ergebnisse in dieser Richtung stammen von É. CARTAN und C. BURSTIN. CARTAN gelang es 1927, eine alte Vermutung SCHLÄFLIs über die lokale, isometrische Einbettbarkeit eines Riemannschen Raums von m Dimensionen R_m in einen euklidischen, $\frac{m(m+1)}{2}$-dimensionalen Raum $E_{\frac{m(m+1)}{2}}$ zum ersten Male vollständig zu beweisen, während BURSTIN 1931 sogar die isometrische Einbettbarkeit von R_m in einen $\frac{m(m+1)}{2}$-dimensionalen Riemannschen Raum zeigen konnte. Darüber hinaus wies BURSTIN die stetige Verbiegbarkeit des R_m in dem Einbettungsraum $E_{\frac{m(m+1)}{2}}$ für den Fall nach, daß R_m hinreichend „uneben“ im $E_{\frac{m(m+1)}{2}}$ liegt.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die Resultate CARTANs und BURSTINs auf eine methodisch neue Weise herzuleiten und sie gleichzeitig zu erweitern, indem nicht — wie bei BURSTIN — beliebige stetige Verbiegungen, sondern speziell analytische Verbiegungen untersucht werden. Naturgemäß liegt die Hauptschwierigkeit bei den erforderlichen Überlegungen in der Unübersichtlichkeit und Vielfalt der auftretenden Ableitungsgleichungen und deren Integrierbarkeitsbedingungen. Die Integration dieser partiellen Differentialgleichungen läßt sich aber trotzdem durchführen, wenn man einer Idee H. WEYLs folgend beachtet, daß gewissermaßen schon ein Teil der Integrierbarkeitsbedingungen für die Lösbarkeit der Ableitungsgleichungen hinreicht (Hilfssatz 2). Dieser Teil kann aber in allen Fällen durch Zurückführung auf den Existenz- und Eindeutigkeitssatz von CAUCHY-KOWALEWSKI integriert werden, und auf diese Weise gelangt man u. a. zu folgenden Ergebnissen:

Jede m-dimensionale Mannigfaltigkeit mit analytischer Riemannscher Metrik läßt sich in einen $\frac{m(m+1)}{2}$-dimensionalen Raum $R_{\frac{m(m+1)}{2}}$ mit analytischer Riemannscher Metrik lokal, analytisch und isometrisch einbetten

(Satz 1) und, wenn sie keine Flachpunkte besitzt, dort sogar analytisch verbiegen (Satz 4). Zwei derartige m-dimensionale, flachpunktfreie, isometrische Mannigfaltigkeiten im $R_n \left(n > \frac{m(m+1)}{2}\right)$ können stets ineinander analytisch verbogen werden (Satz 5), während ein entsprechendes Resultat für $n = \frac{m(m+1)}{2}$ nur in abgeschwächter Form richtig ist (Satz 6).

Um den Satz von Cauchy-Kowalewski anwenden zu können, werden alle Existenz- und Eindeutigkeitssätze unter Voraussetzung der Analytizität der in Frage kommenden Mannigfaltigkeiten bewiesen. Dies bedeutet natürlich eine Einschränkung, sie wird aber durch die Allgemeinheit der erzielten Resultate gerechtfertigt. In formaler Hinsicht wird nicht die von Cartan eingeführte Symbolik der alternierenden Differentialformen, sondern die klassische Tensorschreibweise benutzt, um die geometrische Formulierung der analytisch gewonnenen Aussagen zu erleichtern. Es sei noch besonders darauf hingewiesen, daß alle in dieser Arbeit auftretenden Mannigfaltigkeiten reell sind.

Bezüglich der Bezeichnungsweise ist zu erwähnen, daß die Indizes $a, b, c, d, \ldots$ immer von 1 bis m und die Indizes $i, j, k, l, \ldots$ von 1 bis n laufen. Nach Einstein ist über gleiche oben und unten stehende Indizes zu summieren. Eine Matrix wird durch Einschließung in runde Klammern und eine Determinante durch Einschließung in vertikale Doppelstriche gekennzeichnet.

§ 2. Hilfssätze

An die Spitze unserer Betrachtungen stellen wir den Satz von Cauchy-Kowalewski, auf welchen wir sämtliche Anfangswertprobleme in der mehrdimensionalen Differentialgeometrie zurückführen werden. Er lautet:[1])

Sind $\underset{\alpha}{f}_{t_m}(u^1, \ldots, u^{m-1})$ im Nullpunkt analytische Funktionen mit

$$\frac{\partial^{t_1+\cdots+t_{m-1}} \underset{\alpha}{f}_{t_m}}{(\partial u^1)^{t_1} \cdots (\partial u^{m-1})^{t_{m-1}}}(0, \ldots, 0) = \underset{\alpha}{a}_{t_1 \cdots t_m}$$

$$\left(t_a \geqq 0, \sum_{a=1}^{m} t_a = t,\ t \leqq r_\alpha, \quad t_m \leqq r_\alpha - 1; \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p\right)$$

und sind weiter die Funktionen $\underset{\alpha}{F}\left(u^a, \frac{\partial^t \underset{\beta}{\varphi}}{(\partial u^1)^{t_1} \cdots (\partial u^m)^{t_m}}\right)$ im Punkt $\left(0, \ldots, 0; \underset{\beta}{a}_{t_1 \ldots t_m}\right)$ analytisch ($\beta = 1, 2, \ldots, p$), so hat das partielle Differentialgleichungssystem:

$$\frac{\partial^{r_\alpha}}{(\partial u^m)^{r_\alpha}} \underset{\alpha}{\varphi} = \underset{\alpha}{F}\left(u^a, \frac{\partial^t \underset{\beta}{\varphi}}{(\partial u^1)^{t_1} \cdots (\partial u^m)^{t_m}}\right) \tag{I}$$

$$\left(t_a \geqq 0; \sum_{a=1}^{m} t_a = t, \quad t \leqq \underset{\beta}{r}, \quad t_m \leqq \underset{\beta}{r} - 1; \quad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, p\right)$$

---

[1]) Ein Beweis dieses Satzes findet sich bei [1] S. 633

in der Umgebung des Nullpunkts eine und nur eine im Nullpunkt analytische Lösung $\underset{\alpha}{\varphi} = \underset{\alpha}{\varphi}(u^a)$, welche den Anfangsbedingungen

$$\frac{\partial^{t_m} \underset{\alpha}{\varphi}}{(\partial u^m)^{t_m}}(u^1, \ldots, u^{m-1}, 0) = \underset{\alpha}{f}_{t_m}(u^1, \ldots, u^{m-1})$$

$$(0 \leqq t_m \leqq r_\alpha - 1;\ \alpha = 1, 2, \ldots, p)$$

genügt.

Dieser Satz läßt sich leicht in folgender Weise verallgemeinern:

Hängen die Anfangsfunktionen $\underset{\alpha}{f}_{t_m}$ und die Funktionen $\underset{\alpha}{F}$ außer von den angegebenen Argumenten noch von dem Parameter t im Punkt $t = 0$ analytisch ab, so gilt entsprechendes für die Lösungen $\underset{\alpha}{\varphi}$. (I')

Um dies einzusehen, brauchen wir nur in (I) den Bereich der unabhängigen Variablen um die Variable t zu erweitern.

Zur Anwendung des Satzes von CAUCHY-KOWALEWSKI auf unsere Probleme benötigen wir zunächst einige Hilfssätze.

Hilfssatz 1.

Es seien $\underset{\beta}{\psi}(u^a)$ im Nullpunkt analytische Funktionen mit $\underset{\beta}{\psi}(0) = \underset{\beta}{a}$, und die Funktionen $\underset{\alpha}{G}_a(u^b, \underset{\beta}{\psi})$ seien in $(0, \ldots, 0; \underset{\beta}{a})$ analytisch $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, p)$. Dann gilt für die Funktionen

$$\underset{\alpha}{\mathfrak{A}}_a(u^b) \equiv \frac{\partial \underset{\alpha}{\psi}}{\partial u^a}(u^b) - \underset{\alpha}{G}_a(u^b, \underset{\beta}{\psi}(u^b)) \tag{2.1}$$

und

$$\begin{aligned} \underset{\alpha}{\mathfrak{J}}\, a\, b(u^c) \equiv{}& \frac{\partial \underset{\alpha}{G}_a}{\partial u^b}(u^c, \underset{\beta}{\psi}(u^c)) - \frac{\partial \underset{\alpha}{G}_b}{\partial u^a}(u^c, \underset{\beta}{\psi}(u^c)) + \\ &+ \sum_{\gamma=1}^{p} \frac{\partial \underset{\alpha}{G}_a}{\partial \underset{\gamma}{\psi}}(u^c, \underset{\beta}{\psi}(u^c))\, \underset{\gamma}{G}_b(u^c, \underset{\beta}{\psi}(u^c)) - \sum_{\gamma=1}^{p} \frac{\partial \underset{\alpha}{G}_b}{\partial \underset{\gamma}{\psi}}(u^c, \underset{\beta}{\psi}(u^c))\, \underset{\gamma}{G}_a(u^c, \underset{\beta}{\psi}(u^c)) \end{aligned} \tag{2.2}$$

in einer Umgebung des Nullpunkts:

$$\begin{gathered} \sum_{(a,b)} \frac{\partial \underset{\alpha}{\mathfrak{A}}_a}{\partial u^b}(u^d) \cong 0 \ \bmod \left(\underset{\beta}{\mathfrak{A}}_a(u^d), \underset{\beta}{\mathfrak{A}}_b(u^d), \underset{\gamma}{\mathfrak{J}}_{a\,b}(u^d)\right) \\ \text{und} \\ \sum_{[a,b,c]} \frac{\partial \underset{\alpha}{\mathfrak{J}}_{a\,b}}{\partial u^c}(u^d) \cong 0 \ \bmod \left(\underset{\beta}{\mathfrak{A}}_a(u^d), \underset{\beta}{\mathfrak{A}}_b(u^d), \underset{\beta}{\mathfrak{A}}_c(u^d), \underset{\gamma}{\mathfrak{J}}_{a\,b}(u^d), \underset{\gamma}{\mathfrak{J}}_{b\,c}(u^d), \underset{\gamma}{\mathfrak{J}}_{c\,a}(u^d)\right). \end{gathered} \tag{2.3}$$

Hierbei bedeutet (a, b) bzw. $[a, b, c]$, daß über alle Permutationen von a, b bzw. über alle geraden Permutationen von a, b, c (d. h. über alle zyklischen Vertauschungen von a, b, c) algebraisch zu summieren ist (analog wie bei der Definition einer Determinante aus ihren Elementen). Mit der Schreibweise „$\cong 0 \bmod (\ldots)$" soll gesagt werden, daß die Funktionen auf der linken Seite der Gln. (2.3) sich linear homogen aus den rechts stehenden Funktionen mit im Nullpunkt analytischen Funktionen von u_a als Koeffizienten ausdrücken lassen.

Beweis. Es ist

a):
$$\begin{aligned}\sum_{(a,b)} \frac{\partial \underset{\alpha}{\mathfrak{A}}_a}{\partial u^b} &= \sum_{(a,b)}\left[-\frac{\partial \underset{\alpha}{G}_a}{\partial u^b} - \sum_\beta \frac{\partial \underset{\alpha}{G}_a}{\partial \underset{\beta}{\psi}} \underset{\beta}{G}_b - \sum_\beta \frac{\partial \underset{\alpha}{G}_a}{\partial \underset{\beta}{\psi}}\left(\frac{\partial \underset{\beta}{\psi}}{\partial u^b} - \underset{\beta}{G}_b\right)\right] \\ &= -\underset{\alpha}{\mathfrak{F}}_{ab} - \sum_{(a,b)}\sum_\beta \frac{\partial \underset{\alpha}{G}_a}{\partial \underset{\beta}{\psi}} \underset{\beta}{\mathfrak{A}}_b\end{aligned}\tag{2.4}$$

und

b)
$$\begin{aligned}\sum_{[a,b,c]} \frac{\partial \underset{\alpha}{\mathfrak{F}}_{ab}}{\partial u^c} &= \sum_{(a,b,c)} \frac{\partial}{\partial u^c}\left(\frac{\partial \underset{\alpha}{G}_a}{\partial u^b} + \sum_\gamma \frac{\partial \underset{\alpha}{G}_a}{\partial \underset{\gamma}{\psi}} \underset{\gamma}{G}_b\right) = \sum_{[a,b,c]}\left[\sum_{(b,c)} \frac{\partial^2 \underset{\alpha}{G}_a}{\partial u^b \partial u^c} + \right. \\ &\quad + \sum_{(b,c)}\sum_\beta \frac{\partial^2 \underset{\alpha}{G}_a}{\partial u^b \partial \underset{\beta}{\psi}} \underset{\beta}{G}_c + \sum_{(b,c)}\sum_\beta \frac{\partial^2 \underset{\alpha}{G}_a}{\partial u^c \partial \underset{\beta}{\psi}} \underset{\beta}{G}_b + \sum_{(b,c)}\sum_\gamma\sum_\beta \frac{\partial^2 \underset{\alpha}{G}_a}{\partial \underset{\gamma}{\psi} \partial \underset{\beta}{\psi}} \underset{\beta}{G}_c \underset{\gamma}{G}_b + \\ &\quad + \sum_{(b,c)}\sum_\gamma \frac{\partial \underset{\alpha}{G}_a}{\partial \underset{\gamma}{\psi}}\left(\frac{\partial \underset{\gamma}{G}_b}{\partial u^c} + \sum_\beta \frac{\partial \underset{\gamma}{G}_b}{\partial \underset{\beta}{\psi}} \underset{\beta}{G}_c\right) + \sum_{(b,c)}\sum_\beta \frac{\partial^2 \underset{\alpha}{G}_a}{\partial u^b \partial \underset{\beta}{\psi}}\left(\frac{\partial \underset{\beta}{\psi}}{\partial u^c} - \underset{\beta}{G}_c\right) + \\ &\quad \left. + \sum_{(b,c)}\sum_\gamma\sum_\beta \frac{\partial^2 \underset{\alpha}{G}_a}{\partial \underset{\gamma}{\psi} \partial \underset{\beta}{\psi}} \underset{\gamma}{G}_b\left(\frac{\partial \underset{\beta}{\psi}}{\partial u^c} - \underset{\beta}{G}_c\right) + \sum_{(b,c)}\sum_\gamma\sum_\beta \frac{\partial \underset{\alpha}{G}_a}{\partial \underset{\gamma}{\psi}} \frac{\partial \underset{\gamma}{G}_b}{\partial \underset{\beta}{\psi}}\left(\frac{\partial \underset{\beta}{\psi}}{\partial u^c} - \underset{\beta}{G}_c\right)\right] \\ &= \sum_{[a,b,c]}\sum_\gamma \frac{\partial \underset{\alpha}{G}_a}{\partial \underset{\gamma}{\psi}} \underset{\gamma}{\mathfrak{F}}_{bc} + \\ &\quad + \sum_{(a,b,c)}\sum_\beta \left(\frac{\partial^2 \underset{\alpha}{G}_a}{\partial u^b \partial \underset{\beta}{\psi}} + \sum_\gamma \frac{\partial^2 \underset{\alpha}{G}_a}{\partial \underset{\gamma}{\psi} \partial \underset{\beta}{\psi}} \underset{\gamma}{G}_b + \sum_\gamma \frac{\partial \underset{\alpha}{G}_a}{\partial \underset{\gamma}{\psi}} \frac{\partial \underset{\gamma}{G}_b}{\partial \underset{\beta}{\psi}}\right) \underset{\beta}{\mathfrak{A}}_c ,\end{aligned}$$

da

$$\sum_{(b,c)}\sum_\gamma\sum_\beta \frac{\partial^2 \underset{\alpha}{G}_a}{\partial \underset{\gamma}{\psi} \partial \underset{\beta}{\psi}} \underset{\beta}{G}_c \underset{\gamma}{G}_b = \sum_\gamma\sum_\beta\left(\frac{\partial^2 \underset{\alpha}{G}_a}{\partial \underset{\gamma}{\psi} \partial \underset{\beta}{\psi}} - \frac{\partial^2 \underset{\alpha}{G}_a}{\partial \underset{\beta}{\psi} \partial \underset{\gamma}{\psi}}\right) \underset{\beta}{G}_c \underset{\gamma}{G}_b = 0$$

((a, b, c) bedeutet hier, daß über alle Permutationen von a, b, c algebraisch zu summieren ist). w. z. b. w.

Hilfssatz 2

a) Notwendige Bedingungen dafür, daß die im Nullpunkt analytischen Funktionen $\underset{\alpha}{\psi}(u^a)$ mit den Anfangswerten $\underset{\alpha}{\psi}(0, \ldots, 0) = \underset{\alpha}{q}$ in der Umgebung des Nullpunkts Lösungen des Systems partieller Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial \underset{\alpha}{\psi}}{\partial u^a} - \underset{\alpha}{G}_a\left(u^b, \underset{\beta}{\psi}\right) = 0 \qquad (1 \leqq \alpha, \beta \leqq p) \tag{2.5}$$

und der Bedingungsgleichungen:

$$\underset{\delta}{K}\left(u^b, \underset{\beta}{\psi}\right) = 0 \qquad (1 \leqq \delta \leqq q) \tag{2.6}$$

bei als bekannt vorausgesetzten, im Punkt $(0, \ldots, 0, \underset{\beta}{q})$ analytischen Funk-

tionen $\underset{\alpha}{G_a}$ und $\underset{\delta}{K}$ sind, ist:

$$\underset{\alpha}{\mathfrak{A}}_a(u^c) = 0,$$

(2.7) $$\underset{\alpha}{\mathfrak{J}}_{ab}(u^c) = 0 \quad ^{2})$$

und

$$\underset{\delta}{\mathfrak{B}}(u^c) \equiv \underset{\delta}{K}\left(u^c, \underset{\beta}{\psi}(u^c)\right) = 0.$$

b) Hinreichend ist dafür jedoch schon das Bestehen folgender schwächerer Beziehungen für die u^a aus einer Umgebung des Nullpunktes:

(2.8) $$\underset{\alpha}{\mathfrak{A}}_{m'}(u^1, \ldots, u^{m'}, 0 \ldots 0) \cong 0 \bmod \left(\underset{\beta}{\mathfrak{A}}_{b''}(u^1, \ldots, u^{m'}, 0 \ldots 0),\ \underset{\gamma}{\mathfrak{J}}_{c''d''}(u^1, \ldots, u^{m'}, 0 \ldots 0)\right),$$

$$\underset{\alpha}{\mathfrak{J}}_{a''m'}(u^1, \ldots, u^{m'}, 0 \ldots 0) \cong 0 \bmod \left(\underset{\beta}{\mathfrak{A}}_{b''}(u^1, \ldots, u^{m'}, 0 \ldots 0),\ \underset{\gamma}{\mathfrak{J}}_{c''d''}(u^1, \ldots, u^{m'}, 0 \ldots 0)\right)$$

und

(2.9) $$\underset{\delta}{\mathfrak{B}}(0 \ldots 0) = 0, \frac{\partial \underset{\delta}{\mathfrak{B}}}{\partial u^{m'}}(u^1, \ldots, u^{m'}, 0 \ldots 0) \cong 0 \bmod \left(\underset{\varepsilon}{\mathfrak{B}}(u^1, \ldots, u^{m'}, 0 \ldots 0)\right),$$

$$(1 \leqq a'', b'', c'', d'' \leqq m' - 1,\ 1 \leqq \alpha, \beta, \gamma \leqq p,\ 1 \leqq \delta, \varepsilon \leqq q,\ 1 \leqq m' \leqq m)$$

wo die Koeffizienten der Linearkombinationen der Kongruenzen im Nullpunkt analytische Funktionen von $u^1, \ldots, u^{m'}$ sind.

c) Das System (2.5), (2.6) besitzt bei Vorgabe der Anfangswerte $\underset{\alpha}{\psi}(0, \ldots, 0) = \underset{\alpha}{a}$ höchstens eine im Nullpunkt analytische Lösung $\underset{\alpha}{\psi}(u^c)$.

Im einzelnen werden wir noch folgendes beweisen:

d) Genügen für ein festes $m'(1 \leqq m' \leqq m)$ die im Nullpunkt analytischen Funktionen $\underset{\beta}{\psi}(u^1, \ldots, u^{m'}, 0 \ldots 0)$ in einer Umgebung des Nullpunkts den Anfangsbedingungen: $\underset{\alpha}{\mathfrak{A}}_{a''}(u^1, \ldots, u^{m'-1}, 0 \ldots 0) = 0$ und den Kongruenzen (2.8), so gilt daselbst auch: $\underset{\alpha}{\mathfrak{A}}_{a'}(u^1, \ldots, u^{m'}, 0 \ldots 0) = 0$ $(1 \leqq a'' \leqq m' - 1;$ $1 \leqq a' \leqq m')$. Genügen dagegen die $\underset{\beta}{\psi}(u^1, \ldots, u^{m'}, 0 \ldots 0)$ den Anfangsbedingungen: $\underset{\delta}{\mathfrak{B}}(u^1, \ldots, u^{m'-1}, 0 \ldots 0) = 0$ und den Kongruenzen (2.9), so folgt: $\underset{\delta}{\mathfrak{B}}(u^1, \ldots, u^{m'}, 0 \ldots 0) = 0$.

e) Jede im Nullpunkt analytische Lösung $\underset{\alpha}{\psi}(u^1, \ldots, u^{m'}, 0 \ldots 0)$ von

$$\frac{\partial \underset{\alpha}{\psi}}{\partial u^{m'}} - \underset{\alpha}{G}_{m'}(u^1, \ldots, u^{m'}, 0 \ldots 0; \underset{\gamma}{\psi}) = 0 \quad \text{und} \quad \underset{\delta}{K}(u^1, \ldots, u^{m'}, 0 \ldots 0; \underset{\gamma}{\psi}) = 0$$

ist durch ihre Anfangswerte für $u^{m'} = 0$ eindeutig bestimmt.

Beweis. a) Ist $\underset{\alpha}{\psi}(u^c)$ Lösung von (2.5) und (2.6), so folgt aus der Definition von $\underset{\alpha}{\mathfrak{A}}_a(u^c)$ [Gl. (2.1)], der Definition von $\underset{\delta}{\mathfrak{B}}(u^c)$ und aus (2.4): $\underset{\alpha}{\mathfrak{A}}_a(u^c) = 0$, $\underset{\alpha}{\mathfrak{J}}_{ab}(u^c) = 0$ und $\underset{\delta}{\mathfrak{B}}(u^c) = 0$.

[2]) Wegen der Definition von $\underset{\alpha}{\mathfrak{A}}(u^c)$ und $\underset{\alpha}{\mathfrak{J}}_{ab}(u^c)$ siehe Hilfssatz 1.

b) Angenommen, es seien $\underset{\alpha}{\psi}(u^c)$ im Nullpunkt analytische Funktionen, für welche (2.8) und (2.9) gilt. Dann folgt aus (2.8) für $m' = 1$: $\underset{\alpha}{\mathfrak{A}}_1(u^1, 0 \ldots 0) = 0$, und aus (2.9) ergibt sich:

$$\underset{\delta}{\mathfrak{B}}(0, \ldots, 0) = 0; \frac{\partial \underset{\delta}{\mathfrak{B}}}{\partial u^1}(u^1, 0 \ldots 0) \cong 0 \bmod (\underset{\delta}{\mathfrak{B}}(u^1, 0 \ldots 0)), \text{ d. h. } \underset{\delta}{\mathfrak{B}}(u^1, 0 \ldots 0) = 0.$$

Wenn wir nun noch Teil d) von Hilfssatz 2 unabhängig von Teil b) bewiesen haben werden, ergibt sich durch vollständige Induktion nach m' in der Tat

$$\underset{\alpha}{\mathfrak{A}}_a(u^1, \ldots, u^m) = 0 \quad \text{und} \quad \underset{\delta}{\mathfrak{B}}(u^1, \ldots, u^m) = 0.$$

c) (2.5) besitzt höchstens eine Lösung $\underset{\alpha}{\psi}(u^c)$ mit $\underset{\alpha}{\psi}(0 \ldots 0) = \underset{\alpha}{a}$, wie durch sukzessive Anwendung des (unabhängig von Teil c) bewiesen werdenden) Teils e) von Hilfssatz 2 sofort folgt.

d) Wir nehmen nun an, $\underset{\alpha}{\psi}(u^1, \ldots, u^{m'}, 0 \ldots 0)$ genüge den Bedingungen

$$\underset{\alpha}{\mathfrak{A}}_{a''}(u^1, \ldots, u^{m'-1}, 0 \ldots 0) = 0. \tag{2.10}$$

Dann ist wegen (2.4) auch

$$\underset{\alpha}{\mathfrak{F}}_{a''b''}(u^1, \ldots, u^{m'-1}, 0 \ldots 0) = 0. \tag{2.11}$$

Weiter ergeben die Beziehungen (2.3) von Hilfssatz 1, angewandt für $a = a''$, $b = m'$ bzw. für $a = a''$, $b = b''$, $c = m'$ mit den Kongruenzen (2.8) in einer Umgebung des Nullpunkts identisch in $u^1, \ldots, u^{m'}$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u^{m'}}(\underset{\alpha}{\mathfrak{A}}_{a''}) \cong 0 \bmod \left(\underset{\beta}{\mathfrak{A}}_{c''}, \frac{\partial \underset{\beta'}{\mathfrak{A}}_{c'''}}{\partial u^{a''}}, \underset{\gamma}{\mathfrak{F}}_{d''e''}, \frac{\partial \underset{\gamma'}{\mathfrak{F}}_{d'''e'''}}{\partial u^{a''}}\right) \\ &\frac{\partial}{\partial u^{m'}}(\underset{\alpha}{\mathfrak{F}}_{a''b''}) \cong 0 \bmod \left(\underset{\beta}{\mathfrak{A}}_{c''}, \frac{\partial \underset{\beta'}{\mathfrak{A}}_{c'''}}{\partial u^{a''}}, \frac{\partial \underset{\beta''}{\mathfrak{A}}_{c''''}}{\partial u^{b''}}, \underset{\gamma}{\mathfrak{F}}_{d''e''}, \frac{\partial \underset{\gamma'}{\mathfrak{F}}_{d'''e'''}}{\partial u^{a''}}, \frac{\partial \underset{\gamma''}{\mathfrak{F}}_{d''''e''''}}{\partial u^{b''}}\right) \end{aligned} \tag{2.12}$$

$(1 \leqq a'', b'', c'', c''', c'''', d'', d''', d'''', e'', e''', e'''' \leqq m' - 1;$

$1 \leqq \alpha, \beta, \beta', \beta'', \gamma, \gamma', \gamma'' \leqq p).$

Die Gln. (2.12) sind so zu verstehen, daß in ihnen identisch $u^{m'+1} = \cdots = u^m = 0$ gesetzt ist. Die Koeffizienten der Linearkombinationen der Kongruenzen in (2.12) sind wegen der Analytizität entsprechender Koeffizienten bei den Kongruenzen (2.3) im Nullpunkt analytische Funktionen von $u^1, \ldots, u^{m'}$. Das System (2.12) ist also schon von der Form (I) und besitzt deshalb wegen der Anfangsbedingungen (2.10) und (2.11) als einzige, im Nullpunkt analytische Lösung nur: $\underset{\alpha}{\mathfrak{A}}_{a''}(u^1, \ldots, u^{m'}, 0 \ldots 0) = 0$ und $\underset{\alpha}{\mathfrak{F}}_{a''b''}(u^1, \ldots, u^{m'}, 0 \ldots 0) = 0$. Nach (2.8) ist aber dann auch $\underset{\alpha}{\mathfrak{A}}_{m'}(u^1, \ldots, u^{m'}, 0 \ldots 0) = 0$, d. h. es gilt: $\underset{\alpha}{\mathfrak{A}}_{a'}(u^1, \ldots, u^{m'}, 0 \ldots 0) = 0$ $(1 \leqq a' \leqq m)$. Aus $\underset{\delta}{\mathfrak{B}}(u^1, \ldots, u^{m'-1}, 0 \ldots 0) = 0$ und den Kongruenzen (2.9) folgt schließlich $\underset{\delta}{\mathfrak{B}}(u^1, \ldots, u^{m'}, 0 \ldots 0) = 0$, womit d) vollständig bewiesen ist.

e) Hier ergibt sich der Beweis unmittelbar aus (I), w.z.b.w.

Hilfssatz 2 wurde in dem Spezialfall, daß keine Bedingungsgleichungen auftreten und daß die hinreichenden Bedingungen die Gestalt:

$$\underset{\alpha}{\mathfrak{A}}_{m'}(u^1, \ldots, u^{m'}, 0 \ldots 0) = 0$$
$$\underset{\alpha}{\mathfrak{J}}_{a''m'}(u^1, \ldots, u^{m'}, 0 \ldots 0) = 0$$

annehmen, unter schwächeren Differenzierbarkeitsvoraussetzungen schon von H. Weyl[3]) bewiesen.

Korollar von Hilfssatz 2

Notwendig und hinreichend für die allgemeine Lösbarkeit des Systems von Ableitungsgleichungen

$$\frac{\partial \underset{\lambda}{\mathfrak{v}}}{\partial u^a} = \sum_{\mu=1}^{\lambda_0} \underset{\lambda\mu}{C}{}^a(u^b)\, \underset{\mu}{\mathfrak{v}} \tag{2.13}$$

$$\left(\underset{\lambda}{\mathfrak{v}} = (\underset{\lambda}{v}{}^i);\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq \lambda \leq \lambda_0,\ \lambda_0 \leq n\right)$$

mit bekannten, einmal stetig differenzierbaren Koeffizienten $\underset{\lambda\mu}{C}{}^a$ ist das Bestehen der Integrabilitätsbedingungen

$$\sum_{(a,b)} \left(\frac{\partial \underset{\lambda\mu}{C}{}^a}{\partial u^b}(u^c) + \sum_{\nu=1}^{\lambda_0} \underset{\lambda\nu}{C}{}^a(u^c)\, \underset{\nu\mu}{C}{}^b(u^c) \right) = 0 \qquad (1 \leq \lambda, \mu \leq \lambda_0). \tag{2.14}$$

Die Gln. (2.14) sind nämlich für linear unabhängige Vektorfunktionen $\underset{\lambda}{\mathfrak{v}}(u^a)$ äquivalent mit den Bedingungen $\underset{\alpha}{\mathfrak{J}}_{ab}(u^c) = \underset{\lambda,i}{\mathfrak{J}}{}_{ab}(u^c) = 0$, wie eine leichte Rechnung ergibt, so daß diese Bedingungen also nach Hilfssatz 2 als notwendig erkannt sind. Definieren wir umgekehrt $\underset{\lambda}{\mathfrak{v}}(u^a)$ durch die Bedingungen $\underset{\lambda}{\mathfrak{v}}(0) = \underset{\lambda}{\mathfrak{a}}$ ($\underset{\lambda}{\mathfrak{a}}$ = beliebig) und $\underset{\lambda,i}{\mathfrak{A}}{}_{m'}(u^1, \ldots, u^{m'}, 0 \ldots 0) = 0$ $(1 \leq m' \leq m)$ nach dem Existenzsatz für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung, so sind diese Vektoren wegen (2.14) und Hilfssatz 2 Lösungen von (2.13)[4]).

Aus dem damit bewiesenen Korollar von Hilfssatz 2 folgt, auf die Ableitungsgleichungen der Flächentheorie angewandt, der Satz von Bonnet über die Bestimmung einer Fläche durch ihre erste und zweite Grundform.

Hilfssatz 3[5])

Haben die einmal stetig differenzierbaren Vektorfelder $\underset{\lambda}{\mathfrak{v}}(u^a)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, \lambda_0)$ die Eigenschaft, daß sämtliche Ableitungen der Vektoren $\underset{\lambda}{\mathfrak{v}}$ sich aus diesen Vektoren mit stetigen Koeffizienten linear homogen kombinieren lassen, so liegen die $\underset{\lambda}{\mathfrak{v}}(u^a)$ in demjenigen linearen Raum, welcher von den Vektoren $\underset{\lambda}{\mathfrak{v}}(0)$ aufgespannt wird. Hiervon gilt auch in einer Umgebung des Nullpunkts die Umkehrung.

Beweis: Seien $\underset{\lambda}{v}{}^i$ $(i = 1, \ldots, n)$ die Komponenten der $\underset{\lambda}{\mathfrak{v}}$ in bezug auf ein affines Koordinatensystem (x^i) $(i = 1, \ldots, n)$, das speziell so gewählt werde,

[3]) [2], S. 66—68.

[4]) Eine leichte Nachrechnung zeigt, daß die Voraussetzungen von Hilfssatz 2 in diesem Fall auf die in dem Korollar angegebenen reduziert werden können.

[5]) Dieser Hilfssatz wird erst in den Fortsetzungen dieser Arbeit angewandt.

daß der von den Vektoren $\underset{\lambda}{\mathfrak{v}}(0)$ aufgespannte lineare Raum darin durch $x^N = 0 (N_0 \leqq N \leqq n)$ ausgedrückt wird. Dann ist $\underset{\lambda}{v}^N(0) = 0$ und nach Voraussetzung

$$\frac{\partial \underset{\lambda}{v}^N}{\partial u^{m'}}(u^1, \ldots, u^{m'}, 0 \ldots 0) = \sum_{\mu=1}^{\lambda_0} \underset{\lambda\mu}{C}_{m'}(u^1, \ldots, u^{m'} 0 \ldots 0)\, \underset{\mu}{v}^N(u^1 \ldots, u^{m'}, 0 \ldots 0),$$
$$(1 \leqq \lambda \leqq \lambda_0;\; N_0 \leqq N \leqq n;\; 1 \leqq m' \leqq m)$$

woraus durch sukzessive Anwendung des Eindeutigkeitssatzes über Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung wegen der Stetigkeit der $\underset{\lambda\mu}{C}_a$ $\underset{\lambda}{v}^N(u^a) = 0$ und damit die eine Behauptung von Hilfssatz 3 folgt. Die Umkehrung davon ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, daß alle linear unabhängigen $\underset{\lambda'}{\mathfrak{v}}(0)$ der $\underset{\lambda}{\mathfrak{v}}(0)$ sich in einer Umgebung des Nullpunkts aus den $\underset{\lambda'}{\mathfrak{v}}(u^a)$ linear kombinieren lassen. w.z.b.w.

§ 3. Die isometrische Einbettung von Riemannschen Räumen in Riemannsche Räume höherer Dimension

Eines der bekanntesten Anfangswertprobleme in der mehrdimensionalen Differentialgeometrie ist das Problem der isometrischen Einbettung einer Mannigfaltigkeit R_m mit Riemannscher Metrik in einen euklidischen Raum E_n, d. h. das Problem, alle m-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten des E_n mit vorgegebener erster Grundform zu bestimmen. Es wurde zuerst von Darboux für $m = 2$ und $n = 3$ gelöst[6]), und Schläfli vermutete, daß sich ganz allgemein jeder analytische R_m lokal isometrisch in einen E_n mit $n \geqq \frac{m(m+1)}{2}$ einbetten läßt. Janet [5] gab den ersten unvollständigen und É. Cartan [6] den ersten exakten Beweis für diese Vermutung, worauf Burstin [7] zeigte, daß ein entsprechender Satz statt für den E_n auch für einen beliebigen, n-dimensionalen, Riemannschen Raum R_n gilt. Wir wollen nun unabhängig von Burstin durch Zurückführung auf den Satz von Cauchy-Kowalewski mittels unserer in § 2 angeführten Hilfssätze diesen Satz beweisen, welcher, genau formuliert, folgendermaßen lautet:

Satz 1

Vor.: R_m sei eine Mannigfaltigkeit der Dimension m mit den lokalen Koordinaten $(u^1, \ldots, u^m)$ und einer durch den im Nullpunkt P_0 analytischen Maßtensor $g_{ab}(u^c)$ aufgeprägten, Riemannschen (positiv definiten) Metrik. Ebenso sei R_n mit $n \geqq \frac{m(m+1)}{2}$ eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit den lokalen Koordinaten $(x^1, \ldots, x^n)$ und einer durch den (wieder im Nullpunkt Q_0 analytischen) Maßtensor $g_{ij}(x^k)$ gegebenen (positiv definiten) Metrik.

Beh.: Dann läßt R_m sich derart lokal analytisch und isometrisch in R_n einbetten, daß die Nullpunkte von R_m und R_n zusammenfallen; oder anders ausgedrückt: Es existieren im Nullpunkt analytische Funktionen

[6]) Siehe dazu [3], S. 253ff. sowie [4], S 263—264.

$x^i(u^a)$ mit

$$x^i(0) = 0, \text{ Rang}\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^a}(0)\right) = m \quad \text{und} \tag{3.1}$$
$$g_{ij}(x^k(u^c))\frac{\partial x^i}{\partial u^a}(u^c)\frac{\partial x^j}{\partial u^b}(u^c) = g_{ab}(u^c).$$

Beweis: Wir nehmen an, die Koordinaten u^a von R_m seien im Nullpunkt lokal euklidisch, d. h. es gelte

$$g_{ab}(0) = \delta^b_a, \ \frac{\partial g_{ab}}{\partial u^c}(0) = 0. \tag{3.2}$$

Wir können dies ohne Einschränkung der Allgemeinheit tun, da sich (3.2) durch eine im Nullpunkt analytische Koordinatentransformation erreichen läßt[7]), so daß also der Maßtensor des R_m in bezug auf die neuen Koordinaten wieder im Nullpunkt analytisch ist. Weiter bezeichnen wir mit $R_{m'}$, die durch $u^{m'+1} = \cdots = u^m = 0$ gegebenen Untermannigfaltigkeiten von R_m $(1 \leqq m' < m)$. Nun läßt sich sicher die Kurve R_1 lokal analytisch und isometrisch derart in den R_n einbetten, daß $P_0 = Q_0$ gilt und R_1 in R_n planar ist. Eine in den R_n durch die Gleichungen $x^i = x^i(u^{a'})$ eingebettete Mannigfaltigkeit $R_{m'}$ heißt dabei in R_n „planar", wenn ihr Krümmungsgebiet[8]) die maximal mögliche Dimension $\text{Min}\left(\frac{m'(m'+3)}{2}, n\right)$ besitzt oder

$$\text{Rang}\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^{a'}}(0), \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^{b'}\partial u^{c'}}(0) + \Gamma^i_{kl}(0)\frac{\partial x^k}{\partial u^{b'}}(0)\frac{\partial x^l}{\partial u^{c'}}(0)\right) = \text{Min}\left(\frac{m'(m'+3)}{2}, n\right)^{9)}$$
$$(1 \leqq a', b', c' \leqq m')$$

ist. Wir nehmen als schon bewiesen an, daß $R_{m'-1}$ lokal analytisch, planar und isometrisch in den R_n mit $P_0 = Q_0$ eingebettet sei $(2 \leqq m' \leqq m)$, und beweisen nun, daß sich diese Einbettung zu einer lokal analytischen, isometrischen und für $m' < m$ wiederum planaren Einbettung der $R_{m'}$ in R_n erweitern läßt. Wenn wir dies gezeigt haben, ist nach dem Prinzip der vollständigen Induktion auch Satz 1 bewiesen.

Zu diesem Zwecke führen wir auf $R_{m'}$ die auf $R_{m'-1}$ bezogenen, geodätischen Parallelkoordinaten $(p^1, \ldots, p^{m'})$ ein. Dabei bestimmen sich die Funktionen $u^{a'}(p^{b'})$ $(a', b' = 1, \ldots, m')$ als Lösungen der partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 u^{a'}}{(\partial p^{m'})^2} = \Gamma^{a'}_{b'c'}(u^{d'})\frac{\partial u^{b'}}{\partial p^{m'}}\frac{\partial u^{c'}}{\partial p^{m'}}{}^{9)} \qquad (a', b', c', d' = 1, \ldots, m') \tag{3.3}$$

unter den Anfangsbedingungen

$$u^{a''}(p^1, \ldots, p^{m'-1}, 0) = p^{a''}, \ u^{m'}(p^1, \ldots, p^{m'-1}, 0) = 0 \ (a'' = 1, 2, \ldots, m'-1), \tag{3.4}$$

und

$$g_{a'b'}(u^{d'}(p^1, \ldots, p^{m'-1}, 0))\frac{\partial u^{a'}}{\partial p^{m'}}(p^1, \ldots, p^{m'-1}, 0)\frac{\partial u^{b'}}{\partial p^{c'}}(p^1, \ldots, p^{m'-1}, 0) = \delta^{c'}_{m'}, \tag{3.5}$$

[7]) Siehe [8], S. 56

[8]) Zur Definition des Krümmungsgebiets vgl. [9], S. 153

[9]) Wir bezeichnen die Christoffelsymbole erster Art von g_{ij} bzw. $g_{a'b'}$ mit $\Gamma_{ik,l}$ bzw. $\Gamma_{a'b',c'}$ und die entsprechenden Christoffelsymbole zweiter Art mit Γ^l_{ik} bzw. $\Gamma^{c'}_{a'b'}$

d. h. (nach (I)) als im Nullpunkt analytische Funktionen, und es gilt in diesen speziellen Koordinaten:

$$(3.6)\qquad \bar g_{a'm'}(p^{b'}) = \delta^{\overline{m}}_{a}\left(\bar g_{a'b'} = g_{c'd'}\frac{\partial u^{c'}}{\partial p^{a'}}\frac{\partial u^{d'}}{\partial p^{b'}}\,;\ a', b', c', d' = 1, \ldots, m'\right).$$

Nun folgt aus (3.2) in Verbindung mit (3.4), (3.5): $\frac{\partial u^{a'}}{\partial p^{b'}}(0) = \delta^{a'}_{b'}$ und (nach Differentiation von (3.5) sowie nach (3.3)) $\frac{\partial^2 u^{a'}}{\partial p^{b'}\partial p^{c'}}(0) = 0$, es ist also wegen (3.2) und (3.6):

$$(3.7)\qquad \bar g_{a'b'}(0) = \delta^{b'}_{a'},\qquad \frac{\partial \bar g_{a'b'}}{\partial p^{c'}}(0) = 0\qquad (1 \leq a', b', c' \leq m').$$

In Zukunft lassen wir die Striche über Tensoren weg und denken die Tensoren als stets auf die speziellen Koordinaten $p^{a'}$ bezogen[10]). Nach Induktionsvoraussetzung ist $R_{m'-1}$ mittels der im Nullpunkt analytischen Funktion $x^i(p^{a''})$ im R_n isometrisch eingebettet, d. h. es gilt

$$(3.8)\qquad g_{ij}(x^k(p^{c''}))\,\frac{\partial x^i}{\partial p^{a''}}(p^{c''})\,\frac{\partial x^j}{\partial p^{b''}}(p^{c''}) = g_{a''b''}(p^{c''}, 0)$$
$$(1 \leq a'', b'', c'' \leq m'-1)$$

und diese Einbettung ist planar, d. h. der Rang der Matrix

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial p^{a''}}(p^{c''}),\ \frac{\partial^2 x^i}{\partial p^{a''}\partial p^{b''}}(p^{c''}) + \Gamma^i_{kl}(x^j(p^{c''}))\,\frac{\partial x^k}{\partial p^{a''}}(p^{c''})\,\frac{\partial x^l}{\partial p^{b''}}(p^{c''})\right)$$

ist in der Umgebung des Nullpunkts wegen

$$n \geq \frac{m(m+1)}{2} > \frac{m'(m'+1)}{2} - 1 \text{ gleich } \frac{m'(m'+1)}{2} - 1.$$

Wir bestimmen nun zunächst durch Angabe von $\frac{\partial x^i}{\partial p^{m'}}(p^{c''})$ einen „Streifen" Γ durch die im R_n eingebettete $R_{m'-1}$. Zu diesem Zweck definieren wir durch

$$(3.9)\qquad \frac{D}{Dp^{b'}}\left(\frac{\partial x^i}{\partial p^{a'}}\right) \equiv \frac{\partial^2 x^i}{\partial p^{a'}\partial p^{b'}} + \Gamma^i_{kl}\,\frac{\partial x^k}{\partial p^{a'}}\,\frac{\partial x^l}{\partial p^{b'}} - \Gamma^{c'}_{a'b'}\,\frac{\partial x^i}{\partial p^{c'}}$$

eine kovariante Ableitung D des in bezug auf Koordinatentransformationen der x^i kontravarianten und in bezug auf Koordinatentransformationen der $p^{a'}$ kovarianten Tensors $\frac{\partial x^i}{\partial p^{a'}}$ [11]). Wir finden durch kovariante Ableitung von $g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial p^{a'}}\frac{\partial x^j}{\partial p^{b'}} = g_{a'b'}$ nach $p^{d'}$ und einiger Umrechnung unter Benutzung der Symmetrie von $\frac{D}{Dp^{b'}}\left(\frac{\partial x^i}{\partial p^{a'}}\right)$, des Satzes von Ricci und (3.6) für die gesuchten Funktionen $\frac{\partial x^i}{\partial p^{m'}}(p^{c''})$ die Bedingungsgleichungen:

$$(3.10)\qquad g_{ij}(x^r)\left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial p^{a''}\partial p^{b''}} + \Gamma^i_{kl}(x^r)\,\frac{\partial x^k}{\partial p^{a''}}\,\frac{\partial x^l}{\partial p^{b''}}\right)\frac{\partial x^j}{\partial p^{m'}} = \Gamma_{a''b'',m'} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{a''b''}}{\partial p^{m'}}$$

[10]) Wir können unseren Beweis auch mit allgemeineren speziellen Koordinaten führen. bei welchen nur (3.4) und (3.5), nicht aber (3.6) gilt, da im Verlauf dieses Beweises von (3.6) gar kein Gebrauch gemacht werden wird.

[11]) Vgl. [10], S. 154ff.

neben den aus (3.6) folgenden Bedingungsgleichungen:

(3.11) $g_{ij}(x^r)\dfrac{\partial x^i}{\partial p^{a'}}\dfrac{\partial x^j}{\partial p^{m'}} = g_{a'm'} = \delta^{m'}_{a'}$ $(1 \leq a'', b'' \leq m'-1, 1 \leq a' \leq m', 1 \leq r \leq n)$.

Zur Vereinfachung dieser Gleichungen orthogonalisieren wir jetzt die uns schon bekannten, lokal analytischen, $\dfrac{m'(m'+1)}{2}-1$ kontravarianten Vektoren

(3.12) $\underset{a''}{w^i} = \dfrac{\partial x^i}{\partial p^{a''}}$ und $\underset{a''b''}{w^i} = \dfrac{\partial^2 x^i}{\partial p^{a''}\partial p^{b''}} + \Gamma^i_{kl}(x^r)\dfrac{\partial x^k}{\partial p^{a''}}\dfrac{\partial x^l}{\partial p^{b''}}$ $(1 \leq b'' \leq a'' \leq m'-1)$

(i = Index der Vektorkomponenten), nachdem wir sie in irgendeiner Weise nach ihren Indizes a'' bzw. Indexpaaren $a''b''$, oder wie wir im folgenden schreiben werden, Indizes $\varrho\left(\varrho = m', \ldots, \dfrac{m'(m'+1)}{2} - 1 = m_0\right)$ angeordnet haben. Da die Vektoren (3.12) wegen Rang $\left(\underset{a''}{w^i}(p^{c''}), \underset{a''b''}{w^i}(p^{c''})\right) = \dfrac{m'(m'+1)}{2} - 1$ in der Umgebung des Nullpunkts linear unabhängig sind, lassen sich dieselben dann als folgende Linearkombinationen der orthogonalisierten, lokal analytischen Vektoren $\underset{a''}{e^i}$ und $\underset{\varrho}{e^i}$ darstellen:

(3.13) $$\underset{a''}{w^i} = \sum_{d''=1}^{m'-1} a_{a''d''}\underset{d''}{e^i} \text{ und } \underset{\varrho}{w^i} = \sum_{d''=1}^{m'-1} a_{\varrho d''}\underset{d''}{e^i} + \sum_{\sigma=m'}^{m_0} a_{\varrho\sigma}\underset{\sigma}{e^i}$$

mit $a_{a''d''} = a_{\varrho\sigma} = 0$ für $a'' < d''$, $\varrho < \sigma$ und $a_{a''a''} \neq 0$, $a_{\varrho\varrho} \neq 0$ $(1 \leq a'', d'' \leq$ $\leq m'-1; m' \leq \varrho, \sigma \leq m_0)$. Wir ergänzen nun das auf $R_{m'-1}$ definierte, normierte Orthogonalsystem der Vektoren $\underset{a''}{e^i}$, $\underset{\varrho}{e^i}$ durch die Vektoren $\underset{\omega}{e^i}$ $(\omega = m_0 + 1, \ldots, n)$ zu einem vollständigen, normierten, lokal analytischen Orthogonalsystem des R_n, setzen den noch unbekannten Vektor $\dfrac{\partial x^j}{\partial p^{m'}}$ als Linearkombination

$$\sum_{d''=1}^{m'-1} b_{d''}\underset{d''}{e^j} + \sum_{\sigma=m'}^{m_0} b_\sigma \underset{\sigma}{e^j} + \sum_{\omega=m_0+1}^{n} b_\omega \underset{\omega}{e^j}$$

an und erhalten für die Koeffizienten dieser Linearkombination aus (3.11):

$$\sum_{d''=1}^{m'-1} a_{a''d''}(p^{c''})\, b_{d''}(p^{c''}) = 0, \qquad (1 \leq a'' \leq m'-1)$$

d. h. wegen (3.13):

(3.14) $$b_{d''}(p^{c''}) = 0 \qquad (1 \leq d'' \leq m'-1)$$

sowie aus (3.10):

(3.15) $$\sum_{\sigma=m'}^{m_0} a_{\varrho\sigma}(p^{c''})\, b_\sigma(p^{c''}) = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_\varrho}{\partial p^{m'}}(p^{c''}, 0) \qquad (m' \leq \varrho \leq m_0),$$

wobei $g_\varrho = g_{a''b''}$ für das Indexpaar $\varrho = a''b''$ gesetzt ist. Endlich erhalten wir noch aus (3.14) und (3.11):

(3.16) $$\sum_{\sigma=m'}^{m_0}(b_\sigma(p^{c''}))^2 + \sum_{\omega=m_0+1}^{n}(b_\omega(p^{c''}))^2 = 1\,.$$

Die Gleichungen (3.15) und (3.16) bilden zusammen ein gemischtes lineares und quadratisches System für die Unbekannten $b_\sigma(p^{c''})$ und $b_\omega(p^{c''})$, dessen

bekannte Koeffizienten, wie leicht ersichtlich, im Nullpunkt analytische Funktionen von $p^{c''}$ sind. Dieses System läßt sich reell lösen; die $b_\sigma(p^{c''})$ bestimmen sich nämlich wegen (3.13), d. h. wegen $\|a_{\varrho\sigma}\| \neq 0$ nach der Cramerschen Regel eindeutig als im Nullpunkt analytische Funktionen von $p^{c''}$, und aus (3.7) folgt

$$b_\sigma(0) = 0 \qquad (m' \leqq \sigma \leqq m_0). \tag{3.17}$$

Die $b_{\omega'}(p^{c''})$ $(\omega' = m_0 + 1, \ldots, n-1)$ seien weiter beliebige im Nullpunkt analytische Funktionen, welche lediglich den Nebenbedingungen

$$b_{\omega'}(0) = 0 \qquad (m_0 + 1 \leqq \omega' \leqq n - 1) \tag{3.18}$$

und, falls $m' \leqq m - 1$,

$$\text{Rang}\left(\frac{\partial b_{\omega'}}{\partial p^{a''}}(0) + c_{n\omega' a''}(0)\right) = m' - 1 \tag{3.19}$$

unterworfen seien. (Bedingung (3.19) ist wegen Anzahl der

$$\omega' = n - 1 - m_0 = n - \frac{m'(m'+1)}{2} \geqq \frac{m(m+1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} = m \geqq m' + 1$$

vernünftig!). Hierbei sind die $c_{n\omega' a''}(0)$ durch die Ableitungsgleichungen

$$\frac{\partial \underset{n}{e^i}}{\partial p^{a''}} + \Gamma^i_{kl} \underset{n}{e^k} \frac{\partial x^l}{\partial p^{a''}} = \sum_{d''=1}^{m'-1} c_{n d'' a''} \underset{d''}{e^i} + \sum_{\sigma=m'}^{m_0} c_{n\sigma a''} \underset{\sigma}{e^i} + \sum_{\omega=m_0+1}^{n} c_{n\omega a''} \underset{\omega}{e^i} \tag{3.20}$$

definiert. Dann errechnet sich schließlich $b_n(p^{c''})$ wegen (3.16) durch

$$b_n = \pm \sqrt{1 - \sum_{\sigma=m'}^{m_0} (b_\sigma)^2 - \sum_{\omega'=m_0+1}^{n-1} (b_{\omega'})^2}$$

aus den schon bestimmten Funktionen $b_\sigma(p^{c''})$ und $b_{\omega'}(p^{c''})$, und aus (3.17), (3.18) folgt, daß $b_n(p^{c''})$ in der Umgebung des Nullpunkts reell und analytisch ist. Damit haben wir in

$$\frac{\partial x^j}{\partial p^{m'}}(p^{c''}) = \sum_{\sigma=m'}^{m_0} b_\sigma(p^{c''}) \underset{\sigma}{e^j}(p^{c''}) + \sum_{\omega=m_0+1}^{n} b_\omega(p^{c''}) \underset{\omega}{e^j}(p^{c''}) \tag{3.21}$$

zwei in der Umgebung des Nullpunkts reelle, analytische Lösungen der Bedingungsgleichungen (3.10) und (3.11) für den Anfangsstreifen der in den R_n einzubettenden $R_{m'}$ gefunden; im folgenden sei Γ der durch

$$b_n(0) = 1 \tag{3.22}$$

eindeutig bestimmte dieser Streifen.

Unsere zweite Aufgabe ist es jetzt, durch Γ eine zur $R_{m'}$ isometrische, im Nullpunkt analytische Mannigfaltigkeit zu legen, deren (gesuchte) Parameterdarstellung $x^i = x^i(p^1, \ldots, p^{m'}) = x^i(p^{a'})$ sei und deren Normalenraum durch die im Nullpunkt analytischen, orthogonal normierten Vektoren $\underset{\lambda}{n^i}(p^{a'})$ aufgespannt werde $(m' + 1 \leqq \lambda \leqq n)$. Dann lauten die Ableitungsgleichungen

dieser Mannigfaltigkeit[12]):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \underset{i}{\psi}}{\partial p^{b'}} - \underset{i}{G}_{b'}\big(p^{d'}, \underset{\alpha}{\psi}\big) \equiv \frac{\partial x^i}{\partial p^{b'}} - x^i_{b'} = 0\\
&\frac{\partial \underset{i,a'}{\psi}}{\partial p^{b'}} - \underset{i,a'}{G}_{b'}(p^{d'}, \underset{\alpha}{\psi}) \equiv\\
&\quad \frac{\partial x^i_{a'}}{\partial p^{b'}} + \Gamma^i_{jk}(x^l)\, x^j_{a'} x^k_{b'} - \Gamma^{c'}_{a'b'}(p^{d'})\, x^i_{c'} - \sum_{\lambda=m'+1}^{m} \underset{\lambda}{A}_{a'b'}(p^{d'})\, \underset{\lambda}{n}^i = 0 \qquad (3.23)\\
&\frac{\partial \underset{i,\lambda}{\psi}}{\partial p^{b'}} - \underset{i,\lambda}{G}_{b'}(p^{d'}, \underset{\alpha}{\psi}) \equiv\\
&\quad \frac{\partial \underset{\lambda}{n}^i}{\partial p^{b'}} + \Gamma^i_{jk}(x^l)\, x^j_{b'} \underset{\lambda}{n}^k + \underset{\lambda}{A}_{a'b'}(p^{d'})\, g^{a'c'}(p^{d'})\, x^i_{c'} - \sum_{\nu=m'+1}^{m} \underset{\lambda\nu}{T}_{b'}(p^{d'})\, \underset{\nu}{n}^i = 0
\end{aligned}
$$

mit

$$\underset{\lambda}{A}_{a'b'}(p^{d'}) = \underset{\lambda}{A}_{b'a'}(p^{d'}), \underset{\lambda\mu}{T}_{a'}(p^{d'}) = -\underset{\mu\lambda}{T}_{a'}(p^{d'}) \qquad (m'+1 \leqq \lambda, \mu \leqq n) \tag{3.24}$$

und den Nebenbedingungen:

$$
\begin{aligned}
&\underset{a',b'}{K}\Big(p^{d'}, \underset{\alpha}{\psi}\Big) \equiv g_{ij}(x^k)\, x^i_{a'} x^j_{b'} - g_{a'b'}(p^{d'}) = 0\\
&\underset{a',\lambda}{K}\Big(p^{d'}, \underset{\alpha}{\psi}\Big) \equiv g_{ij}(x^k)\, x^i_{a'} \underset{\lambda}{n}^j = 0 \quad (1 \leqq a', b' \leqq m', m'+1 \leqq \lambda, \mu \leqq n)\\
&\underset{\lambda,\mu}{K}\Big(p^{d'}, \underset{\alpha}{\psi}\Big) \equiv g_{ij}(x^k)\, \underset{\lambda}{n}^i \underset{\mu}{n}^j - \delta^\mu_\lambda = 0,
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

wobei wir $x^i = \underset{i}{\psi}$, $x^i_{a'} = \underset{i,a'}{\psi}$, $\underset{\lambda}{n}^i = \underset{i,\lambda}{\psi}$ gesetzt und diese Größen zu $\underset{\alpha}{\psi}$ zusammengefaßt haben. Für die nach Hilfssatz 1, Gl. (2.2) und Hilfssatz 2, Gl. (2.7) in bezug auf beliebige, im Nullpunkt analytische Funktionen $x^i(p^{e'})$, $x^i_{d'}(p^{e'})$, $\underset{\lambda}{n}^i(p^{e'})$, $\underset{\lambda}{A}_{a'b'}(p^{e'}) = \underset{\lambda}{A}_{b'a'}(p^{e'})$, $\underset{\lambda\mu}{T}_{a'}(p^{e'}) = -\underset{\mu\lambda}{T}_{a'}(p^{e'})$ gebildeten Funktionen $\underset{\alpha}{\mathfrak{J}}_{a'b'}(p^{e'})$ und $\underset{\delta}{\mathfrak{B}}(p^{e'})$ gilt:

$$
\begin{aligned}
&\underset{i}{\mathfrak{J}}_{b'c'}(p^{e'}) && = 0\\
&\sum_{i=1}^{n} g_{ij}(x^k(p^{e'}))\, x^j_{d'}(p^{e'})\, \underset{i,a'}{\mathfrak{J}}_{b'c'}(p^{e'}) \cong \mathfrak{L}_{d'a'b'c'}(p^{e'}) && \Big(\mathrm{mod}\ \underset{\delta}{\mathfrak{B}}(p^{e'})\Big)^{13)}\\
&\sum_{i=1}^{n} g_{ij}(x^k(p^{e'}))\, \underset{\lambda}{n}^j(p^{e'})\, \underset{i,a'}{\mathfrak{J}}_{b'c'}(p^{e'}) \cong \underset{\lambda}{\mathfrak{M}}_{a'b'c'}(p^{e'}) && \Big(\mathrm{mod}\ \underset{\delta}{\mathfrak{B}}(p^{e'})\Big)\\
&\sum_{i=1}^{n} g_{ij}(x^k(p^{e'}))\, x^j_{d'}(p^{e'})\, \underset{i,\lambda}{\mathfrak{J}}_{b'c'}(p^{e'}) \cong -\underset{\lambda}{\mathfrak{M}}_{d'b'c'}(p^{e'}) && \Big(\mathrm{mod}\ \underset{\delta}{\mathfrak{B}}(p^{e'})\Big)\\
&\sum_{i=1}^{n} g_{ij}(x^k(p^{e'}))\, \underset{\mu}{n}^j(p^{e'})\, \underset{i,\lambda}{\mathfrak{J}}_{b'c'}(p^{e'}) \cong \underset{\lambda\mu}{\mathfrak{N}}_{b'c'}(p^{e'}) && \Big(\mathrm{mod}\ \underset{\delta}{\mathfrak{B}}(p^{e'})\Big)\\
&(1 \leqq a', b', c', d', e' \leqq m';\ 1 \leqq i, j, k \leqq n;\ m'+1 \leqq \lambda, \mu \leqq n).
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

[12]) Siehe [8], S. 160—161.

[13]) Mit dieser Schreibweise soll wiederum ausgedrückt sein, daß

$$\sum_{i=1}^{n} g_{ij}(x^k(p^{e'}))\, x^j_{d'}(p^{e'})\, \underset{i,a'}{\mathfrak{J}}_{b'c'}(p^{e'}) - \mathfrak{L}_{d'a'b'c'}(p^{e'})$$

bzw. die anderen entsprechenden Differenzen sich als Linearkombinationen der zu $\underset{\delta}{\mathfrak{B}}(p^{e'})$

Dabei haben wir zur Abkürzung

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{L}_{d'a'b'c'} \equiv R_{ijkl}\, x^i_{d'}\, x^j_{a'}\, x^k_{b'}\, x^l_{c'} - R_{d'a'b'c'} - \sum_{\lambda=m'+1}^{n} \sum_{(b',c')} \underset{\lambda}{A}_{b'a'} \underset{\lambda}{A}_{d'c'} \text{ [14]} \\
(3.27) \quad &\underset{\lambda}{\mathfrak{M}}_{a'b'c'} \equiv R_{ijkl}\, \underset{\lambda}{n}^i\, x^j_{a'}\, x^k_{b'}\, x^l_{c'} + \sum_{(b',c')} \underset{\lambda}{A}_{a'b',c'} + \sum_{\nu=m'+1}^{n} \sum_{(b',c')} \underset{\nu}{A}_{a'b'}\, \underset{\nu\lambda}{T}_{c'} \\
&\underset{\lambda\mu}{\mathfrak{N}}_{b'c'} \equiv -R_{ijkl}\, \underset{\lambda}{n}^i\, \underset{\mu}{n}^j\, x^k_{b'}\, x^l_{c'} + \sum_{(b',c')} \underset{\lambda\mu}{T}_{b',c'} + \sum_{\nu=m'+1}^{n} \sum_{(b',c')} \underset{\lambda\nu}{T}_{b'}\, \underset{\nu\mu}{T}_{c'} - \\
&\qquad - \sum_{(b',c')} g^{a'd'}\, \underset{\lambda}{A}_{a'b'}\, \underset{\mu}{A}_{c'd'}
\end{aligned}
$$

gesetzt und mit R_{ijkl} bzw. $R_{a'b'c'd'}$ die Riemannschen Krümmungstensoren der Maßtensoren g_{ij} bzw. $g_{a'b'}$ sowie mit $\underset{\lambda}{A}_{a'b',c'}$ und $\underset{\lambda\mu}{T}_{b',c'}$ die kovarianten Ableitungen der Tensoren $\underset{\lambda}{A}_{a'b'}$ und $\underset{\lambda\mu}{T}_{b'}$ in bezug auf den Maßtensor $g_{a'b'}$ bezeichnet.

Nun kennen wir schon nach Induktionsvoraussetzung die Funktionen $x^i(p^{b''})$ und damit auch $\frac{\partial x^i}{\partial p^{a''}}(p^{b''})$ sowie nach (3.21) und (3.22): $\frac{\partial x^i}{\partial p^{m'}}(p^{b''})$, und wir wissen wegen (3.8) und (3.11), daß die (im Nullpunkt analytischen) Vektoren $\frac{\partial x^i}{\partial p^{a'}}$ linear unabhängig sind $(1 \leq a'', b'' \leq m'-1)$. Danach können wir $n-m'$, auf den Vektoren $\frac{\partial x^i}{\partial p^{a'}}$ orthogonale, normierte, im Nullpunkt analytische Vektoren $\underset{\lambda}{n}^i$ als Funktionen der Parameter $p^{b''}$ $(m'+1 \leq \lambda \leq n)$ bestimmen. Es ist also:

$$
(3.28) \quad
\begin{aligned}
&g_{ij}(x^k(p^{b''}))\, \frac{\partial x^i}{\partial p^{a'}}(p^{b''})\, \underset{\lambda}{n}^j(p^{b''}) = 0 \\
&g_{ij}(x^k(p^{b''}))\, \underset{\lambda}{n}^i(p^{b''})\, \underset{\mu}{n}^j(p^{b''}) = \delta^\mu_\lambda, \quad (1 \leq a' \leq m';\ m'+1 \leq \lambda, \mu \leq n)
\end{aligned}
$$

und wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit noch

$$
(3.29) \quad \underset{\varrho+1}{n}^i(0) = \underset{\varrho}{e}^i(0) \text{ und } \underset{\omega'+1}{n}^i(0) = \underset{\omega'}{e}^i(0) \text{ [15]} \quad (m' \leq \varrho \leq m_0;\ m_0+1 \leq \omega' \leq n-1)
$$

annehmen. Dann bestimmen sich nach (3.23) die noch unbekannten Größen $\underset{\lambda}{A}_{a'b''}$ und $\underset{\lambda\mu}{T}_{b''}$ der Ableitungsgleichungen der gesuchten Mannigfaltigkeit auf dem Anfangsstreifen Γ unter Berücksichtigung der durch (3.9) und

$$
(3.30) \quad \frac{D\underset{\lambda}{n}^i}{Dp^{a'}} = \frac{\partial \underset{\lambda}{n}^i}{\partial p^{a'}} + \Gamma^i_{kl}\, \underset{\lambda}{n}^k\, \frac{\partial x^l}{\partial p^{a'}}
$$

---

zusammengefaßten Größen $\underset{a',b'}{K}\left(p^{\varrho'}, \underset{\alpha}{\psi}(p^{\varrho'})\right)$, $\underset{a',\lambda}{K}\left(p^{\varrho'}, \underset{\alpha}{\psi}(p^{\varrho'})\right)$, $\underset{\lambda,\mu}{K}\left(p^{\varrho'}, \underset{\alpha}{\psi}(p^{\varrho'})\right)$ oder $\underset{\delta}{K}\left(p^{\varrho'}, \underset{\alpha}{\psi}(p^{\varrho'})\right)$ mit Koeffizienten darstellen lassen, welche im Nullpunkt analytische Funktionen der $p^{\varrho'}$ sind.

[14]) Die Bedeutung von $\sum\limits_{(b'c')}$ ist auf S. 444 erklärt.

[15]) Vgl. dazu die Definition von $\underset{\varrho}{e}^i$ und $\underset{\omega}{e}^i$ auf S. 452 und beachte insbesondere (3.16), (3.17), (3.18).

definierten, verallgemeinerten kovarianten Ableitung[16]) zu:

$$
(3.31)\quad
\begin{aligned}
\underset{\lambda}{A}_{a'b''}(p^{c''}) &= g_{ij}(x^k(p^{c''}))\frac{D}{Dp^{b''}}\left(\frac{\partial x^i}{\partial p^{a'}}\right)(p^{c''})\,\underset{\lambda}{n}^j(p^{c''})\\
&= (\text{wenn } a' < m') = \underset{\lambda}{A}_{b''a'}(p^{c''})\\
\underset{\lambda\mu}{T}_{b''}(p^{c''}) &= g_{ij}(x^k(p^{c''}))\frac{D\underset{\lambda}{n}^i}{Dp^{b''}}(p^{c''})\,\underset{\mu}{n}^j(p^{c''}) = -\underset{\mu\lambda}{T}_{b''}(p^{c''})
\end{aligned}
$$

$$(1 \leqq a' \leqq m',\ 1 \leqq b'', c'' \leqq m'-1,\ m'+1 \leqq \lambda, \mu \leqq n),$$

und diese Funktionen sind wieder im Nullpunkt analytisch. Es sei noch festgestellt, daß wegen (3.13), (3.29) und (3.31)

$$
(3.32)\quad \left\| \underset{\varrho+1}{A}{}^{a''b''}(0) \right\| = \| a_{\sigma\varrho}(0) \| = \prod_{\varrho=m'}^{m_0} a_{\varrho\varrho}(0) \neq 0
$$

$$(1 \leqq b'' \leqq a'' \leqq m'-1;\ m' \leqq \varrho, \sigma \leqq m_0)$$

ist.

Nach diesen Vorbereitungen können wir endlich daran gehen, die Existenz der gesuchten, zur $R_{m'}$ isometrischen und durch Γ gehenden Mannigfaltigkeit durch Integration des Systems (3.23) unter den Nebenbedingungen (3.25) zu beweisen. Dazu lösen wir zunächst das Gleichungssystem $\mathfrak{L}_{m'a''b''m'} = 0$ oder ausgeschrieben:

$$
\begin{aligned}
\sum_{\varrho=m'}^{m_0} \underset{\varrho+1}{A}{}^{a''b''}\,\underset{\varrho+1}{A}{}^{m'm'} = \sum_{\lambda=m'+1}^{n} \underset{\lambda}{A}_{m'a''}\underset{\lambda}{A}_{m'b''} - \sum_{\omega'=m_0+1}^{n-1} \underset{\omega'+1}{A}{}^{a''b''}\,\underset{\omega'+1}{A}{}^{m'm'} -\\
- R_{m'a''b''m'} + R_{ijkl}\,x^i_{m'}\,x^j_{a''}\,x^k_{b''}\,x^l_{m'}
\end{aligned}
$$

(vgl. (3.27)!; $1 \leqq b'' \leqq a'' \leqq m'-1$) von $\frac{m'(m'-1)}{2}$ Gleichungen nach den $\frac{m'(m'-1)}{2}$ Größen $\underset{\varrho+1}{A}{}^{m'm'}$ auf und erhalten so:

$$
(3.33)\quad \underset{\varrho+1}{A}{}^{m'm'} = \frac{1}{\left\| \underset{\varrho+1}{A}{}^{a''b''} \right\|}\,\Phi\left(\underset{\mu}{A}_{c'd''},\ \underset{\omega'+1}{A}{}^{m'm'}, R_{ijkl}, x^s_{d'}, R_{m'e''f''m'}\right)
$$

$$(1 \leqq c', d' \leqq m';\ 1 \leqq a\ , b'', d'', e'', f'' \leqq m'-1;\ a'' \geqq b'';\ 1 \leqq s \leqq n;\ m'+1 \leqq \mu \leqq n),$$

wobei Φ ganze rationale Funktionen in den angegebenen Argumenten darstellt. Darauf setzen wir diese Ausdrücke für $\underset{\varrho+1}{A}{}^{m'm'}$ in die Differentialgleichungen $\underset{\lambda}{\mathfrak{M}}_{a'b''m'} = 0$, $\underset{\lambda\mu}{\mathfrak{N}}_{b''m'} = 0$

$$(1 \leqq a' \leqq m',\ 1 \leqq b'' \leqq m'-1,\ a' \geqq b'',\ m'+1 \leqq \mu < \lambda < n)$$

ein, welche damit wegen (3.27) die Form:

$$
(3.34)\quad
\begin{aligned}
\frac{\partial \underset{\lambda}{A}_{a'b''}}{\partial p^{m'}} = \frac{1}{\left(\left\| \underset{\varrho+1}{A}{}^{a''c''} \right\|\right)^2}\,\Psi_1\Bigg(&\underset{\mu}{A}_{c'd''}, \frac{\partial \underset{\mu}{A}_{c'd''}}{\partial p^{b''}}, \underset{\omega'+1}{A}{}^{m'm'}, \frac{\partial \underset{\omega'+1}{A}{}^{m'm'}}{\partial p^{b''}}, \underset{\lambda\nu}{T}{}^{e''}, \underset{\lambda\nu}{T}{}^{m'},\\
&R_{ijkl}(x^r), \frac{\partial R_{ijkl}}{\partial x^t}(x^r), \frac{\partial x^r}{\partial p^{b''}}, x^s_{d'}, \frac{\partial x^s_{d'}}{\partial p^{b''}}, \underset{\lambda}{n}^s, \Gamma^{g'}_{e'f'}(p^{b'}), R_{m'f''g''m'}(p^{b'}),\\
&\frac{\partial R_{m'f''g''m'}}{\partial p^{b''}}(p^{b'})\Bigg)
\end{aligned}
$$

---

[16]) Siehe [10], S. 154ff.

$$\frac{\partial \underset{\lambda\mu}{T}_{b''}}{\partial p^{m'}} = \frac{1}{\left\| {}_{\varrho+1}A_{a''c''} \right\|} \Psi_2 \Big(\underset{\nu}{A}_{c'd''}, {}_{\omega'+1}A_{m'm'}, \underset{\lambda\chi}{T}_{e''}, \underset{\mu\chi}{T}_{e''},$$

$$(3.34) \qquad \underset{\lambda\chi}{T}_{m'}, \underset{\mu\chi}{T}_{m'}, \frac{\partial \underset{\lambda\mu}{T}_{m'}}{\partial p^{b''}}, R_{ijkl}(x^r), x^s_{d'}, \underset{\lambda}{n}^s, \underset{\mu}{n}^s, g^{e'f'}(p^{b'}), R_{m'f''g''m'}(p^{b'}) \Big)$$

$$(1 \leqq a', b', c', d', e', f', g' \leqq m'; 1 \leqq a'', b'', c'', d'', e'', f'', g'' \leqq m'-1;$$
$$a'' \geqq c'', a' \geqq b''; \; 1 \leqq i, j, k, l, r, s, t \leqq n; m' \leqq \varrho \leqq m_0,$$
$$m_0 + 1 \leqq \omega' \leqq n-1; \; m'+1 \leqq \lambda, \mu, \nu, \chi \leqq n, \lambda > \mu)$$

annehmen, wobei wiederum Ψ_1 und Ψ_2 ganze rationale Funktionen der angegebenen Argumente sind. Ebenso erhalten wir aus den Ableitungsgleichungen (3.23) durch Einsetzung von (3.33):

$$\frac{\partial x^i}{\partial p^{m'}} = \Psi_3(x^j_{m'})$$

$$\frac{\partial x^i_{a'}}{\partial p^{m'}} = \frac{1}{\left\| {}_{\varrho+1}A_{a''c''} \right\|} \Psi_4 \Big(\underset{\lambda}{A}_{c'd''}, {}_{\omega'+1}A_{m'm'}, \Gamma^i_{jk}(x^l),$$

$$(3.35) \qquad R_{rstu}(x^l), x^v_{d'}, \underset{\mu}{n}^v, \Gamma^{g'}_{e'f'}(p^{b'}), R_{m'e''f''m'}(p^{b'}) \Big)$$

$$\frac{\partial \underset{\lambda}{n}^i}{\partial p^{m'}} = \frac{1}{\left\| {}_{\varrho+1}A_{a''c''} \right\|} \Psi_5 \Big(\underset{\mu}{A}_{c'd''}, {}_{\omega'+1}A_{m'm'}, \underset{\lambda\nu}{T}_{m'}, \Gamma^i_{jk}(x^l),$$

$$R_{rstu}(x^l), x^v_{d'}, \underset{\chi}{n}^v, g^{e'f'}(p^{b'}), R_{m'e''f''m'}(p^{b'}) \Big)$$

($\Psi_3, \Psi_4, \Psi_5 =$ ganz rational; $1 \leqq a', b', c', d', e', f', g' \leqq m'$; $1 \leqq a'', c'', d'', e'', f'' \leqq m'-1$; $a'' \geqq c''$; $1 \leqq i, j, k, l, r, s, t, u, v \leqq n$; $m'+1 \leqq \lambda, \mu, \nu, \chi \leqq n$; $m' \leqq \varrho \leqq m_0$; $m_0 + 1 \leqq \omega' \leqq n-1$).

Denken wir uns nun die Größen ${}_{\omega'+1}A_{m'm'}$ und $\underset{\lambda\mu}{T}_{m'}$ $(\lambda > \mu)$ als beliebig gewählte, im Nullpunkt analytische Funktionen ${}_{\omega'+1}A_{m'm'}(p^{b'}) = {}_{\omega'+1}\mathring{A}_{m'm'}(p^{b'})$ und $\underset{\lambda\mu}{T}_{m'}(p^{b'}) = \underset{\lambda\mu}{\mathring{T}}_{m'}(p^{b'})$ der $p^{b'}$ gegeben und beachten wir, daß die Funktionen $\Gamma^i_{jk}(x^r)$, $R_{ijkl}(x^r)$, $g^{a'c'}(p^{b'})$, $\Gamma^{d'}_{a'c'}(p^{b'})$, $R_{a'c'd'e'}(p^{b'})$ sämtlich im Nullpunkt analytisch sind und daß $\left\| {}_{\varrho+1}A_{a''c''}(0) \right\| \neq 0$ ist (Gl. (3.32)!), so können wir, wenn wir die Argumente $\underset{\lambda}{A}_{c'd''}$ und $\underset{\chi\nu}{T}_{e''}$ von (3.34) und (3.35) mittels $\underset{\lambda}{A}_{c'd''} = \underset{\lambda}{A}_{d''c'}$, $\underset{\chi\nu}{T}_{e''} = -\underset{\nu\chi}{T}_{e''}$ auf die Argumente $\underset{\lambda}{A}_{c'd''}$ $(c' \geqq d'')$ und $\underset{\chi\nu}{T}_{e''}$ $(\chi > \nu)$ reduzieren, aus dem Satz von Cauchy-Kowalewski (I) folgenden Schluß ziehen:

Das aus (3.34) und (3.35) gebildete System mit den Unbekannten $\underset{\lambda}{A}_{a'b''}$, $\underset{\lambda\mu}{T}_{b''}$, x^i, $x^i_{a'}$, $\underset{\lambda}{n}^i$ $(a' \geqq b'', \lambda > \mu)$ besitzt eine und nur eine in der Umgebung des Nullpunkts analytische Lösung

$$(3.36) \qquad \underset{\lambda}{\mathring{A}}_{a'b''}(p^{c'}), \underset{\lambda\mu}{\mathring{T}}_{b''}(p^{c'}), \mathring{x}^i(p^{c'}), \mathring{x}^i_{a'}(p^{c'}), \underset{\lambda}{\mathring{n}}^i(p^{c'}),$$

welche für $p^{m'} = 0$ die durch den Anfangsstreifen nach (3.31) gegebenen, sämtlich im Nullpunkt von den Parametern $p^{c''}$ analytisch abhängenden Anfangswerte

$$(3.37) \qquad \underset{\lambda}{A}_{a'b''}(p^{c''}), \underset{\lambda\mu}{T}_{b''}(p^{c''}), x^i(p^{c''}), \frac{\partial x^i}{\partial p^{a'}}(p^{c''}), \underset{\lambda}{n}^i(p^{c''})$$

annimmt. Weiter definieren wir noch die Größen $\underset{\lambda}{\mathring{A}}_{a''b''}(p^{c'})$ $(a'' < b'')$ und $\underset{\lambda\mu}{\mathring{T}}_{b''}(p^{c'})$ $(\lambda \leqq \mu)$ durch $\underset{\lambda}{\mathring{A}}_{a''b''} = \underset{\lambda}{\mathring{A}}_{b''a''}$ und $\underset{\lambda\mu}{\mathring{T}}_{b''} = -\underset{\mu\lambda}{\mathring{T}}_{b''}$ aus den Größen (3.36), und wir definieren $\underset{\varrho+1}{\mathring{A}}_{m'm'}(p^{c'})$ mittels der so gewonnenen Größen nach (3.33). Dann gelten für die mit den Funktionen $\underset{\lambda}{\mathring{A}}_{a'b'}(p^{c'})$, $\underset{\lambda\mu}{\mathring{T}}_{b'}(p^{c'})$, $\mathring{x}^{i}(p^{c'})$, $\mathring{x}^{i}_{a'}(p^{c'})$, $\underset{\lambda}{\mathring{n}}^{i}(p^{c'})$ nach (3.27) und (3.23) gebildeten Ausdrücke $\mathring{\mathfrak{L}}_{a'b'c'd'}$, $\underset{\lambda}{\mathring{\mathfrak{M}}}_{a'b'c'}$, $\underset{\lambda\mu}{\mathring{\mathfrak{N}}}_{a'b'}$, $\underset{\alpha}{\mathring{\mathfrak{A}}}_{a'}$ die Beziehungen:

(3.38) $$\mathring{\mathfrak{L}}_{m'a''b''m'}(p^{c'}) = 0,\ \underset{\lambda}{\mathring{\mathfrak{M}}}_{a'b''m'}(p^{c'}) = 0,\ \underset{\lambda\mu}{\mathring{\mathfrak{N}}}_{b''m'}(p^{c'}) = 0,\ \underset{\alpha}{\mathring{\mathfrak{A}}}_{m'}(p^{c'}) = 0.$$
$$(a'' \geqq b'',\ a' \geqq b'',\ \lambda > \mu)$$

Unter Beachtung der aus (3.27) und der Symmetrie bzw. Schiefsymmetrie von $\underset{\lambda}{\mathring{A}}_{a'b'}$ bzw. $\underset{\lambda\mu}{\mathring{T}}_{a'}$ folgenden Symmetriebeziehungen

(3.39) $$\mathring{\mathfrak{L}}_{a'b'c'd'} = -\mathring{\mathfrak{L}}_{b'a'c'd'} = -\mathring{\mathfrak{L}}_{a'b'd'c'} = \mathring{\mathfrak{L}}_{c'd'a'b'} = \mathring{\mathfrak{L}}_{d'c'b'a'}$$

und

$$\underset{\lambda\mu}{\mathring{\mathfrak{N}}}_{a'b'} = -\underset{\mu\lambda}{\mathring{\mathfrak{N}}}_{a'b'}$$

folgt daraus etwas allgemeiner:

(3.40) $$\mathring{\mathfrak{L}}_{m'a''b''m'}(p^{c'}) = 0 \ (1 \leqq a'', b'' \leqq m'-1)$$

(3.41) $$\underset{\lambda}{\mathring{\mathfrak{M}}}_{a'b''m'}(p^{c'}) = 0 \ (1 \leqq a' \leqq m', a' \geqq b'', m'+1 \leqq \lambda \leqq n)$$

(3.42) $$\underset{\lambda\mu}{\mathring{\mathfrak{N}}}_{b''m'}(p^{c'}) = 0 \ (m'+1 \leqq \lambda, \mu \leqq n)$$

und

(3.43) $$\underset{\alpha}{\mathring{\mathfrak{A}}}_{m'}(p^{c'}) = 0.$$

Außerdem ergibt sich aus (3.39) noch $\mathring{\mathfrak{L}}_{m'm'b''m'} = 0$, und aus (3.39), (3.40) folgt $\mathring{\mathfrak{L}}_{a''m'b''m'} = 0$; endlich ist wegen (3.39) $\mathring{\mathfrak{L}}_{a''c''b''m'} = \mathring{\mathfrak{L}}_{b''m'a''c''}$ oder — in unserer, schon mehrfach angewandten Schreibweise —

$$\mathring{\mathfrak{L}}_{a''c''b''m'} \cong 0 \ (\mathrm{mod}\ \mathring{\mathfrak{L}}_{b''m'a''c''}),$$

so daß wir also zusammenfassend

(3.44) $$\mathring{\mathfrak{L}}_{a'b'b''m'}(p^{c'}) \cong 0 \ (\mathrm{mod}\, \mathring{\mathfrak{L}}_{b''m'a''c''}(p^{c'}))$$
$$(1 \leqq a', b' \leqq m';\ 1 \leqq a'', b'', c'' \leqq m'-1)$$

konstatieren.

Ebenso beweisen wir jetzt die analoge Formel:

(3.45) $$\underset{\lambda}{\mathring{\mathfrak{M}}}_{a'b''m'}(p^{c'}) \cong 0 \left(\mathrm{mod}\ \underset{\lambda}{\mathring{\mathfrak{M}}}_{m'a''b''}(p^{c'})\right).$$
$$(1 \leqq a' \leqq m';\ 1 \leqq a'', b'' \leqq m'-1)$$

Sie ist für $a' \geqq b''$ wegen (3.41) trivial. Daß aber auch

$$\underset{\lambda}{\mathring{\mathfrak{M}}}_{a''b''m'}(p^{c'}) \cong 0 \left(\mathrm{mod}\ \underset{\lambda}{\mathring{\mathfrak{M}}}_{m'a''b''}(p^{c'})\right)$$

für $a'' < b''$ gilt, sieht man folgendermaßen ein: Es ist

$$\underset{\lambda}{\overset{\circ}{\mathfrak{M}}}_{a'b'c'} = \underset{\lambda}{\overset{\circ}{\mathfrak{O}}}_{a'c'b'} - \underset{\lambda}{\overset{\circ}{\mathfrak{O}}}_{a'b'c'}, \tag{3.46}$$

wenn $\underset{\lambda}{\overset{\circ}{\mathfrak{O}}}_{a'b'c'}$ durch

$$\underset{\lambda}{\overset{\circ}{\mathfrak{O}}}_{a'b'c'} = g_{is}\left(\frac{\partial \Gamma^s_{jk}}{\partial x^l} + \Gamma^s_{tl}\,\Gamma^t_{jk}\right) \underset{\lambda}{\overset{\circ}{n}}{}^i\, \overset{\circ}{x}{}^j_{a'}\, \overset{\circ}{x}{}^k_{b'}\, \overset{\circ}{x}{}^l_{c'} - \frac{\partial \underset{\lambda}{\overset{\circ}{A}}_{a'b'}}{\partial p^{c'}} -$$
$$- \Gamma^{d'}_{a'b'}\, \underset{\lambda}{\overset{\circ}{A}}_{d'c'} + \sum_{\nu = m'+1}^{n} \underset{\nu}{\overset{\circ}{A}}_{a'b'}\, \underset{\lambda\nu}{\overset{\circ}{T}}_{c'}$$

definiert ist. Aus dieser Definition folgt sofort:

$$\underset{\lambda}{\overset{\circ}{\mathfrak{O}}}_{a'b'c'} = \underset{\lambda}{\overset{\circ}{\mathfrak{O}}}_{b'a'c'}, \tag{3.47}$$

und damit wird für $1 \leqq a'' < b'' \leqq m' - 1$:

$$\underset{\lambda}{\overset{\circ}{\mathfrak{M}}}_{a''b''m'} = (\text{wegen } (3.46)) = \underset{\lambda}{\overset{\circ}{\mathfrak{O}}}_{a''m'b''} - \underset{\lambda}{\overset{\circ}{\mathfrak{O}}}_{a''b''m'} = \underset{\lambda}{\overset{\circ}{\mathfrak{O}}}_{m'a''b''} - \underset{\lambda}{\overset{\circ}{\mathfrak{O}}}_{b''a''m'} =$$
$$= \underset{\lambda}{\overset{\circ}{\mathfrak{O}}}_{m'a''b''} - \underset{\lambda}{\overset{\circ}{\mathfrak{O}}}_{b''m'a''} + \left(\underset{\lambda}{\overset{\circ}{\mathfrak{O}}}_{b''m'a''} - \underset{\lambda}{\overset{\circ}{\mathfrak{O}}}_{b''a''m'}\right) = (\text{wegen } (3.42),\ (3.46)$$
$$\text{und } (3.47)) = -\left(\underset{\lambda}{\overset{\circ}{\mathfrak{O}}}_{m'b''a''} - \underset{\lambda}{\overset{\circ}{\mathfrak{O}}}_{m'a''b''}\right) = - \underset{\lambda}{\overset{\circ}{\mathfrak{M}}}_{m'a''b''} \cong 0 \left(\operatorname{mod} \underset{\lambda}{\overset{\circ}{\mathfrak{M}}}_{m'a''b''}\right),$$

womit (3.45) bewiesen ist.

Jetzt läßt sich in wenigen Schritten zeigen, daß durch $x^i = \overset{\circ}{x}{}^i(p^{c'})$ eine m'-dimensionale Mannigfaltigkeit definiert ist, welche für $p^{m'} = 0$ durch den Anfangsstreifen Γ geht und zur $R_{m'}$ isometrisch ist. Zunächst gilt nämlich wegen der Anfangsbedingungen für $\overset{\circ}{x}{}^i(p^1, \ldots, p^{m'-1}, 0)$, $\overset{\circ}{x}{}^i_{a'}(p^1, \ldots, p^{m'-1}, 0)$, $\underset{\lambda}{\overset{\circ}{n}}{}^i(p^1, \ldots, p^{m'-1}, 0)$ und wegen (3.8), (3.11), (3.28):

$$\underset{\delta}{\overset{\circ}{\mathfrak{B}}}(p^1, \ldots, p^{m'-1}, 0) = 0, \tag{3.48}$$

und daraus folgt mit den Anfangsbedingungen für $\underset{\lambda}{\overset{\circ}{A}}_{a'b''}(p^1, \ldots, p^{m'-1}, 0)$, $\underset{\lambda\mu}{\overset{\circ}{T}}_{a''}(p^1, \ldots, p^{m'-1}, 0)$ und (3.10), (3.31):

$$\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathfrak{A}}}_{a''}(p^1, \ldots, p^{m'-1}, 0) = 0. \tag{3.49}$$

Weiter finden wir für die Funktionen $\dfrac{\partial \underset{\delta}{\overset{\circ}{\mathfrak{B}}}}{\partial p^{m'}}(p^{c'})$:

$$\frac{\partial \underset{\delta}{\overset{\circ}{\mathfrak{B}}}}{\partial p^{m'}}(p^{c'}) = \frac{\partial}{\partial p^{m'}}\left(\underset{\delta}{\overset{\circ}{K}}(p^{c'}, \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\psi}}(p^{c'}))\right) = \frac{\partial \underset{\delta}{\overset{\circ}{K}}}{\partial p^{m'}}\left(p^{c'}, \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\psi}}(p^{c'})\right) + \sum_{\beta} \frac{\partial \underset{\delta}{\overset{\circ}{K}}}{\partial \underset{\beta}{\psi}}\left(p^{c'}, \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\psi}}(p^{c'})\right) \times$$
$$\times \frac{\partial \underset{\beta}{\overset{\circ}{\psi}}}{\partial p^{m'}}(p^{c'}) = (\text{wegen } (2.1)) = \frac{\partial \underset{\delta}{\overset{\circ}{K}}}{\partial p^{m'}}\left(p^{c'}, \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\psi}}(p^{c'})\right) + \sum_{\beta} \frac{\partial \underset{\delta}{\overset{\circ}{K}}}{\partial \underset{\beta}{\psi}}\left(p^{c'}, \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\psi}}(p^{c'})\right) \times$$
$$\times \underset{\beta}{\overset{\circ}{G}}_{m'}\left(p^{c'}, \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\psi}}(p^{c'})\right) + \sum_{\beta} \frac{\partial \underset{\delta}{\overset{\circ}{K}}}{\partial \underset{\beta}{\psi}}\left(p^{c'}, \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\psi}}(p^{c'})\right) \underset{\beta}{\overset{\circ}{\mathfrak{A}}}_{m'}(p^{c'}) \cong 0 \left(\operatorname{mod} \underset{\varepsilon}{\overset{\circ}{\mathfrak{B}}}(p^{c'})\right)$$
$$(1 \leqq \delta, \varepsilon \leqq q),$$

wie sich nach (3.23), (3.43) und einer leichten Rechnung ergibt, d. h. wegen (3.48) und Hilfssatz 2d) ist auch

$$\text{(3.50)} \qquad \underset{s}{\overset{\circ}{\mathfrak{B}}}(p^{e'}) = 0 .$$

Schließlich können wir die für unsere Lösungsfunktionen gebildeten Kongruenzen (3.26) etwas umformen, wenn wir die Matrizen $g_{ij}(\overset{\circ}{x}{}^k)\,\overset{\circ}{x}{}^j_{d'}$ und $g_{ij}(\overset{\circ}{x}{}^k)\,\underset{\lambda}{\overset{\circ}{n}}{}^j$ oder $L_{id'}$ und $L_{i\lambda}$ zu einer quadratischen, n-reihigen Matrix $L_{i\varphi}$ zusammenfassen, wobei also der Index φ nacheinander die n Indizes d' und λ durchlaufen soll ($1 \leq d' \leq m'$, $m'+1 \leq \lambda \leq n$). Wegen $\| L_{i\varphi}(0) \| \neq 0$[17]) und (3.50) läßt sich dann (3.26) unter Benutzung der durch $\sum_{\varphi=1}^{n} M_{i\varphi} L_{k\varphi} = \delta_i^k$ definierten Umkehrmatrix $M_{i\varphi}$ folgendermaßen schreiben:

$$\underset{i}{\mathfrak{Z}}_{b'c'}(p^{e'}) = 0$$

$$\underset{i,a'}{\overset{\circ}{\mathfrak{Z}}}_{b'c'}(p^{e'}) = \sum_{d'=1}^{m'} M_{id'}(p^{e'}) \left(\sum_{k=1}^{n} L_{kd'}(p^{e'}) \cdot \underset{k,a'}{\overset{\circ}{\mathfrak{Z}}}_{b',c'}(p^{e'}) \right) +$$

$$+ \sum_{\lambda=m'+1}^{n} M_{i\lambda}(p^{e'}) \left(\sum_{k=1}^{n} L_{k\lambda}(p^{e'}) \cdot \underset{k,a'}{\overset{\circ}{\mathfrak{Z}}}_{b',c'}(p^{e'}) \right) = \sum_{d'=1}^{m'} M_{id'}(p^{e'})\, \overset{\circ}{\mathfrak{L}}_{d'a'b'c'}(p^{e'}) +$$

$$+ \sum_{\lambda=m'+1}^{n} M_{i\lambda}(p^{e'})\, \underset{\lambda}{\overset{\circ}{\mathfrak{M}}}_{a'b'c'}(p^{e'})$$

und

$$\underset{i,\lambda}{\overset{\circ}{\mathfrak{Z}}}_{b'c'}(p^{e'}) = \sum_{d'=1}^{m'} M_{id'}(p^{e'}) \left(\sum_{k=1}^{n} L_{kd'}(p^{e'})\, \underset{k,\lambda}{\overset{\circ}{\mathfrak{Z}}}_{b'c'}(p^{e'}) \right) +$$

$$+ \sum_{\mu=m'+1}^{n} M_{i\mu}(p^{e'}) \sum_{k=1}^{n} L_{k\mu}(p^{e'})\, \underset{k,\lambda}{\overset{\circ}{\mathfrak{Z}}}_{b'c'}(p^{e'}) =$$

$$= - \sum_{d'=1}^{m'} M_{id'}(p^{e'})\, \underset{\lambda}{\overset{\circ}{\mathfrak{M}}}_{d'b'c'}(p^{e'}) + \sum_{\mu=m'+1}^{n} M_{i\mu}(p^{e'})\, \underset{\lambda\mu}{\overset{\circ}{\mathfrak{N}}}_{b'c'}(p^{e'}),$$

oder in zusammengefaßter Schreibweise:

$$\text{(3.51)} \qquad \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathfrak{Z}}}_{b'c'}(p^{e'}) \cong 0 \left(\operatorname{mod} \overset{\circ}{\mathfrak{L}}_{d'a'b'c'}(p^{e'}),\ \underset{\lambda}{\overset{\circ}{\mathfrak{M}}}_{a'b'c'}(p^{e'}),\ \underset{\mu\nu}{\overset{\circ}{\mathfrak{N}}}_{b'c'}(p^{e'}) \right).$$

$$(1 \leq a', b', c', d', e' \leq m';\ m'+1 \leq \lambda, \mu, \nu \leq n)$$

Umgekehrt folgen aus (3.26) und (3.50) sofort die Kongruenzen:

$$\text{(3.52)} \qquad \begin{aligned} \overset{\circ}{\mathfrak{L}}_{d'a'b'c'}(p^{e'}) &\cong 0 \left(\operatorname{mod} \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathfrak{Z}}}_{b'c'}(p^{e'}) \right) \\ \underset{\lambda}{\overset{\circ}{\mathfrak{M}}}_{a'b'c'}(p^{e'}) &\cong 0 \left(\operatorname{mod} \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathfrak{Z}}}_{b'c'}(p^{e'}) \right) \\ \underset{\lambda\mu}{\overset{\circ}{\mathfrak{N}}}_{b'c'}(p^{e'}) &\cong 0 \left(\operatorname{mod} \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathfrak{Z}}}_{b'c'}(p^{e'}) \right) \end{aligned}$$

$$(1 \leq a', b', c', d', e' \leq m';\ m'+1 \leq \lambda, \mu \leq n).$$

[17]) Dies folgt aus der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\overset{\circ}{x}{}^i_{d'}(0)$ und $\underset{\lambda}{\overset{\circ}{n}}{}^i(0)$.

Jetzt ergibt sich aus (3.51) und (3.52) in Verbindung mit (3.42), (3.44) und (3.45):

$$\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathfrak{Z}}}_{a''m'}(p^{c'}) \cong 0 \left(\bmod\ \overset{\circ}{\mathfrak{L}}_{a''m'b''c''}(p^{c'}),\ \underset{\lambda}{\overset{\circ}{\mathfrak{M}}}_{m'd''a''}(p^{c'})\right),$$

also

$$\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathfrak{Z}}}_{a''m'}(p^{c'}) \cong 0 \left(\bmod\ \underset{\beta}{\overset{\circ}{\mathfrak{Z}}}_{b''c''}(p^{c'})\right).$$

$$(1 \leq a'', b'', c'', \leq m' - 1;\ 1 \leq c' \leq m')$$

Daraus folgt aber zusammen mit (3.43), (3.49) nach Hilfssatz 2d):

$\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathfrak{A}}}_{a'}(p^{c'}) = 0$ $(1 \leq a' \leq m')$, d. h. insbesondere $\underset{i}{\overset{\circ}{\mathfrak{A}}}_{a'}(p^{c'}) \equiv \dfrac{\partial \mathring{x}^i}{\partial p^{a'}}(p^{c'}) - \mathring{x}^i_{a'}(p^{c'}) = 0$

oder

$$\frac{\partial \mathring{x}^i}{\partial p^{a'}}(p^{c'}) = \mathring{x}^i_{a'}(p^{c'}). \tag{3.53}$$

Andererseits hatten wir aber schon nach (3.50) speziell bewiesen:

$$\underset{a',b'}{\overset{\circ}{\mathfrak{B}}}(p^{c'}) \equiv g_{ij}(\mathring{x}^k(p^{c'}))\, \mathring{x}^i_{a'}(p^{c'})\, \mathring{x}^j_{b'}(p^{c'}) - g_{a'b'}(p^{c'}) = 0;$$

es ist also wegen (3.53):

$$g_{ij}(\mathring{x}^k(p^{c'}))\, \frac{\partial \mathring{x}^i}{\partial p^{a'}}(p^{c'})\, \frac{\partial \mathring{x}^j}{\partial p^{b'}}(p^{c'}) = g_{a'b'}(p^{c'}).$$

$$(1 \leq a', b', c' \leq m')$$

Damit ist in der Tat die durch $x^i = \mathring{x}^i(p^{c'})$ definierte, im Nullpunkt analytische Mannigfaltigkeit (bei Zuordnung von Punkten mit gleichen Parametern) auf die $R_{m'}$ isometrisch bezogen, und sie geht wegen $\mathring{x}^i(p^{c''}, 0) = x^i(p^{c''})$, $\dfrac{\partial \mathring{x}^i}{\partial p^{a'}}(p^{c''}, 0) = \mathring{x}^i_{a'}(p^{c''}, 0) = \dfrac{\partial x^i}{\partial p^{a'}}(p^{c''})$ $(1 \leq a' \leq m')$ durch den Anfangsstreifen Γ.

Unser Induktionsbeweis von Satz 1 ist hiermit im Falle $m' = m$ zu Ende geführt; im Falle $m' < m$ bleibt noch zu beweisen, daß nach Durchführung einer gewissen Einschränkung die durch $x^i = \mathring{x}^i(p^{c'})$ isometrisch in den R_n eingebettete Mannigfaltigkeit im Nullpunkt planar ist, d. h. daß

$$\operatorname{Rang}\left(\frac{\partial \mathring{x}^i}{\partial p^{a'}}(0),\ \frac{D}{Dp^{b'}}\left(\frac{\partial \mathring{x}^i}{\partial p^{c'}}\right)(0)\right) = \frac{m'(m'+3)}{2}$$

$$(1 \leq a', b', c' \leq m';\ b' \geq c') \qquad \text{ist.}$$

Nun gilt aber nach (3.7), (3.13), (3.16), (3.17), (3.18), (3.20), (3.21), (3.22):

$$\frac{\partial \mathring{x}^i}{\partial p^{a''}}(0) = \frac{\partial x^i}{\partial p^{a''}}(0) = \sum_{d''=1}^{m'-1} a_{a''d''}(0)\, \underset{d''}{e^i}(0)$$

$$\frac{\partial \mathring{x}^i}{\partial p^{m'}}(0) = \frac{\partial x^i}{\partial p^{m'}}(0) = \underset{n}{e^i}(0)$$

$$\frac{D}{Dp^{a''}}\left(\frac{\partial \mathring{x}^i}{\partial p^{b''}}\right)(0) = \frac{D}{Dp^{a''}}\left(\frac{\partial x^i}{\partial p^{b''}}\right)(0) = \sum_{d''=1}^{m'-1} a_{\varrho d''}(0)\, \underset{d''}{e^i}(0) + \sum_{\sigma=m'}^{m_e} a_{\varrho\sigma}(0)\, \underset{\sigma}{e^i}(0)$$

$$(a'' \geq b'';\ (a''b'') = \varrho)$$

$$\frac{D}{Dp^{m'}}\left(\frac{\partial \mathring{x}^i}{\partial p^{b''}}\right)(0) = \frac{D}{Dp^{b''}}\left(\frac{\partial x^i}{\partial p^{m'}}\right)(0) = \sum_{d''=1}^{m'-1} c_{n\,d''b''}(0)\, \underset{a''}{e^i}(0) +$$

$$+ \sum_{\sigma=m'}^{m_0} \left(\frac{\partial b_\sigma}{\partial p^{b''}}(0) + c_{n\sigma b''}(0)\right) \underset{\sigma}{e^i}(0) + \sum_{\omega=m_0+1}^{n} \left(\frac{\partial b_\omega}{\partial p^{b''}}(0) + c_{n\,\omega b''}(0)\right) \underset{\omega}{e^i}(0),$$

während aus (3.29), (3.43)

$$\frac{D}{Dp^{m'}}\left(\frac{\partial \mathring{x}^i}{\partial p^{m'}}\right)(0) = \sum_{\sigma=m'}^{m_0} \underset{\sigma+1}{\mathring{A}}{}_{m'm'}(0)\, \underset{\sigma}{e^i}(0) + \sum_{\omega'=m_0+1}^{n-1} \underset{\omega'+1}{\mathring{A}}{}_{m'm'}(0)\, \underset{\omega'}{e^i}(0)$$

folgt. Hieraus schließen wir wegen $a_{a''d''}(0) = 0\,(a'' < d'')$, $a_{a''a''} \neq 0$; $a_{\varrho\sigma}(0) = 0\,(\varrho < \sigma)$, $a_{\varrho\varrho}(0) \neq 0$ nach Durchführung einiger elementarer Matrixumformungen:

$$\mathrm{Rang}\left(\frac{\partial \mathring{x}^i}{\partial p^{a'}}(0),\ \frac{D}{Dp^{b'}}\left(\frac{\partial \mathring{x}^i}{\partial p^{c'}}\right)(0)\right) = (m'-1) + 1 + \frac{m'(m'-1)}{2} +$$

$$+ \mathrm{Rang}\left(\frac{\partial b_{\omega'}}{\partial p^{b''}}(0) + c_{n\omega'b''}(0),\ \underset{\omega'+1}{\mathring{A}}{}_{m'm'}(0)\right).$$

Jetzt brauchen wir nur noch die bisher beliebig analytisch wählbaren $\underset{\omega'+1}{\mathring{A}}{}_{m'm'}(p^{c'})$ der wegen (3.19) und wegen Anzahl der $\omega' \geqq m'+1$ möglichen Einschränkung

$$\mathrm{Rang}\left(\frac{\partial b_{\omega'}}{\partial p^{b''}}(0) + c_{n\omega'b''}(0),\ \underset{\omega'+1}{\mathring{A}}{}_{m'm'}(0)\right) = m' \tag{3.54}$$

zu unterwerfen, um die gewünschte Beziehung

$$\mathrm{Rang}\left(\frac{\partial \mathring{x}^i}{\partial p^{a'}}(0),\ \frac{D}{Dp^{b'}}\left(\frac{\partial \mathring{x}^i}{\partial p^{c'}}\right)(0)\right) = \frac{m'(m'+3)}{2} \quad (1 \leqq a', b', c' \leqq m';\ b' \geqq c';\ m' < m)$$

zu erhalten. Damit ist der Beweis von Satz 1 vollendet, w.z.b.w.

Bemerkung. Wir haben beim Beweis von Satz 1 wesentlich benützt, daß der R_n und der R_m positiv definite Riemannsche Metriken besitzen. Setzen wir nur noch voraus, daß die Metriken des R_n und des R_m nicht ausgeartet sind, d. h., daß $\|g_{ij}\| \neq 0$ und $\|g_{ab}\| \neq 0$ ist, so ist eine reelle isometrische Einbettung des R_m in den R_n im allgemeinen nicht mehr möglich; die Existenz einer komplexen Einbettung zeigt allerdings der Beweis von Satz 1 nicht[18]). Völlig andere Verhältnisse herrschen, wenn der Rang der Matrix g_{ab} kleiner als m ist, wo unsere Methode völlig versagt. Hier muß z. B. unter Umständen die einzubettende Mannigfaltigkeit R_m eine Dimension m mit $\frac{m(m+1)}{2} < n$ besitzen[19]).

Wir wollen nun untersuchen, auf wie viele Arten R_m lokal, isometrisch und analytisch in den R_n eingebettet werden kann. Wir überlegen uns zunächst zu diesem Zweck, von wieviel willkürlichen Funktionen unsere konstruierte Einbettung des R_m in den R_n $\left(n \geqq \frac{m(m+1)}{2}\right)$ abhängt. Nach dem Beweis von Satz 1 sind dies die Funktionen $b_{\omega'}(p^1, \ldots, p^{m'-1})$, $\underset{\omega'+1}{A}{}_{m'm'}(p^1, \ldots, p^{m'})$ und

---

[18]) Eine komplexe Mannigfaltigkeit mit einer Hermitisch-Kählerschen Metrik läßt sich im allgemeinen nicht isometrisch in einen unitären Raum einbetten, wie CALABI [11] gezeigt hat.

[19]) Siehe J. LENSE [12]

$\underset{\lambda\mu}{T_{m'}}(p^1, \ldots, p^{m'})$[20] $\left(m_0 + 1 = \frac{m'(m'+1)}{2} \leq \omega' \leq n-1;\ m'+1 \leq \mu < \lambda \leq n;\right.$ $\left. 1 \leq m' \leq m\right)$[21]), welche sich auf die ebenfalls nicht eindeutig bestimmten Normalvektoren $\underset{\omega}{e^i}(p^1, \ldots, p^{m'-1})$ bzw. $\underset{\lambda}{n^i}(p^1, \ldots, p^{m'})$ $(m_0 + 1 \leq \omega \leq n)$ beziehen. Diese Normalvektoren lassen sich durch orthogonale, lokal analytisch von den $p^{a''}$ bzw. $p^{a'}$ abhängende Substitutionen

$$\text{(3.55)}\quad \begin{aligned} \underset{\omega}{\overset{*}{e}{}^i}(p^{a''}) &= \sum_{\tau=m_0+1}^{n} c_{\omega\tau}(p^{a''})\, \underset{\tau}{e^i}(p^{a''}) \qquad \left(\sum_{\chi=m_0+1}^{n} c_{\omega\chi}\, c_{\tau\chi} = \delta^\tau_\omega\right) \\ &\text{bzw.} \\ \underset{\lambda}{\overset{*}{n}{}^i}(p^{a'}) &= \sum_{\mu=m'+1}^{n} c_{\lambda\mu}(p^{a'})\, \underset{\mu}{n^i}(p^{a'}) \qquad \left(\sum_{\nu=m'+1}^{n} c_{\lambda\nu}\, c_{\mu\nu} = \delta^\mu_\lambda\right) \end{aligned}$$

$$(1 \leq a'' \leq m'-1;\ 1 \leq a' \leq m',\ m_0 + 1 \leq \omega, \tau \leq n,\ m'+1 \leq \lambda, \mu \leq n)$$

zu (analytischen) Normalvektoren $\underset{\omega}{\overset{*}{e}{}^i}(p^{a''})$ bzw. $\underset{\lambda}{\overset{*}{n}{}^i}(p^{a'})$ normieren, welche durch die Forderungen

$$\text{(3.56)}\qquad \underset{\omega}{\overset{*}{e}{}^i}(0) = \text{dat.} \quad \text{und} \quad g_{ij}(x^k(p^{\bar a}, 0))\, \frac{D\underset{\omega}{\overset{*}{e}{}^i}}{Dp^{\bar m}}(p^{\bar a}, 0)\, \underset{\tau}{\overset{*}{e}{}^j}(p^{\bar a}, 0) = 0$$

bzw

$$\text{(3.57)}\qquad \underset{\varrho+1}{\overset{*}{n}{}^i}(0) = \underset{\varrho}{\overset{*}{e}{}^i}(0), \quad \underset{\omega'+1}{\overset{*}{n}{}^i}(0) = \underset{\omega'}{\overset{*}{e}{}^i}(0) \qquad \text{(vgl. (3.29)!)}$$

und

$$\text{(3.58)}\qquad g_{ij}(x^k(p^{\bar a}, 0))\, \frac{D\underset{\lambda}{\overset{*}{n}{}^i}}{Dp^{\bar m}}(p^{\bar a}, 0)\, \underset{\mu}{\overset{*}{n}{}^j}(p^{\bar a}, 0) = 0$$

sowie

$$\text{(3.59)}\qquad \underset{\lambda\mu}{\overset{*}{T}_{m'}}(p^{a'}) \equiv g_{ij}(x^k(p^{a'}))\, \frac{D\underset{\lambda}{\overset{*}{n}{}^i}}{Dp^{m'}}(p^{a'})\, \underset{\mu}{\overset{*}{n}{}^j}(p^{a'}) = 0\text{[22]})$$

$$(m' \leq \varrho \leq m_0,\ m_0 + 1 \leq \omega, \tau \leq n,\ m_0 + 1 \leq \omega' \leq n-1,\ m'+1 \leq \lambda, \mu \leq n;$$
$$1 \leq \bar a \leq \bar m;\ 1 \leq \bar m < m')$$

eindeutig festgelegt sind. Dies folgt nämlich für die $\underset{\omega}{e^i}(p^{a''})$ aus den sich durch Einsetzen von (3.55) in (3.56) ergebenden Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial c_{\omega\tau}}{\partial p^{\bar m}}(p^{\bar a}, 0) = -\sum_{\chi=m_0+1}^{n} \sum_{\varkappa=m_0+1}^{n} \sum_{\eta=m_0+1}^{n} c_{\omega\varkappa}(p^{\bar a}, 0)\, c_{\eta\chi}(p^{\bar a}, 0)\, c_{\eta\tau}(p^{\bar a}, 0)\, t_{\varkappa\chi\bar m}(p^{\bar a}, 0)$$

(wobei wir zur Abkürzung $t_{\varkappa\chi\bar m} = g_{ij} \frac{D\underset{\varkappa}{e^i}}{Dp^{\bar m}} \underset{\chi}{e^j}$ gesetzt haben), wenn wir sukzessive für $\bar m = 1$ bis $\bar m = m'-1$ (I) darauf anwenden und beachten, daß

[20]) Die Einschränkungen der $b_{\omega'}$ bzw. $\underset{\omega'+1}{A}\ m'm'$ durch (3.18), (3.19) und (3.54) sind in diesem Zusammenhang unwesentlich.

[21]) Man überzeugt sich leicht, daß dies auch für den bisher ausgeschlossenen Fall $m' = 1$ zutrifft.

[22]) Zur Definition der kovarianten Ableitungen vgl. (3.30).

wegen

$$t_{\varkappa\chi}{}^{\bar{m}} = -t_{\chi\varkappa}{}^{\bar{m}},$$

$$\frac{\partial}{\partial p^{\bar{m}}}\left(\sum_{\chi=m_0+1}^{n} c_{\omega\chi}(p^{\bar{a}},0)\, c_{\tau\chi}(p^{\bar{a}},0)\right) = 0, \quad \text{d. h. wegen}$$

$\sum_{\chi=m_0+1}^{n} c_{\omega\chi}(0)\, c_{\omega\chi}(0) = \delta^\tau_\omega$ allgemein $\sum_{\chi=m_0+1}^{n} c_{\omega\chi}(p^{a''})\, c_{\tau\chi}(p^{a''}) = \delta^\tau_\omega$ wird. Auf analoge Weise sieht man dies auch für die $\underset{\chi}{\eta}^i(p^{a'})$ ein.

Wir bezeichnen jetzt die sich auf diese normierten Normalvektoren beziehenden und wegen (3.59) nur noch frei wählbaren Funktionen $b_{\omega'}$ und $\underset{\omega'+1}{A}{}_{m'm'}$ mit $\overset{*}{b}_{\omega'}(p^1,\ldots,p^{m'-1})$ und $\underset{\omega'+1}{\overset{*}{A}}{}_{m'm'}(p^1,\ldots,p^{m'})$ und betrachten zwei in den R_n analytisch eingebettete Mannigfaltigkeiten $\underset{(1)}{R}_m$ und $\underset{(2)}{R}_m$ $\left(\frac{m(m+1)}{2} \leqq n\right)$, welche durch gleiche Parameterwerte p^a isometrisch aufeinander bezogen sind. Die Parameter p^a seien abschnittsweise geodätisch parallel und im Nullpunkt lokal euklidisch, d. h. es gelte:

$$g_{a'm'}(p^1,\ldots,p^{m'},0\ldots0) = \delta^{m'}_{a'} \text{ und } g_{ab}(0) = \delta^b_a,\ \frac{\partial g_{ab}}{\partial p^c}(0) = 0$$
$$(1 \leqq a' \leqq m';\ 1 \leqq m' \leqq m).$$

Weiter sollen die Nullpunkte beider Mannigfaltigkeiten übereinstimmen. Außerdem sei

$$\underset{(1)\omega}{\overset{(m')}{\overset{*}{e}}}{}^i(0) = \underset{(2)\omega}{\overset{(m')}{\overset{*}{e}}}{}^i(0)\,[23]), \tag{3.60}$$

$$\underset{(1)\omega'}{\overset{*}{b}}(p^1,\ldots,p^{m'-1}) = \underset{(2)\omega'}{\overset{*}{b}}(p^1,\ldots,p^{m'-1}) \tag{3.61}$$

und

$$\underset{(1)\omega'+1}{\overset{*}{A}}{}_{m'm'}(p^1,\ldots,p^{m'}) = \underset{(2)\omega'+1}{\overset{*}{A}}{}_{m'm'}(p^1,\ldots,p^{m'}) \tag{3.62}$$
$$(m_0+1 \leqq \omega' \leqq n-1;\ 1 \leqq m' \leqq m)$$

für diese durch (3.56), (3.21), (3.57), (3.58), (3.59) und (3.23) definierten Größen der $\underset{(1)}{R}_m$ und $\underset{(2)}{R}_m$, welche bei beiden Mannigfaltigkeiten den Bedingungen (3.18), (3.22) und (3.54) genügen sollen. Dann folgt aus (3.18), (3.22), (3.60) und (3.21): $\frac{\partial \underset{(1)}{x}{}^i}{\partial p^1}(0) = \frac{\partial \underset{(2)}{x}{}^i}{\partial p^1}(0)$, d. h. wegen (3.57), (3.61), (3.59), (3.62) und (3.23):

$$\underset{(1)}{x}{}^i(p^1,0\ldots0) = \underset{(2)}{x}{}^i(p^1,0\ldots0) \text{ mit Rang}\left(\frac{\partial \underset{(1)}{x}{}^i}{\partial p^1}(0),\ \frac{D}{Dp^1}\left(\frac{\partial \underset{(1)}{x}{}^i}{\partial p^1}\right)(0)\right) = 2$$

(nach (3.54)).

Gehen wir den Beweis von Satz 1 weiter durch, so finden wir wegen (3.61), (3.16), (3.22), (3.60), (3.56) und (3.21) $\frac{\partial \underset{(1)}{x}{}^i}{\partial p^2}(p^1,0\ldots0) = \frac{\partial \underset{(2)}{x}{}^i}{\partial p^2}(p^1,0\ldots0)$,

[23]) Hiermit sei angedeutet, daß die $\underset{\omega}{\overset{*}{e}}{}^i$ für jede Untermannigfaltigkeit $p^{m'} = \cdots = p^m = 0$ von $\underset{(1)}{R}_m$ bzw. $\underset{(2)}{R}_m$ selbständig definiert sind.

d. h. die Anfangsbedingungen (3.31) für das Cauchy-Kowalewskische System (3.34), (3.35) ($m' = 2$) sind für $\underset{(1)}{R}_m$ und $\underset{(2)}{R}_m$ dieselben. Dieses System gilt nun wegen (2.7) und (3.26) für beide Mannigfaltigkeiten, da sich die Elimination von $\underset{\varrho+1}{\overset{*}{A}}_{m'm'}$ nach (3.32) jeweils ausführen läßt, so daß aus der Einzigkeit seiner Lösungen

$$\underset{(1)}{x}^i(p^1, p^2, 0 \ldots 0) = \underset{(2)}{x}^i(p^1, p^2, 0 \ldots 0)$$

folgt. Auf diese Weise fortfahrend erhalten wir schließlich

$$\underset{(1)}{x}^i(p^1, \ldots, p^m) = \underset{(2)}{x}^i(p^1, \ldots, p^m)$$

und haben damit folgenden Satz bewiesen:

Satz 2. Die lokal analytische, isometrische Einbettung einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit mit analytischer, positiv definiter Riemannscher Metrik in eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit analytischer, positiv definiter Metrik $\left(\frac{m(m+1)}{2} \leqq n\right)$ hängt neben einigen Konstanten von $2n - (m'+1)^2$ Funktionen von m' Parametern ($1 \leqq m' < m$) und $n - \frac{m(m+1)}{2}$ Funktionen von m Parametern ab.

Dazu ist noch zu beachten, daß die Parameter, auf die sich die in diesem Satz angeführten Funktionen beziehen, normiert sind. Folgender speziell in Satz 2 auftretender Fall verdient noch etwas näher hervorgehoben zu werden:

Satz 3. Für $n = \frac{m(m+1)}{2}$ ist die lokal analytische und isometrische Einbettung des R_m in den R_n durch die Einbettung einer $(m-1)$-dimensionalen, analytischen Untermannigfaltigkeit R_{m-1} des R_m bis auf genau zwei Arten eindeutig bestimmt, falls R_{m-1} nicht Asymptotenhyperfläche von R_m ist.

Hierbei wird in Verallgemeinerung des Begriffs der Asymptotenlinie einer Fläche des dreidimensionalen Raums die Hyperfläche $u^m = 0$ des durch $x^i = x^i(u^a)$ in den R_n eingebetteten R_m $\left(\frac{m(m+1)}{2} \leqq n\right)$ als „Asymptotenhyperfläche" R_{m-1} von R_m definiert, wenn in jedem Punkt von R_{m-1} der Verbindungsraum vom Krümmungsgebiet des R_{m-1} und vom Tangentialraum des R_m eine Dimension kleiner als $\frac{m(m+1)}{2}$ besitzt[24]), oder (analytisch ausgedrückt) wenn für alle $(u^1, \ldots, u^{m-1}) = (u^{\bar{a}})$

$$\text{Rang}\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^a}(u^{\bar{a}}, 0), \frac{\overline{D}}{\overline{D}u^{\bar{b}}}\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^{\bar{c}}}\right)(u^{\bar{a}}, 0)\right) < \frac{m(m+1)}{2} \qquad (1 \leqq \bar{b}, \bar{c} \leqq m-1)$$

ist[25]). Aus dieser Definition folgt sofort, daß speziell jede überall nichtplanar in R_n eingebettete R_{m-1} des R_m Asymptotenhyperfläche des R_m ist.

Der Beweis von Satz 3 ergibt sich leicht aus der Beweisanordnung von Satz 1. Man sieht nämlich zunächst unter Benutzung von auf R_{m-1} bezogenen geodätischen Parallelkoordinaten p^a des R_m, daß durch die nach Vor-

[24]) Den Fall, daß dies nur im Nullpunkt, nicht aber in allen Punkten gilt, wollen wir hier ausdrücklich ausschließen.

[25]) Mit dieser Schreibweise der durch (3.9) definierten kovarianten Ableitung ist gemeint, daß diese sich hier auf R_{m-1} bezieht.

aussetzung planar im R_n eingebettete R_{m-1} wegen (3.10) und (3.11) bzw. den damit äquivalenten Gln. (3.15) und (3.16) höchstens zwei verschiedene, zum R_m isometrische Streifen gehen. Diese Streifen können nicht zusammenfallen, da sonst

$$b_n(p^{\bar{a}}) = 0, \text{ d. h. wegen } (3.21)\, \frac{\partial x^i}{\partial p^m}(p^{\bar{a}}) = \sum_{\sigma=m'}^{m_0} b_\sigma(p^{\bar{a}})\, \underset{\sigma}{e}^i(p^{\bar{a}}) \qquad (1 \leqq \bar{a} \leqq m-1)$$

gelten würde und damit der Tangentialraum von R_m im Krümmungsgebiet von R_{m-1} enthalten wäre, was der Voraussetzung, daß R_{m-1} nicht Asymptotenhyperfläche des R_m sein soll, widerspricht. Durch jeden der beiden Streifen geht genau eine zu R_m isometrische Mannigfaltigkeit, wie aus dem Beweis von Satz 1 und Satz 2 unter Berücksichtigung der Tatsache gefolgert werden kann, daß nach Voraussetzung:

$$\operatorname{Rang}\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^a}(0), \frac{\bar{D}}{\bar{D}u^{\bar{b}}}\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^{\bar{c}}}\right)(0)\right) = \operatorname{Rang}\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^a}(0), \frac{D}{Du^{\bar{b}}}\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^{\bar{c}}}\right)(0)\right) =$$

$$= \operatorname{Rang}\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^a}(0), \sum_{\lambda=m+1}^{n} \underset{\lambda}{A}^{\bar{b}\bar{c}}(0)\, \underset{\lambda}{n}^i(0)\right) = \frac{m(m+1)}{2}; \text{ d. h.}$$

$$\left\| \underset{\lambda}{A}^{\bar{b}\bar{c}}(0) \right\| = \left\| \underset{\varrho+1}{A}^{\bar{b}\bar{c}}(0) \right\| \neq 0 \qquad (\bar{b} \geq \bar{c})$$

ist, also (3.32) zutrifft[25a]).

Hiermit ist Satz 3 schon bewiesen. Wir bemerken noch, daß man auf dieselbe Weise zeigen kann:

Für $\dfrac{m(m+1)}{2} > n$ ist eine analytische, isometrische Einbettung des R_m in den R_n durch die Einbettung jeder planaren, analytischen Hyperfläche R_{m-1}, die in R_m enthalten ist, völlig eindeutig bestimmt.

§ 4. Einige Verbiegbarkeitssätze in Riemannschen Räumen

Satz 1 läßt bemerkenswerte Erweiterungen zu, welche sich als Verallgemeinerungen bekannter Darbouxscher Verbiegungssätze erweisen werden. Wir schicken dazu einige Definitionen voraus: Zuerst definieren wir die (endliche) lokal *analytische* Verbiegung der Mannigfaltigkeit $x^i(u^a)$ des R_n mit positiv definiter Riemannscher Metrik durch die vom Parameter t analytisch abhängende Schar nichtkongruenter Mannigfaltigkeiten $x^i(u^a, t)$[26]), (d. h. die Funktionen $x^i(u^a, t)$ sind in allen Punkten $(0, t)$ analytisch), wobei

$$(4.1) \quad x^i(u^a, 0) = x^i(u^a) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t}\left[g_{ij}(x^k(u^c, t))\, \frac{\partial x^i}{\partial u^a}(u^c, t)\, \frac{\partial x^j}{\partial u^b}(u^c, t)\right] = 0$$

ist. Wir nennen zwei nichtkongruente isometrische Mannigfaltigkeiten $\underset{(1)}{x}^i(u^a)$ und $\underset{(2)}{x}^i(u^a)$ lokal *analytisch* ineinander verbiegbar, wenn eine derartige Schar $x^i(u^a, t)$ mit $x^i(u^a, 0) = \underset{(1)}{x}^i(u^a)$ und $x^i(u^a, 1) = \underset{(2)}{x}^i(u^a)$ existiert. Weiter bezeichnen wir einen Punkt P_0 des in den R_n eingebetteten Riemannschen

[25a]) (3.32) war auf S. 456 mit Hilfe von Gl. (3.7) bewiesen worden, die hier im allgemeinen nicht richtig ist.

[26]) Zwei Mannigfaltigkeiten im R_n sollen kongruent heißen, wenn eine isometrische, positive Selbstabbildung des R_n existiert, die die eine Mannigfaltigkeit in die andere überführt.

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

[illegible]

Raums $R_m \left(\frac{m(m+1)}{2} \leq n\right)$ als einen Flachpunkt, wenn jede durch P_0 gehende, in R_m liegende und zweimal stetig differenzierbare Hyperfläche R_{m-1} sich in P_0 wie eine Asymptotenhyperfläche verhält, d. h. wenn die Dimension des Verbindungsraums vom Krümmungsgebiet der R_{m-1} in P_0 und vom Tangentialraum des R_m in P_0 kleiner als $\frac{m(m+1)}{2}$ ist. Diese Definition ist eine Verallgemeinerung der bekannten Definition eines Flachpunkts einer zweidimensionalen Fläche im dreidimensionalen Raum. Jetzt gilt:

Satz 4.

Vor.: R_m sei ein m-dimensionaler Riemannscher Raum, welcher in einer Umgebung seines Nullpunkts analytisch in den n-dimensionalen Riemannschen Raum R_n mit $\frac{m(m+1)}{2} \leq n$ und analytischer (positiv definiter) Metrik isometrisch eingebettet sei. Der Nullpunkt von R_m sei nicht Flachpunkt.

Beh.: Dann läßt sich der R_m in dem R_n lokal analytisch verbiegen.

Beweis. Da nach Voraussetzung der Nullpunkt nicht Flachpunkt von dem durch $x^i = x^i(u^a)$ dargestellten R_m ist, gibt es auf R_m eine durch ihn gehende (zweimal stetig differenzierbare) Hyperfläche $\bar{R}_{m-1}$, welche durch $u^a = u^a(v^{\bar{a}})$ $(1 \leq \bar{a} \leq m-1)$ gegeben ist und für die der Verbindungsraum von ihrem Krümmungsgebiet und dem Tangentialraum des R_m im Nullpunkt die maximal mögliche Dimension besitzt. Wir nehmen an, die Parameter u^a von R_m seien im Nullpunkt lokal euklidisch. Dann gilt also:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Rang}\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^a}(0), \frac{D}{Dv^{\bar{b}}}\left(\frac{\partial x^i}{\partial v^{\bar{c}}}\right)(0)\right) = \operatorname{Rang}\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^a}(0), \frac{\partial^2 u^a}{\partial v^{\bar{b}}\partial v^{\bar{c}}}(0)\frac{\partial x^i}{\partial u^a}(0) + \right.\\
(4.2)\qquad &\left. + \frac{\partial u^b}{\partial v^{\bar{b}}}(0)\frac{\partial u^c}{\partial v^{\bar{c}}}(0)\frac{D}{Du^b}\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^c}\right)(0)\right) = \operatorname{Rang}\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^a}(0),\right.\\
&\left.\frac{\partial u^b}{\partial v^{\bar{b}}}(0)\frac{\partial u^c}{\partial v^{\bar{c}}}(0)\frac{D}{Du^b}\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^c}\right)(0)\right) = \frac{m(m+1)}{2} \qquad (1 \leq \bar{b}, \bar{c} \leq m-1).
\end{aligned}$$

Diese Beziehung bleibt richtig, wenn wir die $\bar{R}_{m-1}$ durch eine andere Hyperfläche ersetzen, welche im Nullpunkt denselben Tangentialraum wie die $\bar{R}_{m-1}$ besitzt[27]), also etwa (nach geeigneter Drehung des Systems u^a um den Nullpunkt) durch die Hyperfläche $u^{\bar{a}} = v^{\bar{a}}$, $u_m = 0$, die wir mit R_{m-1} bezeichnen wollen. Wir definieren weiter auf der R_{m-1}, die Folge von sich enthaltenden Mannigfaltigkeiten $R_{m-2}, R_{m-3}, \ldots, R_1$ durch die Gleichungen $u^m = u^{m-1} = 0$, $u^m = u^{m-1} = u^{m-2} = 0$ usw. und führen wie beim Beweis von Satz 1 in bezug auf diese Folge des R_m abschnittsweise analytische, geodätische Parallelkoordinaten p^a ein. Jetzt sehen wir, daß alle $R_{m'}$ im Nullpunkt planar sind $(1 \leq m' \leq m-1)$. Die R_{m-1} ist nämlich wegen (4.2) im Nullpunkt planar, d. h. der Rang der Matrix $\left(\frac{\partial x^i}{\partial p^{\bar{a}}}(0)\ \frac{D}{Dp^{\bar{b}}}\left(\frac{\partial x^i}{\partial p^{\bar{c}}}\right)(0)\right)$ $(1 \leq \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \leq m-1)$ ist maximal, weshalb auch der Rang der Teilmatrix $\left(\frac{\partial x^e}{\partial p^{a''}}(0), \frac{D}{Dp^{b''}}\left(\frac{\partial x^i}{\partial p^{c''}}\right)(0)\right)$ $(1 \leq a'', b'', c'' \leq m'-1)$ dieser Matrix maximal,

[27]) Das Verhalten einer Hyperfläche R_{m-1} des R_m als Asymptotenhyperfläche in einem Punkt hängt also nur von dem Tangentialraum der R_{m-1} in diesem Punkt ab.

d. h. die $R_{m'-1}$ in der Tat im Nullpunkt planar sein muß. Wir können nun nach (3.13) und (3.21) die Streifengrößen $\underset{a''}{e}(p^{a''})$, $\underset{\varrho}{e^i}(p^{a''})$ und $\underset{\omega}{e^i}(p^{a''})$ sowie $b_\varrho(p^{a''})$ und $b_\omega(p^{a''})$ einführen und ohne Einschränkung der Allgemeinheit wegen (3.17) und (3.21) $\underset{n}{e^i}(0) = \frac{\partial x^i}{\partial p^{m'}}(0)$, d. h.

$$b_n(0) = 1 \tag{4.3}$$

annehmen. Setzen wir dann $\underset{\varrho+1}{n^i}(0) = \underset{\varrho}{e^i}(0)$ und $\underset{\omega'+1}{n^i}(0) = \underset{\omega'}{e^i}(0)$ $(m' \leqq \varrho \leqq m_0,$ $m_0 + 1 \leqq \omega' \leqq n - 1)$, so erhalten wir analog (3.32):

$$\left\| \underset{\varrho+1}{A}{}_{b''c''}(0) \right\| \neq 0. \tag{4.4}$$

Nach diesen Vorbereitungen bemerken wir Folgendes: Sicher läßt sich die planare R_1 im R_n im Sinne unserer Definition eigentlich, d. h. nichtkongruent und lokal analytisch verbiegen; wir brauchen dazu nur etwa dafür zu sorgen, daß ihre metrische Invariante

$$g_{ij}(0)\frac{D}{Dp^1}\left(\frac{\partial x^i}{\partial p^1}\right)(0)\frac{D}{Dp^1}\left(\frac{\partial x^j}{\partial p^1}\right)(0) = \sum_{\lambda=2}^{n}\left(\underset{\lambda}{A}_{11}(0)\right)^2$$

nicht konstant bleibt[28]). Wir werden Satz 4 bewiesen haben, wenn wir zeigen können, daß es zu jeder lokal analytischen Verbiegung von $R_{m'-1}$ eine lokal analytische Verbiegung von $R_{m'}$ gibt, die die Verbiegung von $R_{m'-1}$ enthält $(2 \leqq m' \leqq m)$. Nun zieht eine analytische Verbiegung von der planaren $R_{m'-1}$ sicher wieder eine analytische Verbiegung des durch die $R_{m'-1}$ gehenden Streifens der $R_{m'}$ nach sich, da dieses Problem wegen (3.15) und (3.16) auf die Lösung des algebraischen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma=m'}^{m_0} a_{\varrho\sigma}(p^{c''}, t)\, b_\sigma(p^{c''}, t) &= -\frac{1}{2}\frac{\partial g_\varrho}{\partial p^{m'}}(p^{c''}, 0 \ldots 0) \\ \sum_{\sigma=m'}^{m_0}(b_\sigma(p^{c''}, t))^2 + \sum_{\omega=m_0+1}^{n}(b_\omega(p^{c''}, t))^2 &= 1 \end{aligned} \qquad (1 \leqq c'' \leqq m'-1)$$

hinauskommt. Danach bestimmt sich nämlich wegen $\|a_{\varrho\sigma}(0, 0)\| \neq 0$ b_σ als analytische Funktion von $p^{c''}$ und t; und ebenso bestimmen sich die b_ω etwa durch die Gleichungen

$$b_{\omega'}(p^{c''}, t) = b_{\omega'}(p^{c''}),$$
$$b_n(p^{c''}, t) = \overset{+}{\sqrt{1 - \sum_{\sigma=m'}^{m_0}(b_\sigma(p^{c''}, t))^2 - \sum_{\omega'=m_0+1}^{n-1}(b_{\omega'}(p^{c''}))^2}}$$

wegen (4.3) als analytische Funktionen von $p^{c''}$ und t. Weiter zieht aber die analytische Verbiegung des Streifens auch die analytische Verbiegung der $R_{m'}$ selbst nach sich; denn die $R_{m'}$ läßt sich wie beim Beweis von Satz 1 durch Lösung eines durch Elimination von $\underset{\varrho+1}{A}{}_{m'm'}$ aus (3.38) entstehenden Cauchy-Kowalewskischen Systems mit den durch den Streifen der $R_{m'}$ gegebenen Anfangswerten bestimmen. Die Verbiegung der $R_{m'}$ wird jetzt durch die Lösung $\mathring{x}^i(p^{a'}, t)$ desselben (nicht von t abhängenden) Systems mit den durch

[28]) Beweis etwa durch Integration der Ableitungsgleichungen (3.23) für eine Kurve nach (I').

die $R_{m'}$ gegebenen Funktionen $\underset{\omega'+1}{A}{}_{m'm'}(p^{a'})$ und $\underset{\lambda\mu}{T}{}_{m'}(p^{a'})$ $(\lambda > \mu)$ unter den Anfangsbedingungen

$$\underset{\lambda}{\overset{\circ}{A}}{}_{a'b''}(p^{c''}, 0, t) = \underset{\lambda}{A}{}_{a'b''}(p^{c''}, t)\ (a' \geqq b''),\ \underset{\lambda\mu}{\overset{\circ}{T}}{}_{b''}(p^{c''}, 0, t) = \underset{\lambda\mu}{T}{}_{b''}(p^{c''}, t)\ (\lambda > \mu),$$
$$\overset{\circ}{x}{}^{i}(p^{c''}, 0, t) = x^{i}(p^{c''}, t),\ \overset{\circ}{x}{}^{i}_{a'}(p^{c''}, 0, t) = x^{i}_{a'}(p^{c''}, t),\ \underset{\lambda}{\overset{\circ}{n}}{}^{i}(p^{c''}, 0, t) = \underset{\lambda}{n}{}^{i}(p^{c''}, t)$$

dargestellt, wobei die rechtsstehenden Funktionen dieser Anfangsbedingungen nach dem vorhin Gesagten im Nullpunkt analytisch von den $p^{c''}$ und t abhängen. Diese Lösung existiert nämlich eindeutig, da die dafür entscheidende Bedingung $\left\| \underset{\varrho+1}{A}{}_{b''c''}(0, 0) \right\| \neq 0$ wegen (4.4) erfüllt ist, und hängt auf Grund der Verallgemeinerung (I') von (I) im Nullpunkt analytisch von $p^{a'}$ und t ab. Damit ist der Beweis von Satz 4 erbracht.

Man kann einer durch $x^i(u^a, t)$ gegebenen analytischen Verbiegung der analytischen Mannigfaltigkeit $x^i(u^a)$ den Vektor $z^i(u^a) = \frac{\partial x^i}{\partial t}(u^a, 0)$ als Verbiegungsvektor zuordnen, dieser genügt dann wegen (4.1) den Beziehungen

$$g_{ij}\frac{Dz^i}{Du^a}\frac{\partial x^j}{\partial u^b} + g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial u^a}\frac{Dz^j}{Du^b} = 0, \tag{4.5}$$

wobei die kovarianten Ableitungen des Vektors z^i wie bei (3.30) definiert sind. Wenn die Mannigfaltigkeiten $x^i(u^a, t)$ durch eine (nach t stetig differenzierbare) Schar $\overline{x}^i = \overline{x}^i(x^j, t)$ von isometrischen Selbstabbildungen des R_n aus der Mannigfaltigkeit $x^i(u^a, 0)$ hervorgehen, d. h. wenn die Verbiegung des R_m uneigentlich ist, gilt für den Verbiegungsvektor $z^i(u^a)$ neben (4.5) noch:

$$z^i(u^a) = y^i(x^j(u^a, 0)), \tag{4.6}$$

wobei für die Funktionen $y^i(x^j) = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial t}(x^j, 0)$ nach der Definition der $\overline{x}^i(x^j, t)$ die schon von Killing aufgestellten Gleichungen

$$g_{ik}\frac{Dy^k}{Dx^j} + g_{jk}\frac{Dy^k}{Dx^i} = 0 \tag{4.7}$$

bestehen. (Diese kovariante Ableitung des kontravarianten Vektors y^i ist dabei in der üblichen Weise mittels des Fundamentaltensors g_{ij} definiert!) Wir nennen deshalb einen Verbiegungsvektor z^i uneigentlich, wenn für ihn (4.6) und (4.7) gilt. Weiter definieren wir: Eine (einmal stetig differenzierbare) Mannigfaltigkeit $x^i(u^a)$ heißt infinitesimal verbiegbar, wenn auf ihr ein Feld $z^i(u^a)$ von eigentlichen Verbiegungsvektoren existiert. Nun folgt aus Satz 4 sofort das

Korollar: Jede analytische, m-dimensionale Untermannigfaltigkeit R_m des Riemannschen Raums R_n mit analytischer, positiv definiter Metrik $\left(\frac{m(m+1)}{2} \leq n\right)$, deren Nullpunkt kein Flachpunkt ist, ist infinitesimal verbiegbar.

Als Erweiterung von Satz 4 beweisen wir noch:

Satz 5.

Vor.: Seien $\underset{(1)}{R}_m$ und $\underset{(2)}{R}_m$ zwei durch gleiche Parameter aufeinander bezogene, isometrische, analytisch in den R_n mit $\frac{m(m+1)}{2} < n$[29]) und (positiv definiter) analytischer Riemannscher Metrik eingebettete Mannigfaltigkeiten. Die Nullpunkte von $\underset{(1)}{R}_m$ und $\underset{(2)}{R}_m$ sollen in derselben Koordinatenumgebung (x^i) des R_n liegen[30]) und seien beide keine Flachpunkte.

Beh.: Dann läßt sich $\underset{(1)}{R}_m$ in $\underset{(2)}{R}_m$ analytisch verbiegen.

Beweis: Wir gehen wie beim Beweis des vorigen Satzes von einer durch $u^m = 0$ dargestellten Hyperfläche $\underset{(1)}{\overline{R}}_{m-1}$ der durch $\underset{(1)}{x}^i(u^a)$ gegebenen $\underset{(1)}{R}_m$ aus, die sich im Nullpunkt nicht wie eine Asymptotenhyperfläche verhält, und können dabei wieder annehmen, daß die u^a im Nullpunkt lokal euklidisch sind. $\underset{(1)}{\overline{R}}_{m-1}$ entspricht auf der durch $\underset{(2)}{x}^i(u^a)$ gegebenen $\underset{(2)}{R}_m$ die isometrische Hyperfläche $\underset{(2)}{\overline{R}}_{m-1}$. Die letztere könnte sich im Nullpunkt wie eine Asymptotenhyperfläche verhalten. Dies gilt jedoch nicht für alle ihr benachbarten Hyperflächen der $\underset{(2)}{R}_m$, da anderenfalls wegen (4.2) die Gramsche Determinante der Matrix

$$\left(\frac{\partial \underset{(2)}{x}^i}{\partial u^a}(0), \frac{\partial u^b}{\partial v^{\bar{b}}}(0)\, \frac{\partial u^c}{\partial v^{\bar{c}}}(0)\, \frac{D}{Du^b}\left(\frac{\partial \underset{(2)}{x}^i}{\partial u^c}\right)(0)\right)$$

für alle $\frac{\partial u^a}{\partial v^{\bar{a}}}(0)$, die sich wenig von $\delta^a_{\bar{a}}$ unterscheiden, Null sein müßte, was für sie als Polynom in den $\frac{\partial u^a}{\partial v^{\bar{a}}}(0)$ das identische Verschwinden zur Folge hätte $(1 \leq \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \leq m-1)$. Dies steht jedoch mit der Voraussetzung im Widerspruch, daß der Nullpunkt von $\underset{(2)}{R}_m$ kein Flachpunkt ist. Es existiert also sicher eine zu $\underset{(2)}{\overline{R}}_{m-1}$ benachbarte Hyperfläche $\underset{(2)}{R}_{m-1}$, die sich genauso wie die ihr auf $\underset{(1)}{R}_m$ entsprechende Hyperfläche $\underset{(1)}{R}_{m-1}$ nicht im Nullpunkt wie eine Asymptotenhyperfläche verhält. Beide Hyperflächen können in einem im Nullpunkt lokal euklidischen, geeigneten abschnittsweise geodätischen Parallelkoordinatensystem p^a durch $p^m = 0$ dargestellt werden.

Wir definieren nun weiter wie beim Beweis von Satz 4 die jeweils im Nullpunkt planaren Mannigfaltigkeiten $\underset{(g)}{R}_{m-2}, \underset{(g)}{R}_{m-3}, \ldots, \underset{(g)}{R}_1$ $(g = 1, 2)$. Außerdem setzen wir voraus, daß $\underset{(1)}{R}_{m'-1}$ schon durch die im Nullpunkt planaren Mannigfaltigkeiten $x^i(p^{a''}, t)$ analytisch in $\underset{(2)}{R}_{m'-1}$ verbogen werde $\left(0 \leq t \leq 1;\ \underset{(1)}{x}^i(p^{a''}) = x^i(p^{a''}, 0),\ \underset{(2)}{x}^i(p^{a''}) = x^i(p^{a''}, 1)\right)$. Für $m' = 2$ ist dies sicher auf eine solche Weise möglich, daß $x^i(0, t)$ stets der Koordinatenumgebung (x^i) angehört, und wir denken uns eben diese Verbiegung zur angegebenen Verbiegung von $\underset{(1)}{R}_{m'-1}$ in $\underset{(2)}{R}_{m'-1}$ fortgesetzt. Es ist jetzt nur noch nötig, zu zeigen, daß die

[29]) Daß hier kein Gleichheitszeichen stehen kann, zeigt das Beispiel zweier in bezug auf eine Tangentialebene spiegelsymmetrischer, orientierter, positiv gekrümmter Flächenstücke des dreidimensionalen euklidischen Raums, die sich nicht stetig ineinander verbiegen lassen.

[30]) Diese Umgebung sei als konvex angenommen.

Verbiegung von $\underset{(1)}{R}_{m'-1}$ zu einer dieselbe enthaltenden Verbiegung von $\underset{(1)}{R}_{m'}$ mittels für $m' < m$ planaren Mannigfaltigkeiten in R_n fortgesetzt werden kann $(2 \leq m' \leq m)$, um Satz 5 durch vollständige Induktion zu beweisen. Dies geschehe folgendermaßen:

Man kann zunächst zu $x^i(p^{a''}, t)$ wegen der Planarität der Mannigfaltigkeiten dieser Schar nach dem Muster von (3.13) die von $p^{a''}$ und t analytisch abhängenden Vektoren $\underset{d''}{e}^i(p^{a''}, t)$ und $\underset{\varrho}{e}^i(p^{a''}, t)$ $(1 \leq a'', d'' \leq m'-1, m' \leq \varrho \leq m_0)$ definieren. Weiter setzen wir

$$(4.8) \qquad \underset{n}{e}^i(0,0) = \frac{\partial \underset{(1)}{x}^i}{\partial p^{m'}}(0) \quad \text{und} \quad \underset{n}{e}^i(0,1) = \frac{\partial \underset{(2)}{x}^i}{\partial p^{m'}}(0),$$

was wegen (3.13), (3.15) und (3.16) in beiden Fällen sinnvoll ist, und ergänzen diese Vektoren durch die Vektoren $\underset{\omega'}{e}^i(0,0)$ und $\underset{\omega'}{e}^i(0,1)$ $(m_0 + 1 \leq \omega' \leq n-1)$ zu zwei orthogonal normierten Systemen von n Vektoren mit n Komponenten. Durch geignete Wahl der wegen $m_0 + 1 \leq \frac{m(m+1)}{2} < n$ wirklich vorkommenden $\underset{\omega'}{e}^i$ können wir dabei erreichen, daß beide Orthogonalsysteme gleich orientiert sind. Die $\underset{\omega}{e}^i(0,0)$ $(m_0 + 1 \leq \omega \leq n)$ können durch eine stetige Schar von $n - m_0$ Vektoren $\underset{\omega}{e}^i(0,t)$ so mit den $\underset{\omega}{e}^i(0,1)$ verbunden werden, daß für jedes t die $\underset{\omega}{\bar{e}}^i(0,t)$ zusammen mit den schon definierten Vektoren $\underset{d''}{e}^i(0,t)$ und $\underset{\varrho}{e}^i(0,t)$ linear unabhängig sind. Auf Grund der Verschärfung des Weierstrassschen Approximationssatzes von Bernstein[31]) lassen sich weiter die $\underset{\omega}{\bar{e}}^i(0,t)$ durch die Polynome in t $\underset{\omega}{p}^i(0,t)$ ohne Änderung der Randwerte so gut approximieren, daß ebenfalls für jedes t die $\underset{\omega}{p}^i(0,t)$ zusammen mit $\underset{d''}{e}^i(0,t)$ und $\underset{\varrho}{e}^i(0,t)$ linear unabhängig sind. Die Orthogonalisierung der $\underset{d''}{e}^i(p^{b''}, t)$ und $\underset{\varrho}{e}^i(p^{b''}, t)$ zusammen mit $\underset{\omega}{p}^i(0,t)$ liefert uns schließlich die von allen Argumenten für alle t und $p^{b''} = 0$ analytisch abhängenden, orthogonal normierten Vektoren $\underset{\omega}{e}^i(p^{b''}, t)$, welche (4.8) genügen.

Nun können wir mittels (3.15) und (3.21) die analytischen Funktionen $\underset{\varrho}{b}(p^{a''}, t)$ sowie $\underset{\omega}{b}(p^{a''}, 0)$ und $\underset{\omega}{b}(p^{a''}, 1)$ gewinnen, für welche wegen (4.8):

$$(4.9) \qquad b_{\omega'}(0,0) = 0 \quad \text{und} \quad b_{\omega'}(0,1) = 0$$

gilt. Wir führen noch die analytischen Funktionen

$$c_{n\omega' b''}(0,t) = g_{ij}(x^k(0,t)) \frac{D\underset{n}{e}^i}{Dp^{b''}}(0,t)\, \underset{\omega'}{e}^j(0,t)$$

ein und verbinden die Matrix $(\underset{\omega'}{d}_{b''})(0,0) = \frac{\partial \underset{\omega'}{b}}{\partial p^{b''}}(0,0) + c_{n\omega' b''}(0,0)$ $(1 \leq b'' \leq m'-1;\ m_0 + 1 \leq \omega' \leq n-1)$ analytisch durch $\underset{\omega'}{d}_{b''}(0,t)$ mit der ent-

[31]) Vgl. dazu [13], Aufg. 144—146. Auf diesen Satz hat mich Herr Flohr aufmerksam gemacht.

sprechend definierten Matrix $(\underset{\omega'}{d}_{b''})(0, 1)$. Dies ist im Falle $m' < m$ infolge des schon angeführten Satzes von BERNSTEIN sicher so möglich, daß für jedes t

(4.10) $$\text{Rang}\,(\underset{\omega'}{d}_{b''}(0, t)) = m' - 1 \qquad (m' < m)$$

ist, da diese Beziehung bei $m' < m$ wegen der Planarität von $\underset{(1)}{R}_{m'}$ und $\underset{(2)}{R}_{m'}$ und wegen (3.21) sicher für die beiden Randstellen gültig ist (vgl. S. 462). Jetzt setzen wir

$$b_{\omega'}(p^{a''}, t) = \sum_{b''=1}^{m'-1} (\underset{\omega'}{d}_{b''}(0, t) - c_{n\,\omega' b''}(0, t))\, p^{b''} + \underset{\omega'}{R}(p^{a''}, t),$$
$$(m_0 + 1 \leq \omega' \leq n - 1)$$

wobei

$$\underset{\omega'}{R}(p^{a''}, t) = (1 - t)\left(b_{\omega'}(p^{a''}, 0) - \sum_{b''=1}^{m'-1} \frac{\partial b_{\omega'}}{\partial p^{b''}}(0, 0)\, p^{b''}\right) + $$
$$+ t\left(b_{\omega'}(p^{a''}, 1) - \sum_{b''=1}^{m'-1} \frac{\partial b_{\omega'}}{\partial p^{b''}}(0, 1)\, p^{b''}\right)$$

sein soll, und definieren:

$$b_n(p^{a''}, t) = \overset{+}{\sqrt{1 - \sum_{\varrho = m'}^{m_0} (b_\varrho(p^{a''}, t))^2 - \sum_{\omega' = m_0 + 1}^{n-1} (b_{\omega'}(p^{a''}, t))^2}}\,.$$

Dann sind diese Funktionen $b_\omega(p^{a''}, t)$ in allen Punkten $(0, t)$ analytisch, genügen wegen (4.9) und (4.10) den Beziehungen:

(4.11) $$b_{\omega'}(0, t) = 0; \quad b_n(0, t) = 1$$

sowie

(4.12) $$\text{Rang}\left(\frac{\partial b_{\omega'}}{\partial p^{b''}}(0, t) + c_{n\omega' b''}(0, t)\right) = m' - 1$$
$$(m' < m)$$

und nehmen für $t = 0$ und $t = 1$ die schon definierten Werte an. Damit können wir auch den durch $\underset{(1)}{R}_{m-1}$ gehenden Streifen von $\underset{(1)}{R}_m$ mit dem entsprechenden Streifen von $\underset{(2)}{R}_m$ analytisch verbinden; wir brauchen dazu nur $\frac{\partial x^i}{\partial p^{m'}}(p^{a''}, t)$ durch:

(4.13) $$\frac{\partial x^i}{\partial p^{m'}}(p^{a''}, t) = \sum_{\varrho = m'}^{m_0} b_\varrho(p^{a''}, t)\, \underset{\varrho}{e}^i(p^{a''}, t) + \sum_{\omega = m_0+1}^{n} b_\omega(p^{a''}, t)\, \underset{\omega}{e}^i(p^{a''}, t)$$

zu definieren.

Nun führen wir unter Benutzung von (4.11) und (4.13) auf der Streifenschar die Normalvektoren $\underset{\lambda}{n}^i(p^{a''}, t)$ sowie $\underset{\lambda}{n}^i(p^{b'}, 0)$ und $\underset{\lambda}{n}^i(p^{b'}, 1)$ $(m' + 1 \leq \lambda \leq n)$ durch Orthogonalisierung der Vektoren

(4.14) $$\underset{\varrho+1}{n}^i(0, t) = \underset{\varrho}{e}^i(0, t) \text{ und } \underset{\omega'+1}{n}^i(0, t) = \underset{\omega'}{e}^i(0, t)$$
$$(m' \leq \varrho \leq m_0,\ m_0 + 1 \leq \omega' \leq n - 1)$$

auf den Vektoren $\frac{\partial x^i}{\partial p^{a'}}(p^{a''}, t)$ sowie $\frac{\partial x^i}{\partial p^{a'}}(p^{b'}, 0)$ und $\frac{\partial x^i}{\partial p^{a'}}(p^{b'}, 1)$ $(1 \leq a', b' \leq m')$ ein. Diese Normalvektoren enthalten die angegebenen Vektoren

für $p^{a''} = 0$ und hängen von allen Argumenten analytisch ab. Daraufhin setzen wir

$$\underset{\omega'+1}{A}{}^{m'm'}(p^{a'}, 0) = g_{ij}\big(\underset{(1)}{x}{}^{k}(p^{a'})\big)\,\frac{D}{Dp^{m'}}\left(\frac{\partial \underset{(1)}{x}{}^{i}}{\partial p^{m'}}\right)(p^{a'})\;\underset{\omega'+1}{n}{}^{j}(p^{a'}, 0),$$
$$(1 \leq a' \leq m')$$

definieren $\underset{\omega'+1}{A}{}^{m'm'}(p^{a'}, 1)$ entsprechend und verbinden $\underset{\omega'+1}{A}{}^{m'm'}(0,0)$ und $\underset{\omega'+1}{A}{}^{m'm'}(0,1)$ durch $\underset{\omega'+1}{A}{}^{m'm'}(0, t)$ derart analytisch, daß bei $m' < m$ für alle t

$$\text{(4.15)} \qquad \operatorname{Rang}\left(\frac{\partial b_{\omega'}}{\partial p^{b''}}(0, t) + c_{n\omega' b''}(0, t),\ \underset{\omega'+1}{A}{}^{m'm'}(0, t)\right) = m'$$

gilt, was wegen (4.12), wegen der Gültigkeit von (4.15) für beide Randstellen (Planarität von $\underset{(1)}{R}_m$ bzw. $\underset{(2)}{R}_m$, vgl. dazu S. 462!) und wegen der Tatsache, daß die Anzahl der ω' bei $m' < m$ immer größer als m' ist, erreichbar ist. Schließlich dehnen wir die Definition von $\underset{\omega'+1}{A}{}^{m'm'}(0, t)$, $\underset{\omega'+1}{A}{}^{m'm'}(p^{a'}, 0)$ und $\underset{\omega'+1}{A}{}^{m'm'}(p^{a'}, 1)$ durch die in allen Argumenten analytischen Funktionen

$$\underset{\omega'+1}{A}{}^{m'm'}(p^{a'}, t) = \underset{\omega'+1}{A}{}^{m'm'}(0, t) +$$
$$+ (1-t)\left(\underset{\omega'+1}{A}{}^{m'm'}(p^{a'}, 0) - \underset{\omega'+1}{A}{}^{m'm'}(0, 0)\right) + t\left(\underset{\omega'+1}{A}{}^{m'm'}(p^{a'}, 1) - \underset{\omega'+1}{A}{}^{m'm'}(0, 1)\right)$$

auf $(p^{a'}, t)$ aus und setzen außerdem

$$\underset{\lambda\mu}{T}{}^{m'}(p^{a'}, t) = (1-t)\,\underset{\lambda\mu}{T}{}^{m'}(p^{a'}, 0) + t\,\underset{\lambda\mu}{T}{}^{m'}(p^{a'}, 1) \qquad (m' + 1 \leq \lambda,\ \mu \leq n),$$

wobei

$$\underset{\lambda\mu}{T}{}^{m'}(p^{a'}, 0) = g_{ij}\big(\underset{(1)}{x}{}^{k}(p^{a'})\big)\,\frac{D\underset{\lambda}{n}{}^{i}}{Dp^{m'}}(p^{a'}, 0)\,\underset{\mu}{n}{}^{j}(p^{a'}, 0)$$

und $\underset{\lambda\mu}{T}{}^{m'}(p^{a'}, 1)$ entsprechend definiert ist. Die Funktionen $\underset{\lambda\mu}{T}{}^{m'}(p^{a'}, t)$ sind wiederum in allen Punkten $(0, t)$ analytisch.

Jetzt lassen sich durch Integration des mit $\underset{\omega'+1}{A}{}^{m'm'}(p^{a'}, t)$ und $\underset{\lambda\mu}{T}{}^{m'}(p^{a'}, t)$ gebildeten und von t analytisch abhängenden Systems (3.34), (3.35) unter den ebenfalls von t analytisch abhängenden Anfangsbedingungen (3.37) nach (I') eindeutig die Mannigfaltigkeiten $x^i(p^{a'}, t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ mit $x^i(p^{a'}, 0) = \underset{(1)}{x}{}^{i}(p^{a'})$ und $x^i(p^{a'}, 1) = \underset{(2)}{x}{}^{i}(p^{a'})$ gewinnen, durch welche eine analytische Verbiegung von $\underset{(1)}{R}_{m'}$ in $\underset{(2)}{R}_{m'}$ gegeben wird, da Bedingung (3.32) für alle t wegen (4.14) zutrifft. Die Mannigfaltigkeiten dieser Verbiegungsschar sind wegen (4.15) im Falle $m' < m$ für $p^{a'} = 0$ planar, womit der Induktionsbeweis von Satz 5 zu Ende geführt ist, w.z.b.w.

Für den bisher ausgeschlossenen Fall $\frac{m(m+1)}{2} = n$ gilt im Spezialfall, daß der Riemannsche Raum R_n ein euklidischer Raum E_n ist, eine im Vergleich zu Satz 5 abgeschwächte Behauptung, welche ausgedrückt wird in

Satz 6.

Vor.: Es seien $\underset{(1)}{R}_m$ und $\underset{(2)}{R}_m$ zwei isometrisch durch gleiche Parameterwerte aufeinander bezogene, m-dimensionale, analytische Mannigfaltigkeiten des n-dimensionalen euklidischen Raums E_n mit $n = \frac{m(m+1)}{2}$. Die Nullpunkte seien auf beiden Mannigfaltigkeiten keine Flachpunkte, und die an einer

beliebigen (($n-1$)-dimensionalen) Hyperebene des E_n gespiegelte Mannigfaltigkeit $\underset{(2)}{R_m}$ werde mit $\underset{(2)}{R'_m}$ bezeichnet.

Beh.: Dann läßt sich $\underset{(1)}{R_m}$ entweder in $\underset{(2)}{R_m}$ oder in $\underset{(2)}{R'_m}$ analytisch verbiegen.

Beweis. Die Behauptung dieses Satzes läßt sich ganz analog wie beim Beweis von Satz 5 einsehen, wenn man beachtet, daß durch eine Spiegelung von $\underset{(2)}{R_m}$ an einer Hyperebene des E_n die Orientierung der n Vektoren

$$\frac{\partial \underset{(2)}{x^i}}{\partial p^{\bar a}}(0),\quad \frac{\partial^2 \underset{(2)}{x^i}}{\partial p^{\bar b}\,\partial p^{\bar c}}(0),\quad \frac{\partial \underset{(2)}{x^i}}{\partial p^m}(0) \qquad (1 \leq \bar a, \bar b, \bar c \leq m-1, \bar b \geqq \bar c)$$

bzw. der daraus durch Orthogonalisierung gewonnenen Vektoren $\underset{a}{e^i}(0)$, $\underset{\varrho}{e^i}(0)$ und $\underset{n}{e^i}(0)$ $\left(m \leqq \varrho \leqq \frac{m(m+1)}{2} - 1 = n-1\right)$ gerade umgekehrt wird, w.z.b.w.

Bemerkungen.

1. Die Möglichkeit einer stetigen Verbiegung (mit einer vom Parameter t stetig abhängenden Schar von Verbiegungsmannigfaltigkeiten) von $\underset{(1)}{R_m}$ in $\underset{(2)}{R_m}$ bzw. $\underset{(2)}{R'_m}$ bewies im Spezialfall $m = 2$ schon Schilt[32]) und im allgemeinen Fall Burstin [14] $\left(n = \frac{m(m+1)}{2}\right)$.

2. Die Voraussetzung der Flachpunktfreiheit von $\underset{(1)}{R_m}$ und $\underset{(2)}{R_m}$ ist in Satz 6 wesentlich. Schilt hat nämlich gezeigt[33]), daß es Paare analytischer, isometrischer Flächen F_1 und F_2 gibt, bei denen sich F_1 weder in F_2 noch in eines ihrer Spiegelbilder stetig verbiegen läßt, und dies gilt a fortiori für die Möglichkeit einer analytischen Verbiegung.

In einer Fortsetzung dieser Arbeit werden aus den Hilfssätzen von § 2 weitere Existenz- und Eindeutigkeitssätze der mehrdimensionalen Differentialgeometrie hergeleitet werden.

Literatur

[1] E. Goursat: Cours d'Analyse Mathématique. II, 2. Ausgabe. Paris 1911. — [2] H. Weyl: Mathematische Analyse des Raumproblems. Berlin: Julius Springer 1923. — [3] G. Darboux: Leçons sur la théorie générale des surfaces III, 1894. — [4] K. Leichtweiss: Natürliche Gleichungen einer Fläche. Math. Z. 57, 244—264 (1953). — [5] M. Janet: Sur la possibilité de plonger un espace riemannian donné dans espace riemannian. Ann. Soc. Pol. Math. 5, 38—43 (1926). [6] É. Cartan: Sur la possiblilité de plonger un espace riemannian donné dans espace riemannian. Ann. Soc. Pol. Math. 6, 1—7 (1927). — [7] C. Burstin: Ein Beitrag zum Problem der Einbettung der Riemannschen Räume in euklidischen Räumen. Rec. Math. Moscou. 38, 74—85 (1931) — [8] L. P. Eisenhart: Riemannian Geometry. Princeton 1949. — [9] Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften III, 3 D. 11. — [10] A. Duschek u. W. Mayer: Lehrbuch der Differentialgeometrie, Bd. II., Berlin: B. G. Teubner 1930. — [11] E. Calabi: Isometric imbedding of complex manifolds. Ann. of Math. 58, 1—23 (1953). — [12] J. Lense: Über ametrische Mannigfaltigkeiten und quadratische Differentialformen mit verschwindender Diskriminante. Jber. Dtsch. Math. Ver. 35, 280—294 (1926). — [13] Polya-Szegö: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Bd. I, 2. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1953. — [14] C. Burstin: Beiträge der Verbiegung von Hyperflächen in euklidischen Räumen. Rec. Math. Moscou 38, 86—93 (1931). — [15] H. Schilt: Über die isolierten Nullstellen der Flächenkrümmung und einige Verbiegbarkeitssätze. Comp. Math. 5, 239—283 (1938).

(Eingegangen am 18. August 1955)

[32]) Siehe dazu [15], S. 272.

[33]) Vgl. [15], S. 270.

nig-

gen.

beim

tung

$\geqq \bar{c})$

$^{d}(0)$

b.w.

ter t

in

inen

tz 6

iso-

n in

die

§ 2

ren-

. —

3. —

CHT-

NET:

nian.

r un

). —

e in

ART:

sen-

tial-

g of

sche

imi-

und

rlag

nen.

ellen

938).